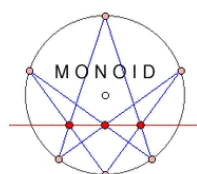
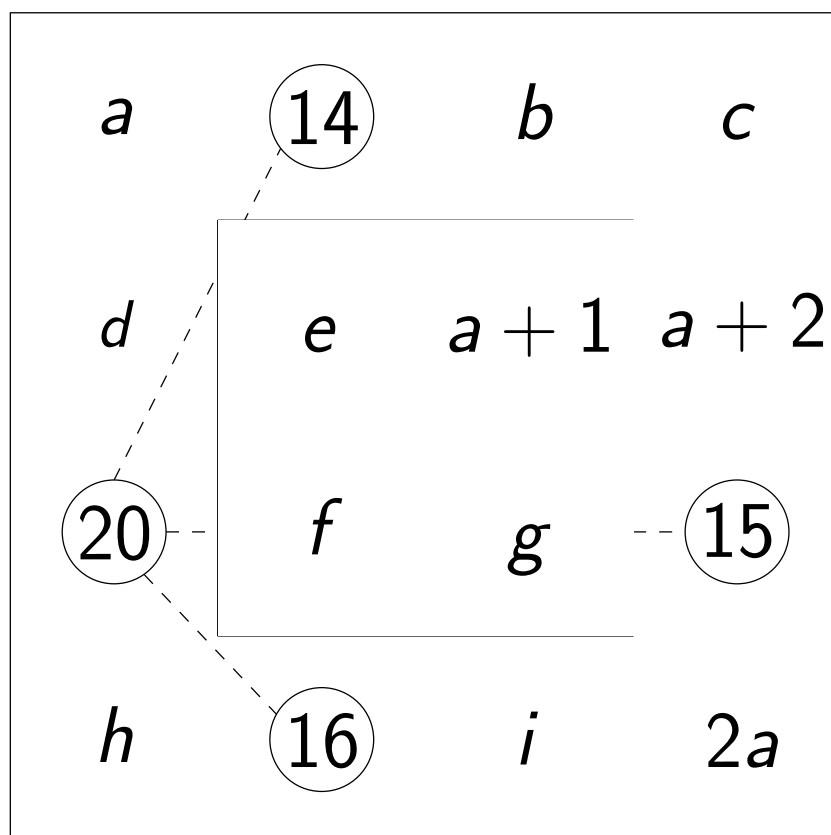


MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der

Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.02.2015.

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

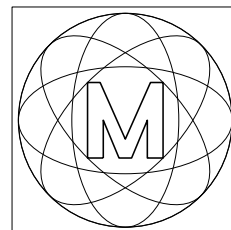
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Zum Titelblatt

Man ersetze die Buchstaben durch natürliche Zahlen, sodass das große Quadrat magisch ist mit der magischen Summe 74 und die Zahlen des kleinen Quadrats ebenfalls die Summe 74 haben. Dabei sollen verschiedenen Buchstaben verschiedene Zahlen zugeordnet werden. (H.F.)

Die Lösung findest Du in diesem Heft ab Seite 47.

Aufgaben zum Neuen Jahr

Wie viele Ziffern?

Wenn man die Ziffern von 2^{2014} und 5^{2015} zu einer neuen Zahl Z hintereinander schreibt, wie viele Ziffern hat dann Z ? (H.F.)

Gerade in einem Parallelogramm

Ein Parallelogramm hat die Eckpunkte $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(12, 4)$, $(4, 4)$. Eine Gerade durch $P = (2021, 2017)$ halbiert das Parallelogramm flächenmäßig. Welche Steigung hat diese Gerade? (WG)

Eine Art Sudoku mit verstecktem Wunsch

			33			21	
		19		11		60	
36			63	23			
	64				39		24
1			47	7			
						6	
31		46					28
50			32				

Verteile die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 64$ – die vorgegebenen Zahlen mitgerechnet – so in die Felder des Quadrats, dass gilt:

- In jedem der 4×4 -Teilquadrate hat jede Zeilensumme und jede Spaltensumme den Wert 130.
- In jedes Teilquadrat sind jeweils vier Sequenzen aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen einzusetzen – zum Beispiel folgt aus 1 im linken unteren Quadrat, dass auch 2, 3, 4 in diesem Teilquadrat sind.

- c) In jeder Zeile und in jeder Spalte eines jeden Teilquadrats ist genau ein Element einer Sequenz erlaubt.
- d) Die aus den Ziffern in den beiden Feldern in der linken oberen Ecke zusammengesetzte vierziffrige Zahl kommt in dieser Zeit sehr häufig vor.

Wenn man dann in mit Zahlen ausgefüllten großen Quadrat jeder Zahl einen Buchstaben zuordnet nach der folgenden Vorschrift

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
S	S	E	L	R	Ü	E	L	L	S	A	I	T	W	I	D	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
N	L	E	D	O	K	N	E	A	G	N	C	T	R	K	S	
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	
M	R	L	O	I	O	N	C	K	I	C	H	U	I	N	U	
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	
C	E	E	E	I	G	L	J	H	E	N	T	T	D	E	Ü	A

dann erhält man ein Buchstabenquadrat, das zeilenweise von oben nach unten gelesen einen Wunsch der MONOID-Macher ergibt. (H.F.)

Punkte im Dreieck

Im Dreieck $\triangle ABC$ mit $|ABC| = 4$ sind 8057 Punkte verteilt – diese können auf dem Rand des Dreiecks sowie im Innengebiet liegen.

Zeige: Es gibt ein Teildreieck T von $\triangle ABC$ mit der Fläche 1, in dem sich mindestens 2015 Punkte befinden. (H.F.)

Eine Frage der Teilbarkeit

Für jede Primzahl p mit $p \geq 5$ gilt: $p^2 + 2015$ ist ein Vielfaches von 24. Zeige dies. (H.F.)

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 18.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Gewinnchancen bei einem Zufallsspiel

Ein Automat, der zufällig Nullen und Einsen erzeugt, bietet folgendes Spiel für zwei Gegner an: Die beiden Spieler wählen sich jeweils verschiedene dreistellige Muster aus Nullen und Einsen. Daraufhin erzeugt der Automat solange Nullen und Einsen, bis eines der beiden gewählten Muster auftritt. Gewonnen hat derjenige Spieler, der dieses Muster gewählt hatte.

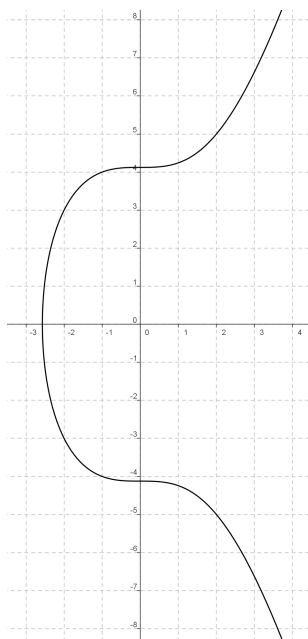
Die beiden Geschwister Alice und Bert sind von diesem Spiel fasziniert. Alice wählt die Sequenz 010 und Bert entscheidet sich für 111. Wer gewinnt öfter? (W.G.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2015 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de) dokumentieren. Außer dem Programm-Code ist auch ein Struktogramm mit Hervorhebung der wichtigsten Programmschritte und eine verbale Darstellung des Ergebnisses als Antwort auf die Aufgabenstellung (etwa als pdf-Datei) erforderlich.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 118

Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf einer kubischen Kurve



Bei bestimmten mathematischen Untersuchungen spielt oft die Frage eine Rolle, ob es auf einer vorgegebenen Kurve Punkte gibt, deren Koordinaten ganzzahlig sind. Beispielsweise können wir uns fragen, ob auf der durch die Gleichung $y^2 - x^3 = 17$ definierten kubischen Kurve Punkte liegen, deren Koordinaten ganze Zahlen sind. Untersuche dazu den Bereich $|x| < 10000$. (nach H.F.)

Ergebnisse

Wie aus dem Kurvenverlauf zu ersehen ist, braucht nur der Bereich $-3 < x < 10000$ untersucht zu werden. Hier liegen folgende Punkte (x, y) mit ganzzahligen Koordinaten x und y :

$(-2, 3), (-1, 4), (2, 5), (4, 9), (8, 23), (43, 282), (52, 375), (5234, 378661);$
 $(-2, -3), (-1, -4), (2, -5), (4, -9), (8, -23), (43, -282), (52, -375),$
 $(5234, -378661),$

wie folgende Computer-Fans festgestellt haben: Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey, Robert Kowallek vom Werner Heisenberg-Gymnasium in Neuwied, Alisha Sänger vom Schlossgymnasium in Mainz, Sandra Wingender und Stephan Bohr vom Rhein-Wied-Gymnasium in Neuwied und Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal.

Marcel Wittmann hat mit seinem Programm Python sogar den Bereich zwischen $x = 10000$ bis $x = 1000000$ untersucht, jedoch keine weiteren Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gefunden. (E.K.)

Trugschlüsse und Paradoxien

von Hartwig Fuchs

Mathis kennt die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe:

$$(1) \quad a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q}.$$

Damit berechnet er für $a = 1$ und $q = \frac{3}{2}$:

$$1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1-\frac{3}{2}} = -2.$$

Wo liegt der Fehler?

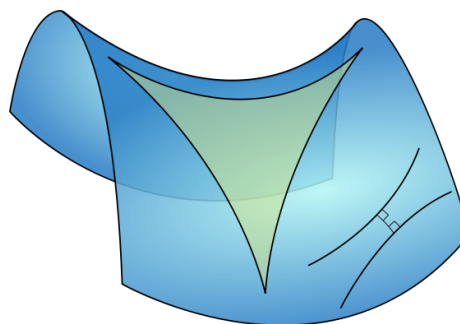
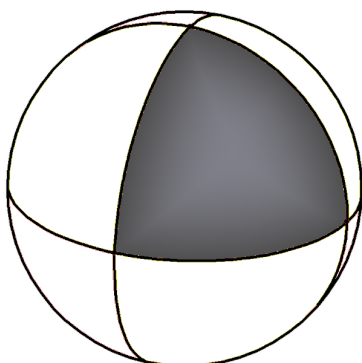
Wenn man von falschen Voraussetzungen ausgeht, ist zu erwarten, dass man zu widersprüchlichen Aussagen gelangt. Genau das ist Mathis passiert.

Die Formel (1) ist nur für $-1 < q < 1$ eine wahre Aussage. Mathis aber setzt voraus, dass (1) auch für $q = \frac{3}{2}$ zutrifft. Er benutzt also eine falsche Aussage als Voraussetzung und leitet so prompt ein unsinniges Ergebnis her.

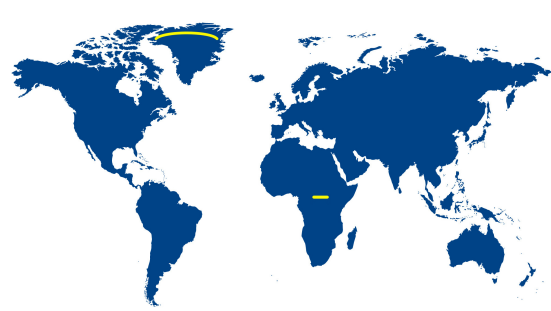
Eine verrückte Dreiecksflächenformel

von Laura Biroth

Die Innenwinkelsumme in einem Dreieck ist immer 180° bzw. π , wenn man im Bogenmaß misst, oder? Nun, wenn man Dreiecke auf ein flaches Stück Papier (oder eine Tafel) malt, stimmt das, nicht aber auf einer Kugel oder einer sogenannten Sattelfläche. Das Dreieck auf der Kugel ist „dicker“ (das auf dem Bild hat zum Beispiel drei 90° Winkel), das auf der Sattelfläche dagegen „dünner“ mit drei sehr spitzen Winkeln. Die Geometrie auf einer solchen Fläche nennt man hyperbolische Geometrie, im Gegensatz zur „normalen“ euklidischen Geometrie in der Ebene. Das hyperbolische Dreieck werden wir jetzt näher untersuchen.



Weil man eine solche Sattelfläche aber nicht beliebig weit fortsetzen kann, ohne dass sie sich selbst durchdringt, ist es praktischer, mit einem flachen Modell zu arbeiten, so ähnlich wie man Teile der kugelförmigen Erdoberfläche auf flachen Landkarten darstellt. Dabei verändern sich aber Längen, Flächen oder Winkel. Zum Beispiel sieht Grönland auf manchen Weltkarten fast so groß wie Afrika aus. Auf einem Globus siehst Du, dass das in Wirklichkeit nicht stimmt. Auch gerade Linien müssen nicht gerade Linien bleiben.



Beide Linien sind in Wirklichkeit gerade und 1000 km lang.

Wir benutzen hier gleich zwei Modelle der hyperbolischen Geometrie:
Das eine ist die obere Halbebene

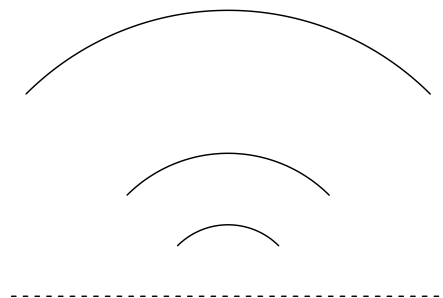
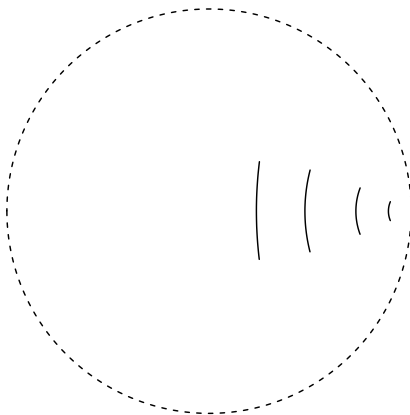
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\},$$

also die Menge aller Punkte, die über der x-Achse liegen.

Das andere ist die Kreisscheibe

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

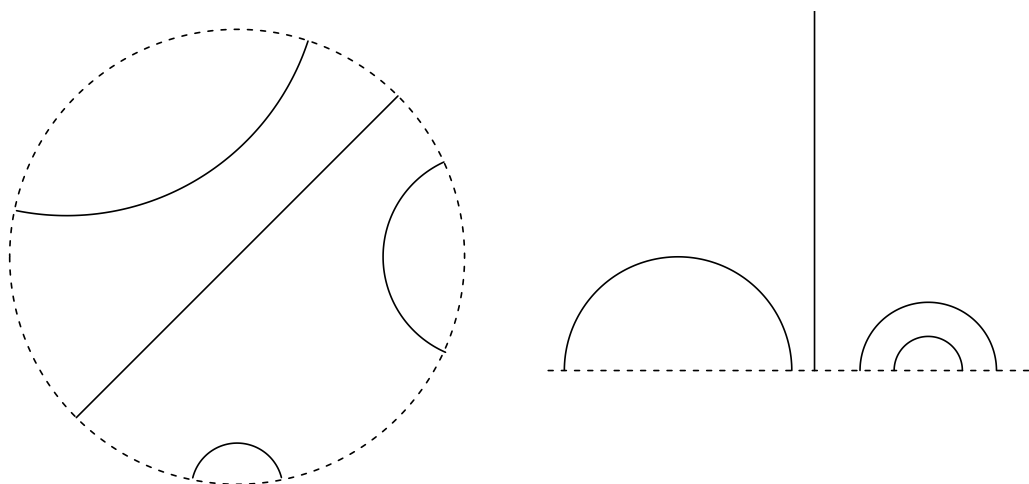
In beiden Modellen werden Längen und Flächen verzerrt (eine scheinbar gleich große Linie oder Fläche ist in Wirklichkeit um so länger bzw. größer, je näher sie am Rand liegt), Winkel bleiben aber erhalten.



Diese Strecken sind alle gleich lang.

Außerdem werden gerade Linien meistens (aber nicht immer) zu Kreisbögen verzerrt. Nur ganz bestimmte Geraden bleiben gerade. Beide Modelle beschreiben exakt die selbe Geometrie, so wie zwei verschiedene Karten vom gleichen Land. Wir können uns also immer das Modell aussuchen, das uns gerade praktischer erscheint. Sämtliche Ergebnisse gelten dann in beiden Modellen.

Was versteht man eigentlich unter einer geraden Linie, wenn wir doch auf eine gekrümmte Fläche malen? In der Ebene ist eine gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Genau diese Eigenschaft benutzen wir jetzt als Definition: Eine *hyperbolische Strecke* ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Setzt man eine solche Strecke unendlich weit fort, bekommt man eine *hyperbolische Gerade*. Im Halbebenenmodell sind die hyperbolischen Geraden entweder gewöhnliche Halbgeraden, die senkrecht auf der x -Achse stehen, oder Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x -Achse. In unserem Kreisscheibenmodell sind die hyperbolischen Geraden die Durchmesser des Einheitskreises und die Kreisbögen, die senkrecht auf dem Einheitskreis stehen.



Hyperbolische Geraden

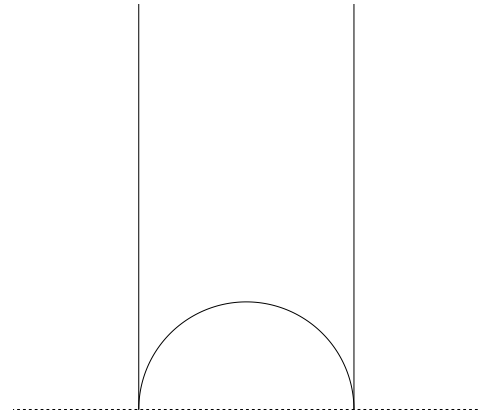
Diese Geraden sehen aus, als ob sie nicht unendlich lang wäre, sondern Anfang und Ende hätten. Das stimmt aber nicht: Erinner dich daran, dass eine Strecke um so länger ist, je näher sie am Rand (der Halbebene oder der Kreisscheibe) liegt. Wenn Du also irgendwo auf einer Gerade startest und versuchst, zu ihrem scheinbaren Ende zu laufen, werden Deine Schritte immer kleiner, je näher Du ihm kommst. Tatsächlich werden sie so schnell kleiner, dass Du den Rand nie erreichst. Die Gerade ist also doch unendlich lang.

Jetzt müssen wir uns noch überlegen, was in unserem Modell dem Herumdrehen und -schieben von Dreiecken und anderen Figuren in der Ebene entspricht, und was man damit erreichen kann. Beim Drehen und Schieben einer Figur dürfen sich Strecken, Winkel und Flächen (nach unserer hyperbolischen Definition) nicht verändern. Die Figur kann aber auf den ersten Blick anders aussehen.

Dabei gilt genauso wie in der Ebene: Wenn zwei Punkte P und Q an einer Figur den selben Abstand haben wie zwei Punkte P' und Q' an einer anderen Figur, dann kann man diese Figur so drehen und schieben, dass P' auf P und Q' auf Q zu liegen kommt.

Wir untersuchen jetzt hyperbolische Dreiecke, also sollten wir erstmal definieren, was wir damit meinen. Ein Dreieck besteht aus drei Seiten (hyperbolischen Strecken, Geraden oder Halbgeraden), die sich in drei verschiedenen Punkten schneiden, drei Ecken (ihren Schnittpunkten) und der Fläche, die sie einschließen.

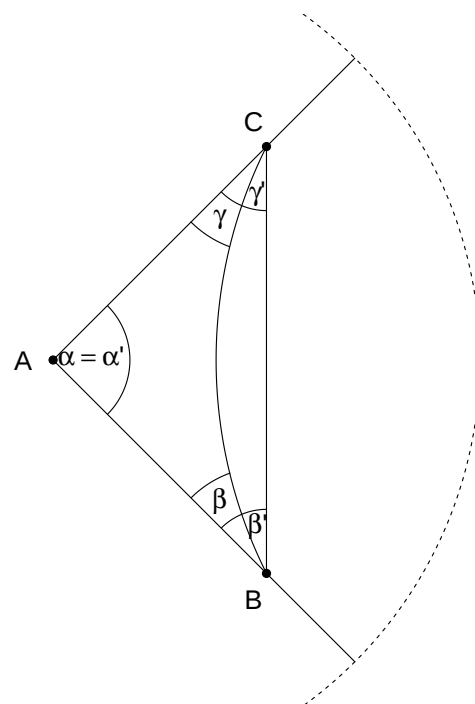
Dabei gibt es eine Besonderheit zu beachten: In unseren Modellen genügt es, wenn sich zwei Seiten nicht im Inneren, sondern nur auf dem Rand der Kreisscheibe oder Halbebene schneiden, Seiten eines Dreiecks dürfen also unendlich lang sein. Unter dem Rand der Halbebene verstehen wir nicht nur die x -Achse, sondern noch einen weiteren Punkt, den wir ∞ (unendlich), nennen. Du kannst Dir vorstellen, dass sich alle Geraden, die ein Bild senkrecht nach oben verlassen, im Punkt ∞ schneiden.



Winkelsumme

Als erstes werden wir jetzt zeigen, dass die Winkelsumme in jedem hyperbolischen Dreieck kleiner als π (das heißt 180°) ist. Dazu benutzen wir das Kreisscheibenmodell D . Wir schieben unser Dreieck ABC so zurecht, dass die Ecke A in der Mitte des Kreises liegt. Die beiden an diese Ecke angrenzenden Seiten liegen dann auf Radien von D . Die dritte Seite muss ein Kreisbogen sein. Das hyperbolische Dreieck ABC , ist dann komplett im euklidischen Dreieck ABC enthalten. Wenn wir mit α, β und γ die Winkel des hyperbolischen und mit α', β' und γ' die Winkel des euklidischen Dreiecks bezeichnen gilt also

$$\alpha + \beta + \gamma < \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi.$$



Kongruenzsatz WWW

In der gewöhnlichen euklidischen Geometrie gelten vier Kongruenzsätze:

- SSS: Zwei Dreiecke, die in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen, sind kongruent.
- SWS: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in dem eingeschlossenen

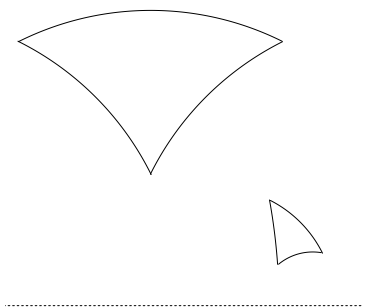
Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

- *WSW*: Zwei Dreiecke, die in einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.
- *SsW*: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt, sind kongruent.

Alle diese Sätze gelten auch für hyperbolische Dreiecke. Für diese gibt es aber auch noch einen fünften Kongruenzsatz.

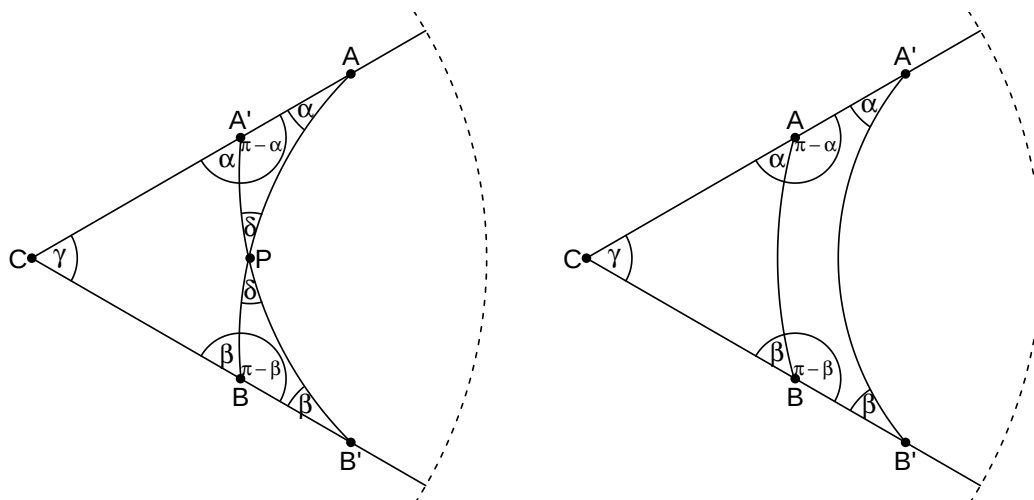
- *WWW*: Zwei Dreiecke, die in ihren drei Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.

Den Satz beweisen wir wieder in der Kreisscheibe D : Wir betrachten zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$, die beide die gleichen Winkel α , β und γ haben. Wir verschieben das Dreieck ABC jetzt so, dass die Ecke C im Mittelpunkt der Kreisscheibe liegt. Außerdem können wir das Dreieck $A'B'C'$ so schieben, dass $C' = C$ und A' auf einer Linie mit A liegen. Da beide Dreiecke bei dem Punkt A bzw. A' den gleichen Winkel α haben, liegen auch C , B und B' auf einer Linie.



Zwei kongruente Dreiecke

Wir werden jetzt zeigen, dass die verschobenen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ tatsächlich schon gleich sind. Dazu nehmen wir an, sie wären nicht gleich. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder die Strecken AB und $A'B'$ schneiden sich (eventuell auch in einem ihrer Endpunkte), oder sie schneiden sich nicht. Wir werden zeigen, dass keiner dieser Fälle eintreten kann.



Betrachten wir zuerst die Situation, in der die beiden Strecken sich schneiden. Den Schnittpunkt nennen wir P (auf dem Bild ist $A \neq P \neq B$, wenn $P = A$ oder $P = B$ kann man aber fast genauso argumentieren). Betrachte das Dreieck $AA'P$. Es hat bei A den Winkel α , bei A' den Winkel $\pi - \alpha$ und bei P einen unbekannten Winkel $\delta \geq 0$. Die Winkelsumme im Dreieck $AA'P$ beträgt also

$$\alpha + (\pi - \alpha) + \delta = \pi + \delta \geq \pi.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da wir eben gezeigt haben, dass die Winkelsumme in einem hyperbolischen Dreieck kleiner als π ist.

Wenn die beiden Strecken sich nicht schneiden, betrachten wir das Viereck $A'ABB'$. Es hat die Winkel $\alpha, \beta, \pi - \alpha$ und $\pi - \beta$, also eine Winkelsumme von

$$\alpha + \beta + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) = 2\pi.$$

Da sich aber jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegen lässt, und jedes hyperbolische Dreieck eine Winkelsumme $< \pi$ hat, muss die Winkelsumme eines hyperbolischen Vierecks kleiner als 2π sein. Auch diese Annahme führt also zu einem Widerspruch.

Dreiecksfläche

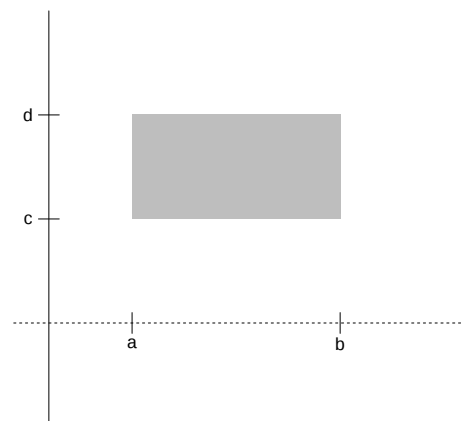
Wir wissen jetzt, dass alle Dreiecke, die drei gleiche Winkel haben, zueinander kongruent sind. Es müsste also auch eine Formel für den Flächeninhalt geben, in der nur die Winkel des Dreiecks vorkommen. Das klingt zunächst einmal komisch, ergibt aber Sinn, wenn Du Dir noch einmal die erste Abbildung anschaust. Je kleiner das Dreieck ist, das Du auf die gebogene Fläche malst, desto weniger fällt auf, dass es überhaupt gekrümmt ist. Ein großes Dreieck hat dagegen viel stärker gebogene Seiten und dadurch viel kleinere Winkel.

Wir werden zeigen, dass für die Fläche F eines hyperbolischen Dreiecks mit Winkeln α, β und γ die folgende Formel gilt:

$$(*) \quad F = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Diesmal benutzen wir das Halbebenenmodell H . Die Fläche ist in diesem Modell genauso verzerrt wie die Länge, das heißt eine Fläche ist umso mehr „wert“, je näher sie an der x -Achse liegt. Die Fläche eines gewöhnlichen Rechtecks, das in x -Richtung von a bis b und in y -Richtung von c bis d geht, berechnet man mit der folgenden Integral-Formel:

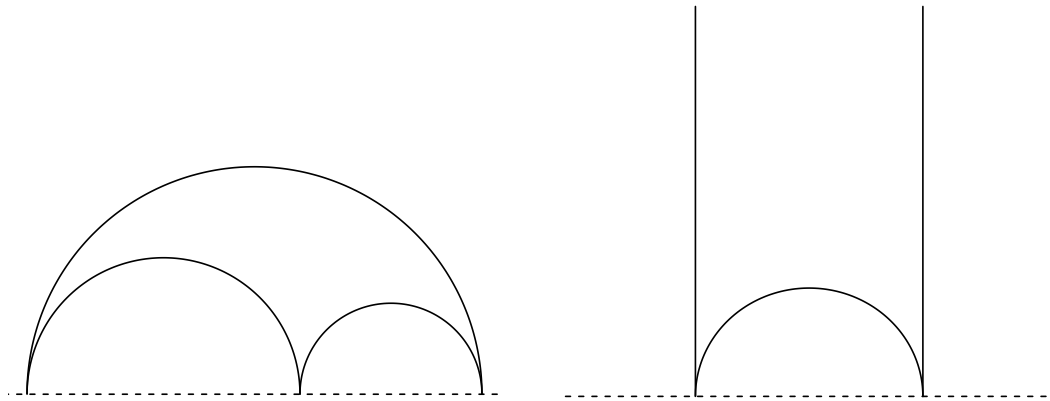
$$F = \int_a^b \int_c^d \frac{2}{y^2} dy dx.$$



Man kann mit dieser Formel grundsätzlich auch jede andere Fläche berechnen, sofern es einem gelingt, die Grenzen geeignet zu beschreiben und die Integrale auszurechnen. Das wird aber sehr schnell ziemlich kompliziert. Deshalb werden wir

diese Formel nur ein einziges Mal benutzen und alles weitere durch geschicktes Puzzeln erkennen.

Als erstes betrachten wir ein Dreieck, dessen drei Winkel alle 0 betragen. In der hyperbolischen Geometrie gibt es solche Dreiecke tatsächlich. Es sind genau die Dreiecke, deren Ecken alle auf dem Rand der Halbebene (also auf der x-Achse oder im Punkt ∞) liegen.



Zwei Dreiecke, deren Winkel alle 0 sind.

Da alle solchen Dreiecke kongruent sind, genügt es, die Fläche von einem solchen Dreieck zu berechnen, für das uns das am leichtesten fällt. Wir wählen das Dreieck rechts im Bild, wobei die beiden sichtbaren Ecken bei -1 und 1 liegen sollen. Die halbkreisförmige Seite dazwischen wird durch die Gleichung $y = \sqrt{1 - x^2}$ beschrieben. Die Fläche des Dreiecks beträgt also nach der obigen Formel

$$F = \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{2}{y^2} dy dx.$$

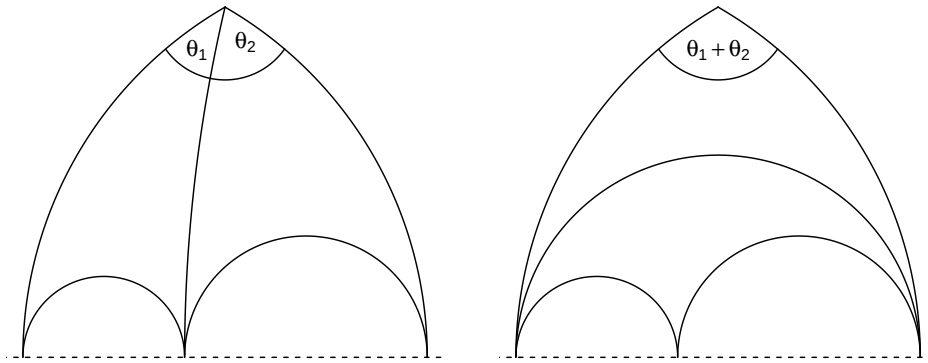
Das kann man, wenn man sich geschickt anstellt, ausrechnen und erhält $F = \pi$. Für dieses Dreieck stimmt die Formel (*) also.

Als nächstes beweisen wir die Formel für ein Dreieck mit Winkeln 0, 0 und ϑ . Da die Fläche eines solchen Dreiecks nur von ϑ abhängt, kann man die Fläche in der Form

$$F = \pi - f(\vartheta)$$

schreiben. Wir versuchen jetzt die Funktion f zu bestimmen. Dazu betrachten wir zwei Dreiecke mit Winkeln 0, 0 und ϑ_1 beziehungsweise 0, 0 und ϑ_2 , die eine Seite gemeinsam haben. Die Fläche des entstehenden Vierecks beträgt

$$F = \pi - f(\vartheta_1) + \pi - f(\vartheta_2).$$



Wir können das Viereck aber auch andersherum unterteilen und erhalten ein Dreieck, dessen Winkel alle 0 (und Fläche π) sind, und ein Dreieck mit den Winkeln 0, 0 und $\vartheta_1 + \vartheta_2$ (und Fläche $\pi - f(\vartheta_1 + \vartheta_2)$). Nach dieser Zerlegung gilt also

$$F = \pi + \pi - f(\vartheta_1 + \vartheta_2).$$

Daraus folgt

$$\pi - f(\vartheta_1) + \pi - f(\vartheta_2) = \pi + \pi - f(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

also

$$f(\vartheta_1 + \vartheta_2) = f(\vartheta_1) + f(\vartheta_2).$$

Wenn wir zusätzlich voraussetzen, dass f stetig ist, also Dreiecke mit ähnlichen Winkeln auch ähnliche Flächen haben, kommt nur noch eine Funktion der Form

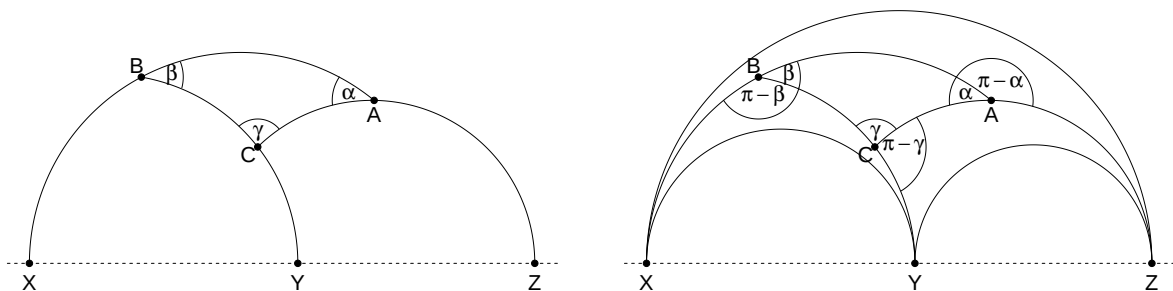
$$f(\vartheta) = k\vartheta$$

für ein $k \in \mathbb{R}$ in Frage.

Wir wissen aber, dass ein Dreieck mit den Winkeln 0, 0 und π eigentlich gar kein richtiges Dreieck, sondern nur eine halbkreisförmige Linie ist, also die Fläche 0 haben muss. Also ist $f(\pi) = \pi$, das heißt

$$f(\vartheta) = \vartheta.$$

Die Formel (*) stimmt also auch für Dreiecke mit einem Winkel ungleich 0.



Haben wir jetzt ein beliebiges Dreieck ABC mit Winkeln α, β und γ , so verlängern wir die Seite AB in Richtung B , BC in Richtung C und CA in Richtung A und nennen die Schnittpunkte mit der x-Achse X, Y und Z . Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_{ABC} &= F_{XYZ} - F_{AXZ} - F_{BXY} - F_{CYZ} \\ &= \pi - (\pi - (\pi - \alpha)) - (\pi - (\pi - \beta)) - (\pi - (\pi - \gamma)) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Hättest Du es gewusst?

Was ist eine Reduktion?

von Hartwig Fuchs

Ein Koch hat einen Braten zubereitet. Dabei ist ihm die Soße zu wässrig geraten. Wie kann er seinen Fehler beheben? Ganz einfach: Er erhitzt den Bratensaft so lange, bis daraus so viel Wasser verdampft ist, dass dann seine Soße die richtige Dickflüssigkeit hat. Dieses Verfahren des „Eindampfens“ nennen die Köche eine Reduktion.

Mathematiker stehen manchmal vor einer durchaus vergleichbaren Situation. Sie haben ein mathematisches Problem, dessen Lösung sich in einer bestimmten Menge – dem sogenannten Lösungsraum $\mathbb{L}$ – befindet. Aber $\mathbb{L}$ ist so vollgestopft mit für eine Lösung unbrauchbarem Material, dass es aussichtslos erscheint, aus $\mathbb{L}$ die Lösung herauszufiltern, indem man systematisch jedes Element von $\mathbb{L}$ daraufhin überprüft*, ob es eine Lösung ist oder nicht.

Wir beschreiben nun einige Situationen, in denen die Reduktionsmethode zur Lösung eines Problems verhilft. Dabei ist die Vielfalt der Verfahrenstechniken bemerkenswert, durch welche Reduktionen bewirkt werden.

Reduktion eines endlichen Lösungsraums

Problem: Ungewöhnliche Potenzen

Gibt es natürliche Zahlen n , für die gilt: Die Potenzen n^3 und n^4 besitzen zusammen in ihrer Dezimaldarstellung die zehn Ziffern 0 bis 9 – jedoch keine davon mehrfach?

Lösung: Da n^4 höchstens neunziffrig ist (n^3 ist mindestens einziffrig), sodass $n^4 < 10^9$ und daher $n \leq 177$ gilt, wird man von $\mathbb{L} = \{1, 2, 3, \dots, 177\}$ als Lösungsraum ausgehen. $\mathbb{L}$ kann nun „von oben her“ und „von unten her“ durch die folgenden Überlegungen reduziert werden: Für $n \geq 22$ ist $n^3 \geq 10^4$, also mindestens fünfziffrig sowie $n^4 \geq 10^5$, also mindestens sechsziffrig, sodass n^3 und n^4 zusammen mindestens elf Ziffern besitzen. Ist $n \leq 17$, so haben n^3 und n^4

* Dieses Vorgehen nennt man die „brute force Methode“ – sie ist in MONOID 111 ausführlich dargestellt.

zusammen höchstens neun Ziffern. Daher ist $\mathbb{L}_r = \{18, 19, 20, 21\}$ ein *reduzierter Lösungsraum*, aus dem man mit höchstens vier Überprüfungen genau eine Lösung, nämlich $n = 18$ mit $n^3 = 5832$ und $n^4 = 104976$, herausfiltert.

Reduktion eines unendlichen auf einen endlichen Lösungsraum

Wenn der Lösungsraum $\mathbb{L}$ eines Problems eine unendliche Menge ist und man sich bei der Identifizierung von Lösungen nicht auf den „Kommissar Zufall“ verlassen möchte, dann sollte man versuchen, $\mathbb{L}$ auf eine endliche Menge $\mathbb{L}_r$ zu reduzieren, woraus sich dann die Möglichkeit ergeben kann, die Lösungen mit der „brute force Methode“ zu ermitteln.

Problem: Zwei besondere Würfel

Für zwei Würfel mit ganzzahligen Kantenlängen x und y gilt: Die Summe ihrer Volumen ist so groß wie die Summe der Länge aller ihrer Kanten. Man bestimme x und y .

Lösung: Der Lösungsraum dieses Problems ist die unendliche Menge

$$\mathbb{L} = \{(x, y) : x = 1, 2, 3, \dots \text{ und } y = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Mit Hilfe der Voraussetzung $x^3 + y^3 = 12(x + y)$ kann nun $\mathbb{L}$ reduziert werden:

$$\begin{array}{ll} x^3 + y^3 = 12(x + y) & \text{Division durch } (x + y) \\ x^2 - xy + y^2 = 12 & \text{quadratische Ergänzung durch } -xy \\ (x - y)^2 = 12 - xy & \text{es ist } (x - y)^2 \geq 0 \\ xy \leq 12 & \end{array}$$

Damit ist die unendliche Menge $\mathbb{L}$ reduzierbar auf die 35-elementige Menge

$$\mathbb{L}_r = \{(x, y) : xy \leq 12, x \text{ und } y \text{ ganzzahlig } \leq 12\}.$$

Durch rechnerische Überprüfungen der Elemente von $\mathbb{L}_r$ erhält man – abgesehen von der Vertauschbarkeit von x und y : Es gibt genau eine Lösung, nämlich $x = 2$, $y = 4$.

Problem: n -ziffrige n -te Potenzen

- (1) Es seien a und n natürliche Zahlen, $a > 1$, $n \geq 1$. Welche Zahlen a^n haben eine n -ziffrige Dezimaldarstellung?

Lösung: Der Lösungsraum für (1) ist die unendliche Menge

$$\mathbb{L} = \{a^n : a = 2, 3, 4, \dots \text{ und } n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Eine erste Reduktion $\mathbb{L}'_r$ von $\mathbb{L}$ ergibt sich so: Es sei $a \geq 10$. Dann ist $a^n \geq 10^n$, a^n hat also mindestens $n + 1$ Ziffern. Daher befinden sich die Lösungen von (1) in der reduzierten Menge

$$\mathbb{L}'_r = \{a^n : a = 2, 3, \dots, 9 \text{ und } n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Eine Reduktion $\mathbb{L}''_r$ der unendlichen Menge $\mathbb{L}'_r$: Es sei a^n eine Lösung von (1). Dann ist $a^n < 10^n$, sodass gilt:

$$(2) \quad 10^{n-1} \leq a^n \leq 9^n.$$

Nun ist aber für $n = 22, 23, 24, \dots$ jeweils $9^n < 10^{n-1}$. Daher sind die Lösungen von (1) in der endlichen Menge $\mathbb{L}_r''$ zu finden:

$$\mathbb{L}_r'' = \{a^n : a = 2, 3, \dots, 9 \text{ und } n = 1, 2, \dots, 21\}.$$

Damit ist die unendliche Menge $\mathbb{L}$ durch zwei Reduktionen auf die Menge $\mathbb{L}_r''$ mit $8 \cdot 21 = 168$ Elementen eingeschränkt. Mit einem Taschenrechner findet man leicht, dass (1) genau 48 Lösungen besitzt, nämlich:

$$2^1, 3^1, 4^1, 4^2, 5^1, 5^2, 5^3, 6^1, 6^2, 6^3, 6^4, 7^1, 7^2, \dots, 7^6, 8^1, 8^2, \dots, 8^{10}, 9^1, 9^2, \dots, 9^{21}.$$

Reduktion eines unendlichen Lösungsraums auf ein System endlicher Lösungsräume

Problem: Summen aus Ziffernpotenzen

Es sei z eine natürliche $n + 1$ -ziffrige Zahl, $z = z_n \cdot 10^n + \dots + z_1 \cdot 10^1 + z_0$ und $n \geq 0$. Man bestimme alle Zahlen z , für die gilt:

$$z_n \cdot 10^n + \dots + z_1 \cdot 10^1 + z_0 = z_n^{z_n} + \dots + z_1^{z_1} + z_0^{z_0}.$$

Lösung: Der Lösungsraum des Problems ist $\mathbb{L} = \{z : z = 1, 2, 3, \dots\}$.

Es sei nun z eine $n + 1$ -ziffrige Lösung, $n \geq 0$. Dann gilt:

$$10^n \leq z = z_n \cdot 10^n + \dots + z_1 \cdot 10^1 + z_0 = z_n^{z_n} + \dots + z_1^{z_1} + z_0^{z_0} \leq (n + 1) \cdot 9^9.$$

Daraus erhalten wir die Ungleichung $10^n \leq (n + 1) \cdot 9^9$ und deshalb $\frac{10^n}{(n+1)} \leq 9^9$.

Der Term $\frac{10^n}{(n+1)}$ ist monoton wachsend mit wachsendem n :

Wegen $\frac{1}{n+1} < \frac{10}{n+2}$ ist $\frac{10^n}{n+1} < 10^n \cdot \frac{10}{n+2} < \frac{10^{n+1}}{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ und deshalb wird er von einem n ab stets 9^9 übertreffen. Man findet leicht: $n = 10$.

Also ist die $n + 1$ -ziffrige Zahl z nur dann eine Lösung, wenn $10^n : (n + 1) < 9^9$ und daher, wenn $n < 10$ ist.

Mit der Bedingung $n < 10$ kann nun der Lösungsraum $\mathbb{L}$ auf ein System von zehn endlichen Mengen reduziert werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_r(n = 0) &= \{1, 2, 3, \dots, 9\}, \mathbb{L}_r(n = 1) = \{10, 11, 12, \dots, 99\}, \dots, \\ \mathbb{L}_r(n = 9) &= \{10^9, 10^9 + 1, 10^9 + 2, \dots, 10^{10} - 1\}. \end{aligned}$$

Eine Inspektion dieser Mengen ergibt: $\mathbb{L}_r(n = 0)$ enthält die Lösung 1, $\mathbb{L}_r(n = 3)$ enthält die Lösung 3425 und in $\mathbb{L}_r(n = 8)$ befindet sich die Lösung 438 579 088 mit $0^0 = 0$. Weitere Lösungen gibt es nicht.

Reduktion eines unendlichen Lösungsraums auf einen unendlichen Teilraum

Wenn ein Problem einen unendlichen Lösungsraum $\mathbb{L}$ besitzt, bei dem eine Reduktion auf eine oder mehrere endliche Mengen nicht gelingen will, dann ist es manchmal hilfreich, $\mathbb{L}$ auf einen zwar noch unendlichen, aber auf einen mit einer für die Lösung des Problems günstigen Struktur versehenen Teilraum zu reduzieren.

Problem: Die Euler-Vermutung

- (1) Leonhard Euler (1707–1783) veröffentlichte 1769 eine Verallgemeinerung der berühmten Fermat-Vermutung: Keine der Potenzen z^n , $z = 2, 3, 4, \dots$ und $n = 3, 4, 5, \dots$, kann als eine Summe $z^n = x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n$ aus natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_m$ mit $2 \leq m < n$ dargestellt werden.

Lösung: Die Euler-Vermutung blieb fast 200 Jahre lang ein unbezwungenes mathematisches Problem. Sie spaltete die mit ihr befassten Mathematiker in zwei Lager: Die einen hielten sie für wahr, die anderen für falsch. Bis etwa Mitte des 20. Jahrhunderts konnte keine der beiden Gruppen einen Durchbruch bei der Lösung des Euler-Problems erzielen. Das sollte sich aber bald mit dem Aufkommen der Computer ändern. Denn mit deren Hilfe konnten nun die Gegner der Euler-Vermutung rechnerisch nach Gegenbeispielen für (1) suchen.

Dazu reduzierten sie den Lösungsraum $\mathbb{L} = \{z^n: z = 2, 3, 4, \dots \text{ und } n = 3, 4, 5, \dots\}$ des Euler-Problems rigoros auf unendliche Teilräume $\mathbb{L}_r(n)$ von $\mathbb{L}$ des Typs

$$\mathbb{L}_r(n) = \{z^n: z = 2, 3, 4, \dots \text{ und } n \text{ eine feste Zahl } \geq 3\},$$

von denen man einigermaßen große Anfangsstücke mit dem Computer nach solchen Zahlen durchforsten konnte, die (1) widersprechen.

Tatsächlich wurden so 1966 J. Lander und R. Parkin in dem von ihnen gewählten reduzierten Lösungsraum $\mathbb{L}_r(5) = \{z^5: z = 2, 3, 4, \dots\}$ fündig: $z = 144$ ergibt das erste gefundene Gegenbeispiel für (1) mit $144^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5$. Und 1988 entdeckte W. Elkies sogar in $\mathbb{L}_r(4) = \{z^4: z = 2, 3, 4, \dots\}$ mit $20615673^4 = 18796760^4 + 15365639^4 + 2682440^4$ eine zweite Zahl, die (1) widerlegt. Die Euler-Vermutung gilt daher nicht für jedes $z \geq 2$ und jedes $n \geq 3$.

Es gibt jedoch auch Probleme, bei denen man selbst mit massiver Reduktion der Lösungsräume zunächst einer Lösung nicht wesentlich näher kommt.

Problem: Gerade perfekte Zahlen

Man bestimme alle geraden natürlichen Zahlen p , bei denen die Summe der Teiler – der Teiler p nicht mitgerechnet – genau p ist. Solche Zahlen heißen perfekt.

Lösung nicht bekannt. – Euklid und Euler haben bewiesen: Durch eine enorme Reduktion der Menge $\mathbb{L} = \{2, 4, 6, \dots\}$ erhält man zwar eine strukturelle Beschreibung der Menge $\mathbb{L}_r$ aller perfekten geraden Zahlen:

$$\mathbb{L}_r = \{p: p = 2^{n-1}(2^n - 1), 2^n - 1 \text{ eine Primzahl}, n \geq 2\}.$$

Da aber nur für einige wenige Exponenten p die Primzahl-Eigenschaft von $2^n - 1$ bekannt ist**, ist man immer noch weit von einer Lösung des Problems entfernt.

** Man kennt heute (Stand 2014) nur 48 perfekte Zahlen p ; die größte von ihnen erhält man für $n = 57\,885\,161$, sie hat mehr als drei Milliarden Stellen.
Ein Anfangsstück von $\mathbb{L}_r$ ist $\{6, 28, 496, 8128, 33550336\}$.

Die oben beschriebenen Beispiele könnten den Eindruck erwecken, das Reduktionsverfahren sei nur nützlich bei der Lösung von Problemen aus der Arithmetik und der Zahlentheorie. Dem ist aber keineswegs so:

Tatsächlich sind Reduktionen eine universell einsetzbare Technik, die in allen Teilgebieten der Mathematik ausgiebig benutzt wird. Dazu nur ein sehr einfaches Beispiel:

Problem: Berechnung einer Wahrscheinlichkeit

Wenn man aus dem reellen Zahlenintervall $[1; 4]$ eine Zahl x zufällig auswählt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit W , dass dieses x die Ungleichung $x \leq \frac{4}{x}$ erfüllt?

Lösung: Der „Spielraum“ für x ist $\mathbb{L} = \{x: x \text{ reell und } 1 \leq x \leq 4\}$. Aus $x \leq \frac{4}{x}$ und $x \geq 1$ folgt $x^2 - 4 \leq 0$, also $(x - 2)(x + 2) \leq 0$, woraus $(x - 2) < 0$ und $x + 2 \geq 0$ und damit $x \leq 2$ und $x \geq -2$ folgt (der Fall $x - 2 \geq 0$ und $x + 2 \leq 0$ ist nicht möglich). Daher ist $\mathbb{L}_r = \{x: x \text{ reell und } 1 \leq x \leq 2\}$ der reduzierte „Spielraum“ für x . Damit ergibt sich:

$$W(x \text{ erfüllt } x \leq \frac{4}{x}) = \frac{\text{Länge des Intervalls } [1; 2]}{\text{Länge des Intervalls } [1; 4]} = \frac{1}{3}.$$

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 3

Wie viele Ziffern?

Wenn 2^{2014} m Ziffern und 5^{2015} n Ziffern besitzt, dann hat die Zahl Z $m + n$ Ziffern.

Berechnung von $m + n$: Zuerst gelten die Ungleichungen $10^{m-1} < 2^{2014} < 10^m$ und $10^{n-1} < 5^{2015} < 10^n$. Durch Multiplikation einander entsprechender Terme der beiden Ungleichungen ergibt sich:

$$(1) \quad 10^{m-1} \cdot 10^{n-1} < 2^{2014} \cdot 5^{2015} < 10^m \cdot 10^n.$$

Nun hat $2^{2014} \cdot 5^{2015} = 5 \cdot 2^{2014} \cdot 5^{2014} = 5 \cdot 10^{2014}$ die gleiche Anzahl von Ziffern wie 10^{2014} . Somit folgt aus (1):

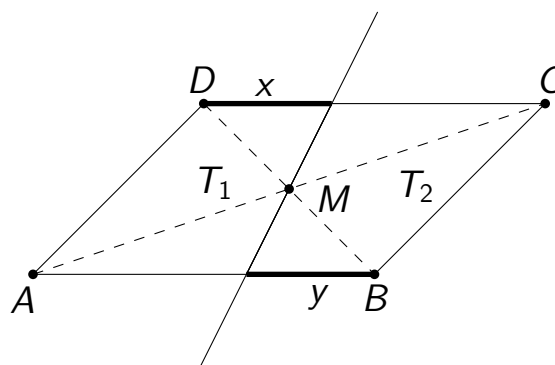
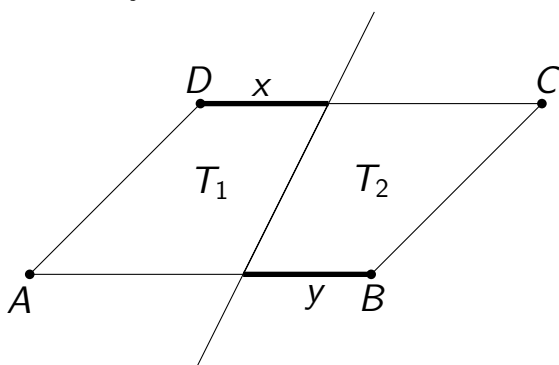
$$(2) \quad 10^{m+n-2} < 10^{2014} < 10^{m+n}.$$

Also ist $m + n - 1 = 2014$, sodass $m + n = 2015$ ist. Daher besitzt die Zahl Z 2015 Ziffern.

Gerade in einem Parallelogramm

Allgemeine Untersuchung: Eine Gerade g halbiert ein Parallelogramm flächenmäßig. Wie verläuft g innerhalb des Parallelogramms? Es entstehen Abschnitte y und x auf $a = AB$ und $c = CD$ sowie Trapeze T_1 und T_2 mit Flächeninhalten F_1 und F_2 . Nach Voraussetzung ist $F_1 = F_2$ und wegen $F_1 = \frac{1}{2}(x + a - y)$ sowie

$F_2 = \frac{1}{2}(y + a - x)$ gilt $\frac{1}{2}(x + a - y) = \frac{1}{2}(y + a - x)$, also $x + a - y = y + a - x$ und $2x - 2y = 0$.



Daher gilt $x = y$ und T_1 ist spiegelsymmetrisch zu T_2 an M . Jede Gerade, die ein Parallelogramm halbiert, geht durch seinen Mittelpunkt M .

Anwendung auf die Aufgabe: Der Mittelpunkt M hat die Koordinaten $(6, 2)$, also hat die Gerade g durch $P = (2021, 2017)$ und $M = (6, 2)$ die Steigung $\frac{2021-6}{2017-2} = \frac{2015}{2015} = 1$.

Eine Art Sudoku mit verstecktem Wunsch

20	15	62	33	38	59	21	12
61	34	19	16	11	22	60	37
36	17	14	63	23	10	40	57
13	64	35	18	58	39	9	24
1	52	30	47	7	42	27	54
48	29	51	2	26	55	6	43
31	4	46	49	41	8	53	28
50	45	3	32	56	25	44	5

D	I	E	M	O	N	O	I
D	R	E	D	A	K	T	I
O	N	W	Ü	N	S	C	H
T	A	L	L	E	N	L	E
S	E	R	N	E	I	N	G
U	T	E	S	G	L	Ü	C
K	L	I	C	H	E	S	N
E	U	E	S	J	A	H	R

Punkte im Dreieck

Man zerlege das Dreieck $\triangle ABC$ durch die Verbindungsstrecken seiner Seitenmittelpunkte in vier kongruente, also auch flächengleiche Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke hat folglich den Flächeninhalt 1. Auf diese vier Dreiecke seien jeweils 2014 Punkte verteilt. Wegen $4 \cdot 2014 = 8056$ gibt es einen 8057-ten Punkt in einem der vier Teildreiecke.

Eine Frage der Teilbarkeit

(1) $p^2 + 2015 = p^2 - 1 + 2016 = (p - 1)(p + 1) + 24 \cdot 84$. Nun gilt:

(2) $(p - 1)(p + 1)$ ist ein Vielfaches von 24, denn:

Da die zwischen $p - 1$ und $p + 1$ liegende Zahl p ungerade und > 3 ist, gilt: Eine der Zahlen $p - 1$, $p + 1$ ist ein Vielfaches von 2 und die andere ein Vielfaches von 4. Ferner ist entweder $p - 1$ oder $p + 1$ ein Vielfaches von 3. Also ist $(p - 1)(p + 1)$ ein Vielfaches von $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Aus (1) und (2) folgt: $p^2 + 2015$ ist ein Vielfaches von 24.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 119

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Heftnummer

Stelle die Heftnummer 119 als Summe aufeinanderfolgender Primzahlen dar. (MG)

Lösung:

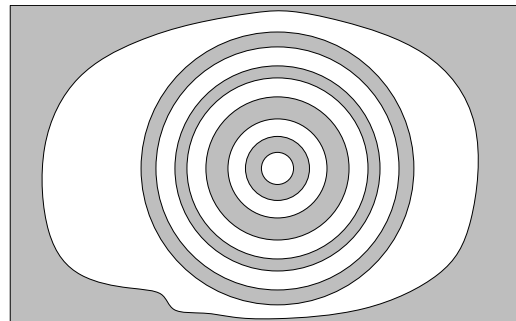
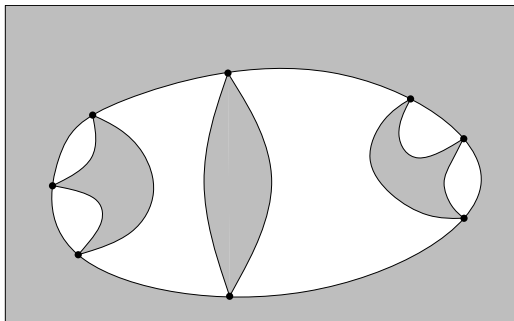
Darstellungen sind möglich mit fünf Primzahlen $119 = 17 + 19 + 23 + 29 + 31$ oder mit sieben Primzahlen $119 = 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29$.

II. Kolorierung einer Landkarte

Kann man die Landkarte einer Insel so in $n \geq 9$ Gebiete einteilen, dass man beim Kolorieren der Gebiete und des Meeres mit zwei Farben auskommt, wenn zwei Gebiete mit gemeinsamer Grenze so wie auch das Meer und ein angrenzendes Gebiet verschiedenfarbig sein müssen? (H.F.)

Lösung:

Wir geben zwei Lösungen für $n = 9$ Gebiete an, bei denen man sieht, dass es für jedes $n \geq 9$ Lösungen des Zwei-Farben-Problems gibt:



III. Asterix

Klaus liest in einem Asterix-Band die Seiten XXXVIII bis LI.

a) Wie viele Seiten sind das? Gib die Antwort als arabische und als römische

Zahlen an.

- b) Auf wie vielen Blättern sind die gelesenen Seiten gedruckt? (MG)

Lösung:

- a) Klaus liest die Seiten 38 bis 51. Das sind $51 - 38 + 1 = 14$ Seiten. Als römische Zahl also XIV paginae.
- b) In jedem Buch haben die linken Seiten eine gerade Seitenzahl, die rechten Seiten eine ungerade Seitenzahl. Daher liest Klaus von einer linken bis zu einer rechten Seite, folglich sind es $14 : 2 + 1 = 8$ Blätter.

IV. Sonntage

- a) Wenn in einem Jahr der 18. März ein Sonntag ist, wie viele Sonntage gibt es dann im Juni desselben Jahres?
- b) Wenn in einem Jahr der 18. Februar ein Sonntag ist, wie viele Sonntage gibt es dann im Juni desselben Jahres? (WJB)

Lösung:

- a) Vom 18. März bis zum 31. Mai sind es 74 Tage, das heißt zehn Wochen und vier Tage. Also ist der 31. Mai ein Donnerstag und es gibt im Juni die folgenden vier Sonntage: 3. Juni, 10. Juni, 17. Juni und 24. Juni.
- b) Ist das Jahr kein Schaltjahr, so ist mit dem 18. Februar auch der 18. März ein Sonntag und es gibt im Juni die in a) gefundenen vier Sonntage.
In einem Schaltjahr ist der 31. Mai ein Freitag und wir haben im Juni fünf Sonntage, den 2. Juni, den 9. Juni, den 16. Juni, den 23. Juni und den 30. Juni.

V. Gewinnspiel

In einer Zeitschrift findet Miriam folgendes Gewinnspiel:

Wähle eine dreistellige Zahl aus und schreibe diese zweimal hintereinander auf. Wenn du dir beispielsweise 314 ausgesucht hast, dann sollte jetzt 314314 auf deinem Zettel stehen.

Teile diese Zahl durch die magische Zahl 13. Der Rest, der beim Teilen übrig bleibt, ist deine persönliche Glückszahl. Das wird eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 12 sein. Nun kannst du schon gewonnen haben.

Wenn du deine Zahl und deine Glückszahl (also den Rest) an die Redaktion schickst, dann bekommst du umgehend so viele 100-Euro-Scheine zugeschickt, wie deine persönliche Glückszahl angibt. Bitte Name und Anschrift nicht vergessen!

- a) Miriam versucht ihr Glück mit der Zahl 217. Welchen Gewinn bekommt sie?
- b) Miriam probiert ein paar weitere Zahlen aus und hat schließlich den Eindruck, dass es überhaupt nicht möglich ist, überhaupt etwas zu gewinnen. Stimmt das? (MG)

Lösung:

- a) $217217 : 13 = 16709$ geht ohne Rest auf. Miriam gewinnt also nichts.
- b) Angenommen ein Leser wählt die dreistellige Zahl abc . Dann notiert er $abcabc = abc \cdot 1001$ auf dem Zettel. Wegen $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ist diese Zahl aber immer durch 13 teilbar; die Division geht also immer ohne Rest auf und somit ist Miriams Vermutung richtig.

VI. Lateinisches Quadrat

Finde ein 6×6 -Quadrat, dessen 36 Felder mit Ziffern gefüllt werden sollen, sodass gilt: In der obersten Zeile steht eine 6-stellige Zahl n , die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht. In der zweiten Zeile steht wiederum eine 6-stellige Zahl, die aus denselben Ziffern wie n besteht, aber doppelt so groß wie n ist, also $2n$. In der dritten Zeile steht die Zahl $3n$ und so weiter. Schließlich steht in der sechsten Zeile die Zahl $6n$. Dabei sollen in jeder Zeile und jeder Spalte alle 6 Ziffern vorkommen. (Chr. Sievert)

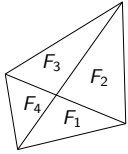
Lösung:

1	4	2	8	5	7
2	8	5	7	1	4
4	2	8	5	7	1
5	7	1	4	2	8
7	1	4	2	8	5
8	5	7	1	4	2

Überlegungen zur Lösung:

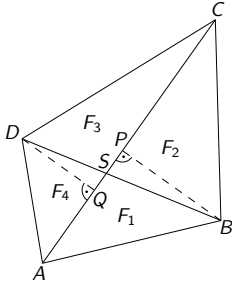
- Links oben muss eine 1 stehen, denn 2 oder größer ergäben bei $6n$ eine 7 stellige Zahl.
- Rechts oben muss eine 7 stehen, denn dies ist die einzige Zahl N , bei der eines der Vielfache $2N, 3N, \dots, 6N$ als Einerziffer eine 1 hat ($3 \cdot 7 = 21$) – und eine 1 muss nach 1. ja vorkommen.
- Also müssen in der sechsten Spalte in der angegebenen Reihenfolge von oben nach unten jeweils die Einerziffern der Vielfachen von 7 stehen: 7, 4, 1, 8, 5, 2.
- Diese Ziffern müssen dann ebenfalls in der ersten Spalte stehen – und zwar in aufsteigender Reihenfolge, da $N < 2N < \dots < 6N$ ist.
- Die restlichen Ziffern können durch einfache Überlegungen gefunden werden. Denn man prüft für die restlichen vier Ziffern in der ersten Zeile in dieser Reihenfolge, dass an der fünften Stelle die 5, an der vierten Stelle die 8, an der dritten Stelle die 2 und daher an der zweiten Stelle die 4 stehen muss, woraus sich dann sofort die restlichen Zeilen ergeben.

VII. Ein Flächenverhältnis



Ein Viereck wird von seinen beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 sind. Dann gilt: $\frac{F_1 \cdot F_3}{F_2 \cdot F_4} = 1$. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:



Es sei S der Diagonalschnittpunkt im Viereck $ABCD$. BP sei das Lot von B auf AC und DQ sei das Lot von D auf AC . Dann ist:

$$F_1 = \frac{1}{2} |AS| \cdot |BP|, F_2 = \frac{1}{2} |CS| \cdot |BP|,$$

$$F_3 = \frac{1}{2} |CS| \cdot |DQ|, F_4 = \frac{1}{2} |AS| \cdot |DQ|.$$

Damit ist $F_1 \cdot F_3 = \frac{1}{4} |AS| \cdot |BP| \cdot |CS| \cdot |DQ| = F_2 \cdot F_4$. Daraus folgt die Behauptung.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Heftnummer

Stelle die Heftnummer 120 dar...

- als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen,
- als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden geraden Zahlen,
- als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden ungeraden Zahlen,
- als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden Dreieckszahlen,
- als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden Primzahlen,
- als Produkt von möglichst vielen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen.

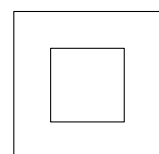
Bemerkung: Es genügt hier, die Darstellungen anzugeben. Eine Begründung, dass es keine Darstellungen mit mehr Summanden oder Faktoren gibt, wird nicht verlangt. (MG)

II. Glaspfand

Bei Familie Schaller haben sich viele Joghurtgläser mit einem Pfandwert von je 30 Cent angesammelt. Frau Schaller schickt ihren Sohn Timo deshalb ohne Geld zum Einkaufen von drei Gläsern Joghurt. Wie viele Pfandgläser muss Timo mitnehmen, wenn ein Glas Joghurt ohne Pfand 90 Cent kostet? (WJB)

III. Fläche zwischen äußerem und innerem Quadrat

Wie in der nebenstehenden Skizze seien zwei Quadrate angeordnet. Dabei haben die Seiten des inneren Quadrates einen Abstand von 1cm zu denen des äußeren Quadrates. Die Fläche zwischen den beiden Quadraten ist 20cm^2 . Wie lang sind die Kanten des inneren Quadrates? (WG)



IV. Hausnummern

Janina fährt mit ihrem Fahrrad durch die Weierstraße in Hausdorf, in der die Hausnummern nach der üblichen Orientierungsnummerierung vergeben sind.*

- a) Sie passiert zu ihrer Rechten die Häuser mit den Nummern 8 bis 18. – Wieviele Häuser sind das auf der rechten Straßenseite?
 - b) Janina hat als Wegbeschreibung von ihrer Freundin bekommen: „Nach dem Haus mit der Nummer 18 kreuzt der Bolzanoweg, danach im dritten Haus auf der rechten Seite wohne ich.“ – Welche Hausnummer hat dieses Haus?
 - c) Da Janina etwas zu früh ist, fährt sie mit ihrem Fahrrad die Weierstraße hin und zurück. Sie zählt insgesamt 18 Häuser auf der linken und 19 Häuser auf der rechten Seite. – Welche ist die größte Hausnummer in der Weierstraße?
- (MG)

V. Farbige Socken

Andrea hat in einer Schublade je 15 Paar Socken in vier verschiedenen Farben. Dabei liegen alle 30 Socken einzeln in der Schublade. Sie holt davon im Dunkeln rein zufällig n Socken heraus. Wie groß muss n mindestens sein, wenn sie sicher sein will, dass

- a) sie mindestens drei Paar in der gleichen Farbe herausgezogen hat?
 - b) sie von zwei verschiedenen Farben je drei Paar Socken hat?
 - c) sie von jeder Farbe drei Paar hat?
- (WJB)

VI. Primzahlen als Primzahlsumme

Ist es für jede Primzahl, für manche Primzahlen oder für keine Primzahl möglich, sie als Summe zweier anderer Primzahlen zu schreiben?

(WJB)

VII. BA, BABA, BAABAA

In einer simplen Sprache werden Wörter nur aus den Buchstaben A und B nach den folgenden Regeln gebildet:

- 1. A ist ein Wort.
- 2. Ist W ein Wort, dann ist WB ein Wort.
- 3. Ist W ein Wort, dann ist WW ein Wort.
- 4. Kommt in einem Wort W die Buchstabenfolge AAA vor, dann ergibt sich ein Wort W' , wenn man in W die Sequenz AAA durch B ersetzt.
- 5. Aus einem Wort W , das die Sequenz BBB enthält, ergibt sich durch Weglassen von BBB ein Wort W' .

Gibt es in dieser Sprache die in der Überschrift genannten Wörter?

(H.F.)

* Es gibt hier auch keine „Doppel-Hausnummern“ wie „Weierstraße 2–4“ oder Buchstabenzusätze, wie 9a.

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

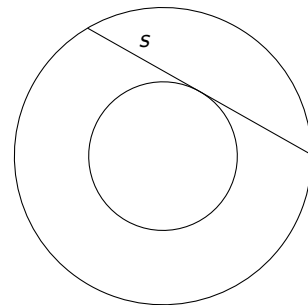
Aufgabe 1113: Bunt gefärbte Strecken

In der Ebene seien n Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte werden durch genau eine Strecke miteinander verbunden, die beliebig in einer von fünf Farben gefärbt ist. Man erhält so 2 028 098 farbige Strecken.

- a) Wie viele Punkte sind gegeben?
- b) Zu jedem Punkt gehört mindestens eine Farbe, in der die meisten der in diesem Punkt beginnenden Strecken gefärbt sind. Wie groß ist bei jedem Punkt die Mindestanzahl der Strecken, die in dieser Farbe (in diesen Farben) gefärbt sind? (H.F.)

Aufgabe 1114: Leuchtturm

Der Leuchtturmwärter will in seinem Leuchtturm einen neuen Boden verlegen. Der Leuchtturm ist kreisrund und hat in der Mitte ein (ebenfalls rundes) Treppenhaus. Leider weiß der Leuchtturmwärter nicht, welche Durchmesser Turm und Treppenhaus haben. Er hat nur festgestellt, dass eine Holzlatte der Länge $s = 5\text{m}$ wie nebenstehend abgebildet genau zwischen Außenwand und Treppenhaus passt. Kannst Du trotzdem ausrechnen, wie groß der Fußboden ist? (gefunden von LB)



Aufgabe 1115: Schokoraub

Der böse große Bruder hat aus den fünf Türchen T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 des Adventskalenders die Schokolade „gemopst“.

Die Nummer T_1 des ersten Türchens ist kleiner als die Nummer T_2 des zweiten Türchens und bei den nachfolgenden Türchen gibt es keine (der Reihe nach gelesen) aufsteigende Teilfolge aus mindestens drei Zahlen.

An welchem Tag sind die Spuren des „Schokoladenklaus“ verwischt? (H.F.)

Aufgabe 1116: Dezimales Kryptogramm

Die vierstellige Zahl $Z = abcd$ hat die Primfaktorzerlegung

$$Z = d \cdot ce \cdot ec.$$

Bestimme die Zahl Z .

Bemerkung: Verschiedene Buchstaben bedeuten auch stets verschiedene Ziffern. (MG)

Aufgabe 1117: Bierdeckel

Johanna und Moritz sitzen im Restaurant. Um sich die Zeit zu vertreiben, bauen Sie aus quadratischen Bierdeckeln mehrstöckige dreieckige Kartenhäuser.

- a) Wie viele Dreiecke (jeglicher Größe) enthält ein solches Kartenhaus mit zwei bzw. drei Stockwerken?
- b) Wie viele Dreiecke (jeglicher Größe) enthält ein solches Kartenhaus mit n Stockwerken? Unterscheide die Fälle n gerade und n ungerade.

(Valentin Blomer)

Aufgabe 1118: Wahr oder falsch?

Jasmin beschäftigt sich nun schon eine ganze Weile mit der Darstellung von Zahlen als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und möchte nun, nachdem sie bisher solche Darstellungen gesucht hat, Zusammenhänge untersuchen. Heute geht sie folgenden Fragen nach.

Entscheide jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe. (Jasmin konnte übrigens alle korrekt entscheiden!)

- a) Lässt sich eine Zahl als Summe von sowohl zwei als auch drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch mit sechs.
- b) Lässt sich eine Zahl als Summe von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch sowohl mit zwei als auch drei.

(MG)

Aufgabe 1119: Ausgewürfelte Zahl

David möchte mithilfe eines üblichen Spielwürfels eine vierstellige Zufallszahl erzeugen, die er als PIN verwenden kann. Dazu wirft er den Würfel viermal nacheinander. Ist dabei aber die Augenzahl eines Wurfes gleich der Augenzahl des vorherigen Wurfes, so wiederholt David den Wurf und verwendet das Ergebnis der Wiederholung – unabhängig davon, ob dies wieder die gleiche Augenzahl ist oder nicht.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass...

- a) ... die erwürfelte Zahl kleiner als 5000 ist.
- b) ... die zweite und die dritte Ziffern gleich sind.
- c) ... die zweite Ziffer eine 4 ist.
- d) ... die zweite und die dritte Ziffer beide eine 6 sind.

(nach WJB)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 119

Klassen 9–13

Aufgabe 1106: Wahrscheinlich sortiert

Ein gewöhnlicher Spielwürfel wird sechsmal geworfen. Sortiere begründet die folgenden Ereignisse absteigend von wahrscheinlich bis unwahrscheinlich:

- a) Es wird sechsmal die 6 gewürfelt.
- b) Es wird sechsmal dieselbe Zahl gewürfelt.
- c) Es werden sechs unterschiedliche Zahlen geworfen.
- d) Es wird sechsmal eine Primzahl gewürfelt.
- e) Es wird sechsmal dieselbe Primzahl gewürfelt.
- f) Es werden sechs unterschiedliche Primzahlen geworfen. (MG)

Lösung:

Es ergibt sich folgende Reihenfolge:

- d) $P(\text{„sechsmal PZ“}) = (P(\text{„PZ“}))^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{6}\right)^6 = \frac{3^6}{6^6} = \frac{729}{6^6} >$
- c) $P(\text{„sechsmal unterschiedlich“}) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6!}{6^6} = \frac{720}{6^6} >$
- b) $P(\text{„sechsmal dieselbe Zahl“}) = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{6}{6^6} >$
- e) $P(\text{„sechsmal dieselbe PZ“}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{3}{6^6} >$
- a) $P(\text{„sechsmal 6“}) = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{6^6} >$
- f) $P(\text{„sechs unterschiedliche PZ“}) = 0$

Aufgabe 1107: Die drei letzten Ziffern

Wie lauten die drei letzten Ziffern von $(376^{2012} + 625^{2013}) \cdot 2014$? (H.F.)

Lösung:

$[n]$ gebe die drei letzten Ziffern einer natürlichen Zahl n an. Nun gilt:

$[376^a] = 376$ für jedes $a \geq 1$ und $[625^b] = 625$ für jedes $b \geq 1$.

Daraus folgt: $[376^{2012} + 625^{2013}] = 001$. Daher ist $376^{2012} + 625^{2013} = x \cdot 1000 + 1$ für eine natürliche Zahl x und damit: $(376^{2012} + 625^{2013}) \cdot 2014 = (x \cdot 1000 + 1) \cdot (2000 + 14) = (\text{Vielfaches von } 1000) + 14$. Die gesuchten drei letzten Ziffern sind also 014.

Aufgabe 1108: Logische Knochelei

Vier Schüler Lisa, Jacqueline, Martin und Sebastian unterhalten sich darüber, wer von ihnen den am besten bezahlten Job in den Sommerferien hatte. Um das herauszubekommen, machen sie die Aussagen:

- (1) Lisa: „Ich verdiente weniger als mindestens einer von Jacqueline, Martin und Sebastian“;

- (2) Jacqueline: „Sebastian verdiente am meisten“;
- (3) Martin: „Die Aussage von Jacqueline ist falsch“;
- (4) Sebastian: „Jacqueline verdiente am meisten“.

Leider haben drei der Schüler geschwindelt:

- (5) Nur eine der Aussagen (1), (2), (3) und (4) ist wahr.

Wer hat also am meisten verdient?

(H.F.)

Lösung:

Annahmen:

- (a) Sebastian hat am meisten verdient. Dann sind (1) und (2) wahr – im Widerspruch zu (5).
- (b) Martin hat am meisten verdient. Dann sind (1) und (3) wahr – auch dies im Widerspruch zu (5).
- (c) Jacqueline hat am meisten verdient. Folglich sind (1), (3) und (4) wahr – ein Widerspruch.
- (d) Lisa hat am meisten verdient. Dann sind (1), (2) und (4) falsch, während (3) wahr ist.

Da nur die Annahme (d) dazu führt, dass (5) erfüllt ist, hat Lisa am meisten verdient.

Aufgabe 1109: Ganzzahliges Rechteck

Gibt es ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und a , a eine positive ganze Zahl, dessen Diagonalenlänge d ebenfalls ganzzahlig ist? (H.F.)

Lösung:

Annahme: Es gibt ein solches Rechteck, dessen Seitenlänge a und Diagonalenlänge d positiv ganzzahlig sind.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann:

$$a^2 + 1 = d^2.$$

Daher ist $a^2 + 1$ eine Quadratzahl, die größer als a^2 ist. Nun ist $(a+1)^2$ die auf a^2 folgende Quadratzahl und für $(a+1)^2$ gilt: $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > d^2$. Somit liegt d^2 zwischen a^2 und $(a+1)^2$ – ein Widerspruch!

Die Annahme ist also falsch. Also gibt es kein Rechteck mit positiven ganzzahligen Seitenlängen 1 und a und ebensolcher Diagonalenlänge d .

Aufgabe 1110: Wahr oder falsch?

Jasmin beschäftigt sich nun schon eine ganze Weile mit der Darstellung von Zahlen als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und möchte nun, nachdem

sie bisher solche Darstellungen gesucht hat, Zusammenhänge untersuchen. Heute geht sie folgenden Fragen nach.

Entscheide jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe. (Jasmin konnte übrigens alle korrekt entscheiden!)

- a) Lässt sich eine Zahl als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch mit nur zwei.
- b) Lässt sich eine Zahl als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch mit vier. (MG)

Lösung:

- a) Wenn sich eine Zahl als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt, muss sie gerade sein. Dann lässt sie sich nicht als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, da diese immer gerade ist. Also ist die Aussage a) falsch.

Anschauliches Gegenbeispiel: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ lässt sich als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, aber nicht mit zwei Summanden.

- b) Wenn sich eine Zahl als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt, muss sie ungerade sein. Dann lässt sie sich nicht als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, da diese immer gerade ist. Also ist die Aussage b) falsch.

Anschauliches Gegenbeispiel: $11 = 5 + 6$ lässt sich als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, aber nicht mit vier Summanden.

Bemerkung: Die Summe der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $m, m+1, m+2, \dots, m+n-1$ beträgt

$$\begin{aligned} S &= m + (m+1) + (m+2) + \dots + (m+n-1) \\ &= nm + 1 + 2 + \dots + (n-1) \stackrel{(*)}{=} nm + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+2m-1)}{2}, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle (*) die gaußsche Summenformel verwendet wurde. Daraus folgt $2S = n(n+2m-1) =: nk$ und somit lässt sich S als Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, wenn es eine Zerlegung $2S = nk$ gibt wobei $n < k$ und, wegen $k = n+2m-1$, genau eine der beiden Zahlen n und k gerade und die andere ungerade sein müssen.

Aufgabe 1111: Fragen der Teilbarkeit

Für welche Zahlen $2^n + 1$, für die n eine natürliche Zahl ist, gilt:

- a) $2^n + 1$ ist durch 3 teilbar?
- b) $2^n + 1$ ist durch 5 teilbar?
- c) $2^n + 1$ ist durch 15 teilbar?

Lösung:

- a) $2^1 + 1$, $2^3 + 1$, $2^5 + 1$ sind durch 3 teilbar. Vermutung: 3 teilt $2^n + 1$ für $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Die Behauptung gilt für $m = 0$ und sei bewiesen für m , also $2^n + 1 = 3v$. Dann gilt die Behauptung für $m+1$ wegen $2^{2(m+1)+1} + 1 = 2^{2m+1} \cdot 2^2 + 1 = 2^{2m+1} \cdot 3 + 2^{2m+1} + 1 = 2^{2m+1} \cdot 3 + 3v$.
- b) Es sei $[z]$ die Einerziffer einer natürlichen Zahl z . Dann gilt: $[2^{4m+1}] = 2$, $[2^{4m+2}] = 4$, $[2^{4m+3}] = 8$ und $[2^{4m+4}] = 6$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Daraus folgt $[2^{4m+2} + 1] = 5$ und somit: 5 teilt $2^{4m+2} + 1$ für $m = 0, 1, 2, \dots$.
- c) Aus (a) und (b) ergibt sich: ist eine Zahl $2^n + 1$ durch 3 teilbar, dann ist $n = 2m + 1$ ungerade. Ist sie durch 5 teilbar, dann ist $n = 4m + 2$ gerade. Daher gibt es keine durch 15 teilbaren Zahlen $2^n + 1$.

Aufgabe 1112: Zerlegung eines Dreiecks

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ und ein Punkt T auf der Seite $\overline{AB}$. Konstruiere eine Strecke $\overline{TX}$, sodass der Punkt X auf der Dreiecksseite $\overline{BC}$ liegt und die Fläche $|\triangle TBX|$ des Dreiecks $\triangle TBX$ genau $\frac{1}{n}$ der Fläche $|\triangle ABC|$ des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt, wobei n beliebig aus 2, 3, 4, ... wählbar ist. (H.F.)

Lösung:

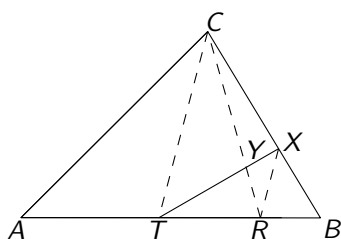


Bild 1

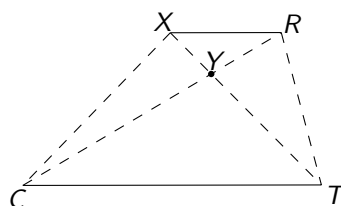


Bild 2

1. Zeichne die Strecke CT
2. Konstruiere den Punkt R auf AB so, dass gilt: $|BR| = \frac{1}{n}|AB|$ – vergleiche Bild 3 mit $n = 5$.
3. Zeichne die Parallele RX zu CT . Behauptung: $|\triangle TBX| = \frac{1}{n}|\triangle ABC|$

Begründung: Es gilt zunächst:

- (1) $|\triangle RBC| = \frac{1}{n}|\triangle ABC|$, weil $\triangle RBC$ und $\triangle ABC$ gleiche Höhe haben, aber $|RB| = \frac{1}{n}|AB|$ ist;
- (2) $|\triangle RXC| = |\triangle RXT|$ – vergleiche Bild 2.

Wegen $|\triangle RXC| = |\triangle RXY| + |\triangle XCY|$ und $|\triangle RXT| = |\triangle RXY| + |\triangle RYT|$ folgt mit (2):

$$(3) |\triangle XCY| = |\triangle RYT|.$$

Nun gilt: $|\triangle RBC| - |\triangle XCY| + |\triangle RYT| = |\triangle TBX|$, vergleiche Bild 1, sodass mit (3) $|\triangle RBC| = |\triangle TBX|$ folgt. Wegen (1) ist $|\triangle TBX| = \frac{1}{n}|\triangle ABC|$. Damit ist $\overline{TX}$ die gesuchte Trennlinie für das Dreieck $\triangle ABC$.

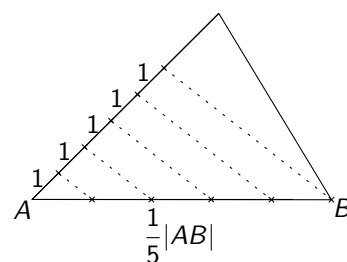
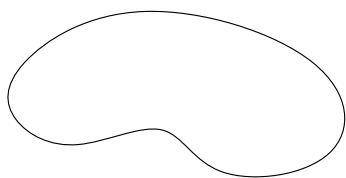


Bild 3

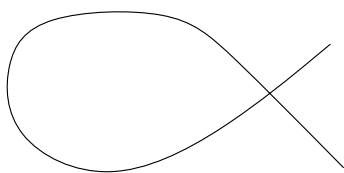
Mathematische Entdeckungen

Kurven erzeugen Gebiete

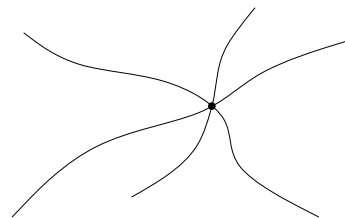
Zeichne in der Ebene n nicht geschlossene Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n$, $n \geq 2$, von denen sich keine selbst schneidet und von denen keine drei durch einen Punkte verlaufen – die folgenden geometrischen Situationen sind also nicht erlaubt:



eine geschlossene Kurve



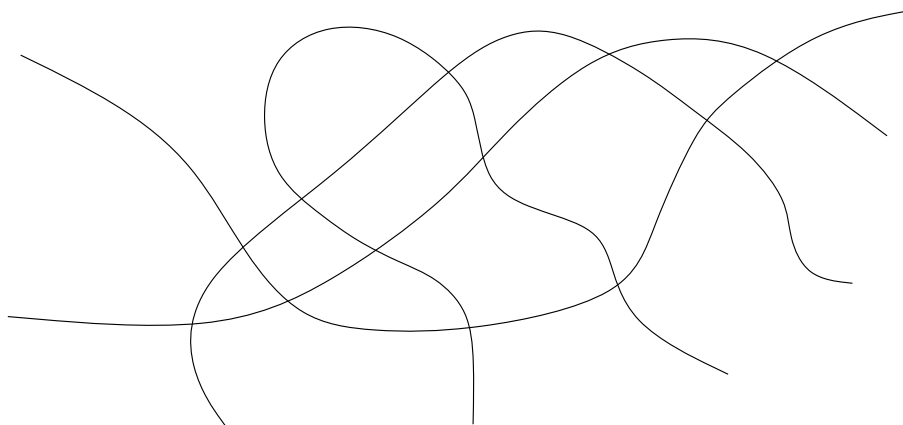
eine sich selbst schneidende Kurve



drei Kurven mit einem gemeinsamen Schnittpunkt

Für die Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n$ soll ferner gelten: Je zwei Kurven schneiden sich in s Punkten, wobei $s = 1$ oder $s = 2$ oder $s = 3$ oder ... sei. Dadurch entstehen jeweils von Kurvenstücken eingeschlossene Gebiete.

Beispiel:



Jede zwei der Kurven K_1, K_2, K_3, K_4 schneiden sich in zwei Punkten, wodurch neun geschlossene Gebiete entstehen.

Untersuche nun, wie viele Gebiete sich ergeben, wenn für n Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n$, $n \geq 2$ gilt:

- Jede zwei Kurven haben einen Schnittpunkt;
- Jede zwei Kurven haben zwei Schnittpunkte;
- Jede zwei Kurven haben drei Schnittpunkte. (H.F.)

Hinweis: Du kannst Deine Lösung als nicht zu kurze Tabelle angeben. Lösungen können aber auch vermutete Anzahlformeln sein, die dann aber nicht zu beweisen sind.

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2015 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 118

In Heft 118 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Das pythagoräische Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 hat eine Hypotenusenlänge, die gleichzeitig Kathetenlänge eines pythagoräischen Dreiecks mit den Seitenlängen 5, 12, 13 ist – skizziere die beiden Dreiecke!

Schon Euklid wusste, dass pythagoräische Tripel die Form $(n^2 - m^2, 2mn, n^2 + m^2)$ für $m, n = 1, 2, 3, \dots$ haben.

- a) Gib weitere solche „Hypo-Katheten“ an.
- b) Zeige, dass für $n := m(m+1)$, $m' = m+1$, $n' = n+1$ die Hypotenusenlänge des Tripels zu (m, n) gleich einer Kathetenlänge des Tripels zu (m', n') ist.
- c) Findest Du weitere m, n, m', n' -Beziehungen, die zu „Hypo-Katheten“ führen?
(Roland Schröder)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe hat sich Bettina Diller, 13. Klasse der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik München, beschäftigt.

- a) Weitere „Hypo-Katheten“: Hierfür suchen wir Zahlen, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lassen, wie zum Beispiel:

$$13 = 3^2 + 2^2 = 7^2 - 6^2, \quad 17 = 4^2 + 1^2 = 9^2 - 8^2, \quad 40 = 6^2 + 2^2 = 7^2 - 3^2.$$

Diese liefern die folgenden Paare von Tripeln: (5, 12, 13) und (13, 84, 85), (15, 8, 17) und (17, 144, 145), (32, 24, 40) und (40, 42, 58).

- b) Es sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und $n := m(m+1)$. Dann beträgt die Hypotenusenlänge $m^2 + m^2(m+1)^2$. Für $m' := m+1$ und $n' := n+1$ ist die eine Kathetenlänge $n'^2 - m'^2 = (m(m+1)+1)^2 - (m+1)^2 = m^2 + m^2(m+1)^2$, wie man durch Termumformungen einsieht.

Für $m = 3$ ergibt sich zum Beispiel das Tripelpaar (27, 36, 45) und (45, 28, 53).

- c) An folgenden Beispielen

Tripelpaar	n	m	n'	m'
(3, 4, 5); (5, 12, 13)	2	1	3	2
(5, 12, 13); (13, 84, 85)	3	2	7	6
(7, 24, 25); (25, 312, 313)	4	3	13	12
(9, 40, 41); (41, 840, 841)	5	4	21	20

liest Bettina die Vermutung ab, dass für $n := m+1$, $m' := m \cdot n$ und $n' := m' + 1$ die Hypotenusenlänge des Tripels zu (m, n) gleich einer Kathetenlänge des Tripels zu (m', n') ist. Erstere beträgt $(m+1)^2 + m^2$, letztere

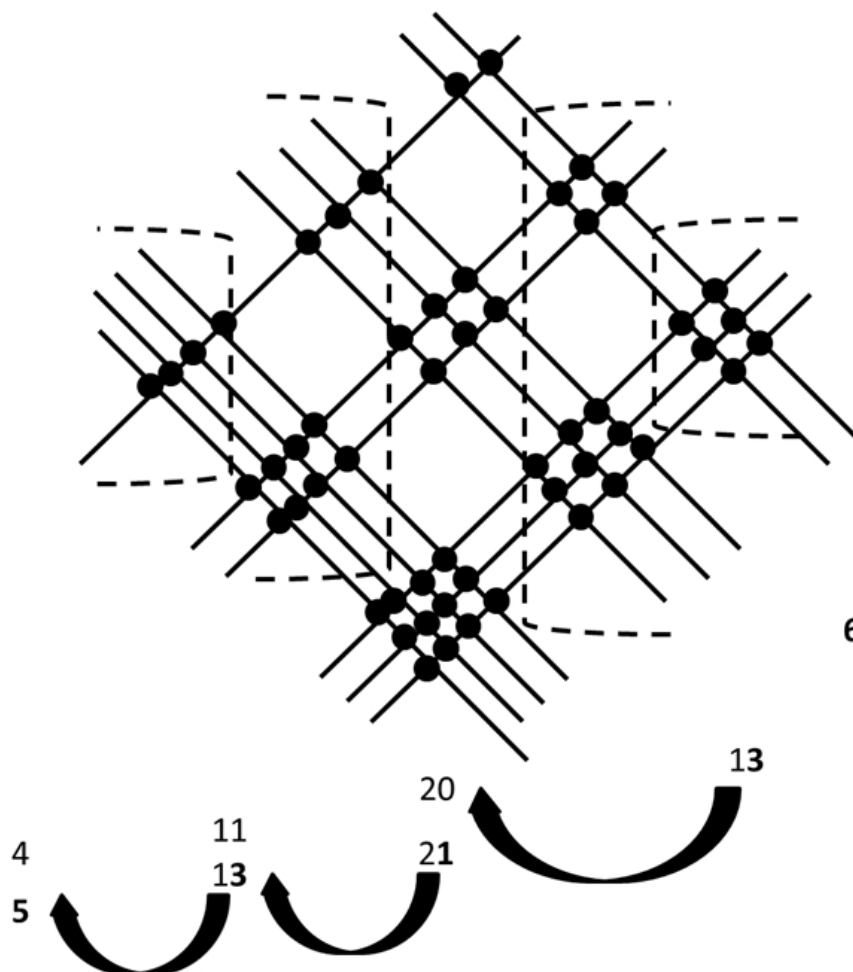
$$\begin{aligned}
 (m \cdot n + 1)^2 - (m \cdot n)^2 &= (m \cdot (m + 1) + 1)^2 - (m \cdot (m + 1))^2 \\
 &= 1 \cdot (2m(m + 1) + 1) = 2m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 + m^2.
 \end{aligned}$$

Chinesische Multiplikation

von Bettina Diller

Eine ganz einfache Methode „bildlich“ zu multiplizieren, ist die Chinesische Multiplikation. Die zwei zu multiplizierenden Zahlen werden als Striche aufgezeichnet. Man beginnt rechts mit den Einern der Zahlen, so dass eine Spitze entsteht, die nach rechts zeigt. Je nachdem wie groß die Zahlen sind, folgen parallel dazu die Zehner, Hunderter und so weiter bis ein Gitter entsteht. Nun werden die Schnittpunkte eingezeichnet. Alle Punkte, die übereinander liegen gehören in einen Bereich. Man beginnt, die Punkte im ersten Bereich zusammenzuzählen und arbeitet sich nach links. Liegt die Anzahl der Schnittpunkte in einem Bereich nicht mehr im einstelligen Bereich, wird die Zahl bis auf den Einer wie bei der „normalen“ Addition links dazu gezählt. Irgendwann, bei größeren Zahlen, wird die Chinesische Multiplikation unübersichtlich, auf den ersten Blick sieht sie aber sehr schön aus.

Beispiel: $123 \cdot 432 = 53\,136$.



Eine Verwandte der Markow-Gleichung

von Hartwig Fuchs

Im MONOID 119 auf den Seiten 31 bis 37 wurden mit einigem Aufwand die Lösungen der Markow-Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ berechnet. Da ist es dann schon bemerkenswert – und deshalb soll das auch hier beschrieben werden – wie man mit recht wenigen elementaren Überlegungen bei einer ziemlich nahe verwandten Gleichung, nämlich

$$(1) \quad w^4 + x^4 + y^4 + z^4 = 4wxyz$$

sämtliche reellen Lösungen bestimmen kann. Zunächst zeigen wir (nach J.A. Deakin), dass gilt:

$$(2) \quad w^4 + x^4 + y^4 + z^4 \geq 4wxyz \text{ für beliebige reelle } w, x, y, z.$$

$$(3) \quad \text{Aus } (w^2 - x^2)^2 = w^4 + x^4 - 2w^2x^2 \geq 0 \text{ folgt } w^4 + x^4 \geq 2w^2x^2.$$

$$(4) \quad \text{Aus } (y^2 - z^2)^2 = y^4 + z^4 - 2y^2z^2 \geq 0 \text{ folgt } y^4 + z^4 \geq 2y^2z^2.$$

$$(5) \quad \text{Aus } (wx - yz)^2 = w^2x^2 + y^2z^2 - 2wxyz \text{ folgt } w^2x^2 + y^2z^2 \geq 2wxyz.$$

Aus (3), (4) und (5) ergibt sich nun (2):

$$w^4 + x^4 + y^4 + z^4 \geq 2(w^2x^2 + y^2z^2) \geq 4wxyz.$$

Wenn nun in (2) statt des Zeichens $\geq$ ein Gleichheitszeichen stehen soll, dann muss in (3), (4) und (5) jeweils $\geq$ durch $=$ ersetzt werden. Dann gilt:

$$\text{Aus (3) folgt } w^2 - x^2 = 0, \text{ also } w^2 = x^2 \text{ und daher } |w| = |x|.$$

$$\text{Aus (4) folgt } y^2 - z^2 = 0, \text{ also } y^2 = z^2 \text{ und daher } |y| = |z|.$$

$$\text{Aus (5) folgt } wx - yz = 0, \text{ also } w^2x^2 = y^2z^2 \text{ und daraus } x^4 = y^4, \text{ sodass } |x| = |y| \text{ ist.}$$

Damit nun ein Quadrupel reeller Zahlen (w, x, y, z) eine Lösung der Gleichung (1) ist, muss deshalb gelten (notwendige Bedingung):

$$(6) \quad |w| = |x| = |y| = |z| \text{ sowie außerdem } wxyz > 0.$$

Hiervon gilt die Umkehrung: Erfüllt (w, x, y, z) die Voraussetzung (6) (hinreichende Bedingung), dann ist (w, x, y, z) eine Lösung von (1), denn aus (6) folgt mit $|w|^4 = w^4$ und so weiter, dass

$$w^4 + x^4 + y^4 + z^4 = 4w^4 \text{ und } 4wxyz = 4 \cdot w \cdot w \cdot w \cdot w = 4w^4 \text{ ist.}$$

Mit (6) sind also sämtliche Lösungen von (1) unmittelbar angebar.

Mathematische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

Rudolf Taschner: „Die Zahl, die aus der Kälte kam“

„Wenn Mathematik zum Abenteuer wird“ ist das neueste populärwissenschaftliche Buch von Rudolf Taschner untertitelt. Der Autor, Professor für Mathematik an der Technischen Universität Wien, unternimmt einmal mehr den im Vorwort beschriebenen Versuch „Mathematik als eminente kulturelle Errungenschaft einer breiten Öffentlichkeit vorzustellen“. Liest man das Buch, so kann man diesen Versuch nur als rundum gelungen bezeichnen. Rudolf Taschner erzählt spannende Geschichten über die Macht der Zahlen und dies auf eine so angenehme Weise, dass sich beim Lesen das Gefühl einschleicht, man säße freundlich plaudernd mit dem Autor vor einem prasselnden Kaminfeuer.

Zeitlich führt der Weg der „Zahl, die aus der Kälte kam“ von den Beratern ägyptischer Pharaonen, Adam Ries und Blaise Pascal über Kurt Gödel bis hin zu der heutigen Verwendung der Kreditkarte mit Geheimzahl. Inhaltlich führt Taschner dem Leser unter anderem den Grund der Existenz von Schaltjahren, die Bedeutung der Null für die Mathematik, die Bedeutung der Mathematik für die Aufklärung, große Zahlen in der Bibel oder die Verschlüsselung durch das RSA-Verfahren vor Augen.

Auch wenn einige „alte Bekannte“ wie die Legende der Erfindung des Schachspiels, oder die Erdmessung des Eratosthenes auftauchen, so liest man trotzdem gerne weiter. Einziger Schönheitsfehler ist das Fehlen eines Literaturverzeichnisses und der Mangel an Quellenangaben zu den meisten erzählten Geschichten.

Fazit: Insgesamt ist Rudolf Taschner wieder ein sehr schönes Buch gelungen, das nicht nur Mathe-Profis sondern vor allem auch interessierte Laien gerne lesen werden. Nur für ignorante Banausen, die sich peinlicherweise damit brüsten „in Mathe immer schlecht gewesen“ zu sein, bleiben die schönen Abenteuer des Buches und das damit verbundene Lesevergnügen verborgen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut 😊😊😊

Angaben zum Buch:

Taschner, Rudolf: Die Zahl, die aus der Kälte kam: Wenn Mathematik zum Abenteuer wird; Carl Hanser Verlag, 2013, ISBN 978-3446436831, geb. 244 Seiten, 19,90 €.

Art des Buches: Mathematische Plauderei

Mathematisches Niveau: leicht verständlich

Altersempfehlung: ab 13 Jahren



Bericht zur Mainzer Mathematik-Akademie 2014

von Farah Breiden

Auch in diesem Jahr fand hier an der Johannes-Gutenberg-Universität wieder eine Mathematik-Akademie statt, bei der 30 Schülerinnen und Schülern die Mathematik an der Uni näher gebracht werden sollte. Die 30 Teilnehmer trafen am Mittwochabend im Jugendhaus Don Bosco in Mainz ein, wo sie auch den Rest der Akademiezeit übernachteten. Eine Kennenlernrunde und ein gemütliches Abendessen machten den Anfang.

Am nächsten Tag ging es sofort zu den Professoren an die Uni: Die Schüler durften sich einem der drei angebotenen Themengruppen zuordnen. Diese waren dieses Jahr „Ein Zweipersonenspiel und die Dynamik von Kurven“ bei Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois, „Polynome und Symmetrien – Eine Einführung in die Galois-theorie“ bei Prof. Dr. Manfred Lehn und „Strahlengeometrie“ bei Prof. Dr. Duco van Straten. Nach einigen Kaffeepausen, einem leckeren Mittagessen in der Mensa und vielen interessanten Stunden in den Kursen begaben wir uns auf eine MAMI-Führung (Abkürzung für den Uni-eigenen Teilchen-Beschleuniger, das Mainzer Mikrotron). Als Abendprogramm stand danach wahlweise ein sehr lustiger Chanson-Abend im Unterhaus oder ein netter Gesellschaftsabend im Don Bosco fest.

Am Freitag ging es mehr oder weniger ausgeschlafen wieder zur Uni, um in den Kursen weiter Mathematik zu betreiben. Mittags gab es etwas verspätet Pizza und danach eine schöne Bowlingrunde, bei der auch nur eine Bahn ausfiel. Nach einem Mathematikfilm im Jugendhaus ging dann auch dieser Tag zu Ende.

Samstags begaben wir uns dann wieder zur Universität, um die Kurse noch fertig zu stellen und eine Präsentation vorzubereiten, die den anderen Gruppen näher bringen sollte, was man in den zweieinhalb Tagen mit dem Gruppen-eigenen Professor erarbeitet hatte. Danach ging es in die Mainzer Innenstadt, wo wir eine geschichtliche Führung durch den Mainzer Stadtkern bekamen und uns nachfolgend noch die Stadt in Kleingruppen „angucken“ konnten.

Am letzten Tag fanden schließlich die schon erwähnten Präsentationen statt, dieses Jahr ein voller Erfolg! Am Ende gab es noch ein gemeinsames gemütliches Mittagessen im Don Bosco und dann war die diesjährige MMA leider auch schon wieder zu Ende.

Die Mainzer Mathe Akademie war eine tolle, interessante Erfahrung, die man jeder mathematikinteressierten Schülerin und jedem mathematikinteressierten Schüler empfehlen kann. Ich danke hier in Vertretung Herrn Gruner und Herrn Mattheis für die wunderbare Organisation und die große Mühe, die sie sich dafür gegeben haben. Auch danke ich den studentischen Helfern, die den beiden unter die Arme gegriffen

haben und uns alle Fragen zur Uni und zum Studentenleben gern beantworteten, sowie den drei Professoren, die uns in den Kursen die Mathematik noch näher brachten! Danke.



Wackeln mathema-Tisch

von Marcel Gruner

Wie üblich gehen Andrea, Daniel und ich – alle drei Lehrer – in unserer Mittagspause essen. Heute sind wir wieder in unserem Stammlokal *Angelo* zu Gast. Wie üblich bestellen wir zu unserem Essen drei Cola. Caroline, die uns heute bedient, ist eine ehemalige Schülerin unserer Schule und arbeitet nun hier bei Angelo. Die ersten beiden Gläser serviert sie auch noch unfallfrei, während sie aber das dritte abstellt, stößt sie mit ihrem Arm eines der beiden zuvor abgestellten Gläser um, sodass sich der gesamte Inhalt über den Tisch und schließlich über meine Hose ausbreitet. „Oh nein, aber das, das, das war ich nicht“, stammelt Caroline, „der Tisch hat gewackelt und deshalb ist das Glas umgefallen.“ – „So, der Tisch hat gewackelt?“, entgegne ich und schaue auf meine nun nasse Hose.

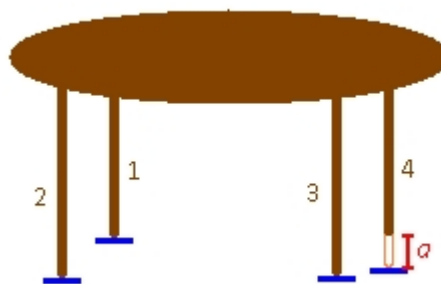
Daniel macht die Probe: „Der Tisch wackelt tatsächlich.“ – „Kein Wunder, er hat ja auch vier Beine, bei einem Tisch mit drei Beinen würde das nicht passieren, der kann gar nicht wackeln“, bemerkt Caroline. Wenigstens hat sie im Mathematikunterricht aufgepasst.

„Dann sollten wir ein Tischbein absägen oder eine Serviette unterlegen, damit der Tisch nicht mehr wackelt“, bringt Andrea es auf den Punkt und hat schon eine Serviette in der Hand.

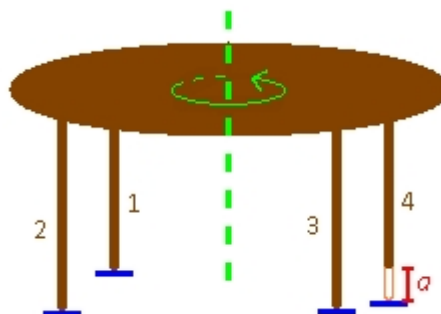
„Es gibt noch eine dritte Möglichkeit“, gebe ich zu bedenken, da ich mir nicht sicher bin, ob wir wirklich das Tischbein absägen dürfen. „Wir müssen den Tisch drehen, denn auch bei einem vierbeinigem Tisch gibt es immer eine Stellung, in

welcher der Tisch ohne zu wackeln stehen kann, egal wie der Boden geformt ist und ohne dass wir etwas unterlegen müssen.“ – „Das glaube ich nicht.“ Daniel schüttelt den Kopf.

Das kann ich natürlich nicht auf mir sitzen lassen, hier muss ich Überzeugungsarbeit leisten: „Wir gehen davon aus, dass der Tisch ordentlich gearbeitet ist, dass also alle Beine gleich lang sind und korrekt an der Tischplatte festgeschraubt sind. Wenn nun ein solcher Tisch wackelt, liegt es also am unebenen Fußboden. Ein Tischbein erreicht den Fußboden an dieser Stelle nicht und schwebt in der Luft“ Ich nehme Andrea die Serviette ab, den sie eben noch unter dieses in der Luft schwebende Tischbein legen wollte, ab und fertige eine Zeichnung an (Lehrer haben immer einen Rotstift dabei):



„Die Tischbeine 1 bis 3 stehen alle fest auf dem Boden, den ich jeweils mit den kleinen senkrechten Strichen angedeutet habe, das Tischbein 4 hingegen schwebt in der Luft, nämlich in der Höhe a . Ich habe behauptet, dass wir den Tisch so drehen können, dass alle vier Beine auf dem unebenen Fußboden stehen können. Genauer behaupte ich nun, dass wir sogar weniger als eine Vierteldrehung um die Tischmitte durchführen müssen.“ Ich deute die Drehung in meiner Skizze an.



„Dass Du drehen möchtest“, unterbricht mich Daniel, „ist ja nichts Neues. Aber wieso sollte der Tisch dann nicht mehr wackeln?“ Während Andrea die Augen verdreht, antworte ich: „Nun warte doch mal ab, ich bin ja noch nicht fertig.“ Ich wende mich zu Caroline: „Du meinstest ja, dass ein Tisch mit drei Beinen niemals wackeln würde. Wieso ist das denn überhaupt so?“ – „Weil drei Punkte, also in diesem Fall die unteren Enden der Tischbeine, immer eine Ebene aufspannen.“

„Genau. Wir betrachten nun die Ebene, die von den drei Tischbeinen 1, 2 und 3 aufgespannt wird. Das bedeutet anschaulich, dass wir den Tisch so hinstellen, dass sich die Tischbeine 1, 2 und 3 immer auf dem Boden befinden. Während wir den

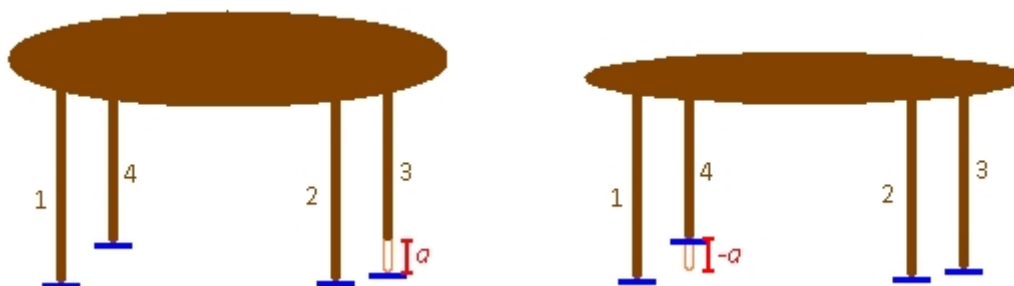
Tisch drehen, wird sich ständig die Höhe, in der das Tischbein 4 über dieser Ebene schwebt, ändern.“ – „Klar“, leuchtet Daniel ein, „wir hatten ja vorausgesetzt, dass das Wackeln vom unebenen Boden herrührt.“ Andrea ergänzt: „Denn wenn ein Bein zu kurz wäre, würde ja auch alles Drehen nichts bringen.“ Ich bin beruhigt, dass meine beiden Kollegen mir noch folgen.

„Mathematisch formuliert würden wir natürlich sagen: Der Abstand des Punktes von der Ebene ändert sich. Wir Mathematiker verwenden zur Beschreibung veränderlicher Größen, die von einer anderen Größe abhängen, Funktionen. In unserem Fall hängt die Höhe vom Drehwinkel ab. Wir können also auch hier eine Funktion verwenden, welche die Höhe $h(x)$, in der Tischbein 4 über dem Boden schwebt, in Abhängigkeit des Drehwinkels x ausdrückt. Am Anfang ist der Drehwinkel 0° und es gilt $h(0^\circ) = a$.“

Ich blicke in die Runde und sehe Andrea, Daniel und Caroline nicken. „Jetzt wird es etwas kompliziert, denn jetzt müssen wir genau überlegen. Wir müssen uns jetzt nämlich überlegen, was passiert, wenn wir den Tisch um genau 90° gedreht haben, wir also eine Vierteldrehung durchgeführt haben.“

Ich blicke in die Runde und sehe Andrea, Daniel und Caroline nachdenken. „Der Tisch wackelt immer noch“, antwortet Daniel halb nachdenklich, halb triumphierend. „Richtig“, muss ich zugeben, „aber weshalb wackelt er nun?“ Caroline antwortet: „Weil der Boden immer noch uneben ist.“

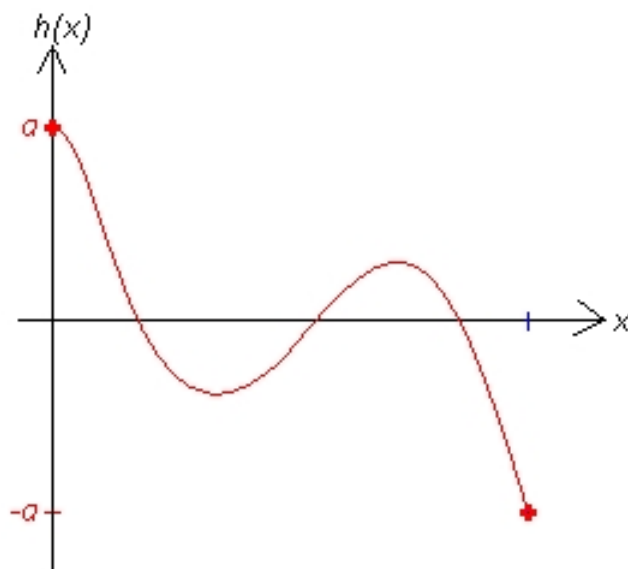
„Ja“, fahre ich mit meinen Erklärungen fort, „denn im Prinzip haben wir dieselbe Situation wie vor dem Drehen, nur dass jedes Tischbein nun an der Stelle eines anderen Tischbeines ist. Allerdings hatte ich ja gesagt, dass die Tischbeine 1 bis 3 immer auf dem Boden stehen sollen. Wir müssen also den Tisch etwas drücken, sodass diese Beine und insbesondere Tischbein 3 auf dem Fußboden stehen.“ – „Aber das geht doch gar nicht“, unterbricht mich Andrea zurecht. „Und weshalb genau?“ – Andrea antwortet nach kurzem Nachdenken: „Weil Tischbein 4, das ja nicht auf dem Boden stehen muss und somit in der Höhe variabel ist, nun zu lang ist.“ Ich nicke und ergänze „Es ist sogar genau um a zu lang“, ergänze ich, „denn vorne ändert sich an den Tischbeinen ja nichts und die (gedachte) Ebene, über der wir die Höhe messen, verläuft durch die Tischbeine 1 und 2. Wir drücken den Tisch also hinten nach unten und zwar müssen wir genau um a nach unten drücken. Wir hätten uns das natürlich auch über Symmetriegründe überlegen können.“



Nun wieder zur Funktion. Vor dem Drehen galt $h(0^\circ) = a$. Also gilt nun nach dem Drehen um 90° , dass $h(90^\circ) = -a$ ist.“

Daniel unterbricht mich schon etwas ungeduldig: „Also immer noch nicht 0.“

„Das nicht, aber gleich sind wir so weit. Wir kennen nun zwei Funktionswerte der Funktion h , nämlich $h(0^\circ) = a$ und $h(90^\circ) = -a$.“ Ich zeichne einen Funktionsgraphen auf die Serviette.



„Woher wissen Sie, dass der Funktionsgraph so aussieht?“, möchte Caroline wissen. – „Das weiß ich gar nicht“, gebe ich zu, und wahrscheinlich sieht er auch ganz anders aus. Die zwei eingetragenen Punkte stimmen aber und nun brauchen wir den *Zwischenwertsatz*. Der besagt, dass eine stetige reelle Funktion über dem Intervall $[a; b]$ jeden Wert im Intervall $[f(a), f(b)]$ annimmt. Noch genauer hilft uns hier der *Nullstellensatz von Bolzano**, der ein Spezialfall des Zwischenwertsatzes ist: Haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen, dann gibt es auf jeden Fall eine Nullstelle, also ein x_0 für das $f(x_0) = 0$ gilt.“

Daniel, der noch immer skeptisch ist, fragt nach: „Aber darfst Du diese Sätze hier überhaupt verwenden?“ – „Um das entscheiden zu können, müssen wir nun die Voraussetzungen überprüfen. Reell ist die Funktion h sicher, denn die Funktionswerte sind ja die zu den Drehwinkeln gehörenden Höhen. Aber ist die Funktion auch stetig?“

Caroline schaut hilflos: „Was bedeutet stetig überhaupt?“ – „Die formale Definition erspare ich euch, aber anschaulich bedeutet stetig, dass die Funktion keine Sprünge machen darf, also der Boden keine Stufe haben darf.“ – „Der Boden hat hier keine Stufe, also ist die Funktion stetig.“

Ich fasse zusammen: „Die Voraussetzungen sind erfüllt, also muss es einen Drehwinkel α_0 geben, für den $h(\alpha_0) = 0$ ist, bei dem die Höhe des Tischbeines 4 also 0 ist und somit der Tisch nicht wackelt.“

* Bernard Bolzano, * 05.10.1781 in Prag, † 18.12.1848 ebenda; katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker, arbeitete besonders auf dem Gebiet der Analysis.

Daniel muss zugeben: „Dann hast Du wohl Recht.“

Erleichtert, dass ich ihn überzeugen konnte, fahre ich fort: „Und es gibt noch eine zweite, kürzere Begründung. Am Anfang wackelt der Tisch um die Achse durch die beiden Tischbeine 1 und 3. Nach dem Drehen wackelt der Tisch immer noch, diesmal aber verläuft die Wackelachsen durch die Tischbeine 2 und 4. Also muss es eine Zwischenposition geben, an welcher die Wackelachse wechselt und an welcher der Tisch folglich nicht wackelt.“

Andreas Miene verfinstert sich: „Das lässt sich so schnell begründen und du hältst uns hier einen ewig langen Vortrag...“

Zu meiner Rettung unterbricht Daniel sie: „Und in welche Position müssen wir den Tisch dann jetzt drehen? Kannst du das auch mit deinem Zwischenwertsatz berechnen?“ – „Nein, leider nicht“, muss ich eingestehen: „Mathematiker interessieren nur zwei Dinge: Die Existenz und die Eindeutigkeit. Und ich weiß, dass es eine Position gibt, die nicht eindeutig sein muss, wie man an meiner Funktionsskizze sieht, die ja mehrere Nullstellen hat. Aber welchen Drehwinkel wir brauchen, sagt uns der Satz nicht, das hängt von der genauen Beschaffenheit des Bodens ab, wir müssen also ausprobieren.“

Andreas Miene verfinstert sich weiter: „Auch das hätten wir schneller haben können. Deshalb hast du es auch verdient, dass *du* die Cola übergegossen bekommen hast. Und beim nächsten Mal kippe ich Dir auch noch meine Cola über!“

Bericht zur MONOID-Jahresfeier 2014

von Kevin Mours

Am Samstag, dem 22. November 2014, fand im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (ELG) in Alzey die MONOID-Jahresfeier 2014 statt, um die Preisträgerinnen und Preisträger der Mathematikzeitschrift „MONOID - Mathematikblatt für Mitdenker“ in festlichem Rahmen zu ehren. Rund 150 Schülerinnen und Schüler verschiedener Schulen haben sich im vergangenen Jahr mit den mathematischen „Knacknüssen“ der vier MONOID-Hefte beschäftigt, und etliche Schüler aller Altersklassen erhielten dafür in diesem Jahr Preise und Jahresabonnements. Die Buch-Preise sowie das Goldene M wurden vom Verein der Freunde der Mathematik der Gutenberg-Universität Mainz gestiftet; das Preisgeld für das Goldene M von Herrn Dr. Genannt, der Sonderpreis von Casio Europe, der Forscherpreis vom Förderverein des Karolinen-Gymnasiums Frankenthal.

Fasziniert von den Möglichkeiten der Mathematik zeigte sich auch der Schulleiter des ELG Herr OStD Hoffmann in seiner Begrüßungsrede und outete sich vor den Anwesenden als Matheliebhaber, denn „wann hat man schon die Möglichkeit, vor einem Publikum zu sprechen, das trotz eines fast schon gesellschaftsfähigen Negativbildes dieses Schulfaches der Mathematik rundum positiv zugewandt ist?“ Im Rückblick auf seine eigene Schulzeit, sagte er, dass Mathe und Physik „mei-

ne Lieblingsgegenstände waren“. Ein besonderer Gegenstand aus dieser Zeit, der Rechenschieber, sei ihm auch heute 40 Jahre nach dem Abi noch lieb geblieben, denn „Multiplizieren durch Addition der Logarithmenstrecken hat was, wenngleich heutige Schüler in solchen Fällen wohl eher das Handy zücken“, stellte er mit Blick auf die jüngere Zuhörerschaft fest. Ihn interessiere auch weniger das eigentliche Ausrechnen, das leider viele mit Mathematik gleichsetzten, sondern vielmehr das Problemlösen, weswegen er vielleicht ja auch ein ganz klein bisschen mit Albert Einstein und seinem Zitat „In jeder Schwierigkeit lebt die Möglichkeit!“ gemeinsam habe.

Über die eifrigen Löser der Aufgaben vor allem auch in den Unter- und Mittelstufenklassen freute sich die Redaktionsleiterin Frau Dr. Cynthia Hog-Angeloni, die gleichzeitig Änderungen bei der Preisvergabe ankündigte. Damit die Altersklassen zukünftig getrennt bewertet werden könnten, sei die Einführung des „Goldenen Fuchses“ angedacht, denn bisher hätten die jüngeren Teilnehmer durch die Möglichkeit, sowohl an den Mathespielereien als auch den Neuen Aufgaben teilzunehmen, die Möglichkeit gehabt, insgesamt wesentlich höhere Punktzahlen als Schüler aus der Oberstufe zu erreichen. Daher sei das „Goldene M“ in diesem Jahr auch nicht an die insgesamt höchste Punktzahl vergeben worden, sondern an eine Schülerin, die sich auch in anderen Bereichen der Mathematik hervorgetan habe, unter anderem durch den mehrmaligen Besuch der Mainzer Matheakademie. Mit den Worten „Die Schul-Mathematik ist ein relativ eng umgrenzter, kleiner Raum, mal sehen, was draußen auf uns wartet!“ leitete sie zum Festvortrag „Mathematik für Computerspiele“ von Herrn Prof. Dr. Elmar Schömer, Informatiker an der Universität Mainz, über.

Die mathematikbegeisterten Zuhörer erhielten von ihm einen komplett neuen Einblick in die Welt der Informatik und erfuhren, warum Newton und Euler auch für moderne Computerspiele heute noch unverzichtbar sind. Denn wer hätte gedacht, dass die Haar- und Kleiderbewegungen eines animierten Models auf dem Bildschirm erst durch reine Mathematik (z.B. durch das semi-implizite-Eulerverfahren) realistisch wiedergegeben werden können. Am Beispiel eines Stück Stoffes, das zu einem Gitternetz aus Massenknoten und Federn vereinfacht wurde, stellte er dar, wie mithilfe der physikalischen Federgleichung, der Newton'schen Gesetze der Physik und der o.g. mathematischen Verfahren die sich verändernden Positionen der gedachten Massenknoten sehr detailgetreu berechnet werden können und eine entsprechend realistische Bewegung nachempfunden werden kann. So konnten die Anwesenden den Trailer des animierten Films „Merida“ aus den Disney Pixar Studios, der für genau diese berechneten, sehr echt aussehenden Bewegungsdarstellungen von Haaren und Kleidungsstücken gefeiert wurde, noch einmal mit ganz anderen Augen betrachten und auch einen ganz kleinen Einblick in die Weite der Welt der Mathematik bekommen.

Und da spätestens seit Platon auch Musik und Mathematik eng miteinander ver-

bunden sind, erhielt die Preisverleihung ihren musikalischen Rahmen durch Stücke von J. Pachelbel und W.A. Mozart, die klangvoll von A. Eiden, H.-D. Nollert, E. Nollert, Nicola Whittaker, P. Weyand vom ELG vorgetragen wurden und auch für das leibliche Wohl war dank eines üppigen Imbisses, welcher von dem Schulleiterbeirat des Elisabeth-Langgässer-Gymnasiums vorbereitet wurde, bestens gesorgt.

Die MONOID-Preisträger 2014

Das Goldene M: Janina Vogl (Rhein-Wied-Gymnasium, Neuwied).

Sonderpreis: Robert Kowallek (Werner-Heisenberg-Gymnasium, Neuwied).

Forscherpreise: Kevin Mours und Marcel Wittmann (Karolinen-Gymnasium Frankenthal).

1. Preise:

Jonas Ahlfeld, Miriam Gerharz, Maximilian Göbel, Maximilian Hauck, Iolanthe Köcher, Robert Kowallek, Lukas Nießen, Patrick Riebe, David Sorzer, Marcel Wittmann.

2. Preise:

Luca Bühler, Andreas Dernier, Heiko Kötzsche, Fabian Liepach, Dennis Mayle, Kevin Mours, Andreas Pitsch, Verena Rüsing, Jamico Schade, Frank Schindler, Theresa Schöche, Melanie Schuy, Sandra Wingender.

3. Preise:

Clara Deifel, Jasmin Hallyburton, Tobias Heinze, Elena Hummel, Philipp Karn, Hien Le, David Michel, Jara Müller-Kästner, Helen Richter, Katharina Rößler, Marvin Weisbender, Anja Wingender.

MONOID-Jahresabonnements 2015:

Matthias Bergen, Lukas Bonn, Elisa Dernier, Bettina Diller, Daniel Fink, Janik Frizsche, Victoria Fox, Alexander Göbel, Katharina Kiefer, Annika Koch, Tim Reinhard, Sönke Schneider, Tabea Stamm, Adriana Stenger, Lea Weißenfels, Ella Zwermann.

Die MONOID-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2013/2014 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet, der Forscherpreis vom Förderverein des Karolinen-Gymnasiums Frankenthal, der Sonderpreis von Casio. Der Preis für die Trägerin des Goldenen M wurde zu gleichen Teilen von Herrn Dr. Genannt sowie vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet. Die MONOID-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 118

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 7: Luca Bühler 91.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Lün-
ning):

Kl. 5: Janik Fritzsche 33, Timo Wolff 12;

Kl. 6: Jan Gubi 22, Maximilian Hauck 154, Manuel Wolf 11;

Kl. 9: Victoria Fox 34, Nick Wittich 15;

Kl. 10: Katharina Rößler 54;

Kl. 13: Andreas Pitsch 66.

Bad Ems, Goethe-Gymnasium:

Kl. 11: Miriam Gerharz 96.

Bad Kreuznach, Gymnasium an der Stadtmauer

Kl. 10: Hien Le 62.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Gutzler):

Kl. 5: Niels Bauer 5, Laura Krause 22;

Kl. 6: Bastian Elzer 2, Paul Kruse 3, Sophie Loreen Kuß 1, Stefanie Saini 1,
Annalena Schimbold 3.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 11: Elisabeth Kluth 22;

Kl. 13: Frank Schindler 83.

Berlin, Katholische Theresienschule:

Kl. 6: Emma Weiß 22.

Bonn, Carl-von-Ossietzky-Gymnasium: Kl. 6: Lorenzo Conti 14.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:

Kl. 11: Jamico Schade 72.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:

Kl. 8: Iolanthe Köcher 135.

Dierdorf, Martin-Butzer-Gymnasium:

Kl. 6: Maren Remy 13.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

Kl. 5: Tim Reinhard 29;

Kl. 6: Annika Koch 47, Leonie Marton 4;

Kl. 10: Kevin Mours 88, Adriana Stenger 48, Marcel Wittmann 96;

Kl. 11: Tamara Fischer 20.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 8: Patrick Riebe 97.

Friedberg, Augustinerschule:

Kl. 5: Louisa Glaum 20, Clara Schwarz 20;

Kl. 6: Antonia Glaum 19, Tobias Jedich 57, Sara Schaubert 20.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze):

Kl. 3: Jacob Huck 5, Olivia Kern 5, Elizabeth Korzilius 5, Thies Koster 4, Lara Sachs 2;

Kl. 4: Fritz Albus 7, Ridh Choudhury 11, Merlin Kolrep 3, Ella Zwermann 30.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):

Kl. 5: Tobias Streichhardt 9;

Kl. 6: Burak Sadic 17;

Kl. 7: Melanie Schuy 69;

Kl. 8: David Storzer 158;

Kl. 9: Marvin Weisbener 59.

Holzwickede, Clara-Schumann-Gymnasium:

Kl. 9: Niklas Gerling 21.

Kassel, Engelsburg-Gymnasium: Kl. 6: Luc Wieners 14.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 5: Görkem Balci 2, Daria Hartwig 10, Zineb El Hhoual 8, Tabea Stamm 32, Giuliana Wustrack 7.

Kl. 6: Lukas Bonn 35, Nils Grandien 25, Nico Lick 8, Dennis Mayle 71.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:

Kl. 6: Beatrice Popescu 51;

Kl. 7: Philipp Kirschner 9.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):

Kl. 5: Lea Weißenfels 38;

Kl. 6: Paula Roderer 3, Ivan Savic 3;

Kl. 7: Valentina Jung 15, Linda Thelen 5, Katharina Weber 8;

Kl. 8: Jason Beck 2, Lincoln Bui 11, Marc Hoffmann 7, Elias Röscher 22, Sebastian Trapp 8;

Kl. 11: Theresa Schöche 70.

Mainz, Schlossgymnasium:

Kl. 11: Alisha Sänger 19.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:

Kl. 12: Bettina Diller 48.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):

Kl. 5: Marius Ahlfeld 19;

Kl. 6: Duy Kha Pham 6;

Kl. 7: Jannis Müller 22;

Kl. 8: Jonas Ahlfeld 128, Liana Bergen 11, Lena Christmann 20, Anja Wingender 53;

Kl. 9: Matthias Bergen 46, Denise Kadri 14, Jasmin Hallyburton 53, Verena Rüsing 67;

Kl. 10: Yentl Deuster 16, Philipp Lehmann 12;

Kl. 11: Stephan Bohr 23, Mirjam Bourgett 25, Daniel Fink 29, Alexander Göbel 30, Ella Hummel 53, Sandra Wingender 66;

Kl. 12: Ruwen Bergen 20, Janina Vogl 98;

Kl. 13: David Michel 55.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium: Kl. 12: Robert Kowallek 96.

Oberursel, Burgwiesenschule:

Kl. 3: Sina Schneider 3.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

Kl. 5: Sönke Schneider 38;

Kl. 6: Jonas Blumenroth 11, Jonas Glückmann 24, Eric Paikert 7;

Kl. 7: Jonas Emmerich 13, Maximilian Göbel 97, Tobias Heinze 58, Louis Jöbstl 12, Philipp Karn 53, Fabian Liepach 88, Jara Müller-Kästner 60, Helen Richter 55;

Kl. 10: Katharina Kiefer 43, Jiyune Whang 20;

Kl. 11: Heiko Kötzsche 93.

Ostfildern, Otto-Hahn-Gymnasium:

Kl. 7: Clara Deifel 58;

Regensburg, Albertus Magnus Gymnasium: Kl. 5: Johannes Plöbl 16.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner):

Kl. 6: Lukas Arends 3, Nele-Sophie Arenz 1, Johannes Bahne 1, Stella Batzella 4, Clara Hiller 1, Lara Jungheim 3, Nele Küter 3, Anna-Lisa Landsrath 22, Anna McBrien-Martin 3. Lukas Nießen 171, Franziska Schamel 2, Leona Scheibe 3, Alina Schmidt 3;

Kl. 11: Lars Horak 1;

Kl. 12: Simon Löhr 9.

St. Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:

Kl. 6: Anastasia Kaletchits 3;

Kl. 8: Alexander Rachev 1.

Schwalbach, Albert-Einstein-Schule: Kl. 7: Alexander Martin 18.

Siegburg, Anno-Gymnasium:

Kl. 6: Elisabeth Scholl 5.

Wiesbaden, Leibnizschule:

Kl. 8: Andreas Dernier 70;

Kl. 9: Elisa Dernier 47.

Wildeshausen, Gymnasium Wildeshausen:

Kl. 7: Lara Kalbach 6;

Kl. 8: Wiebke Schneider 9;

Kl. 9: Maximilian Grohe 19.

Lösungen zur Aufgabe von Seite 3

Aus der Spalte $14 + e + f + 16 = 74$ ergibt sich (1) $e + f = 44$. Aus der Zeile $20 + f + g + 15 = 74$ erhält man (2) $f + g = 39$.

Für eine der Diagonalen gilt: $a + e + g + 2a = 74$, sodass (3) $e + g = 74 - 3a$.

Schließlich erhält man für das kleine Quadrat: (4) $e + f + g + a + 1 = 74$.

Aus (4) folgt mit (1): $44 + g + a + 1 = 74$, also (5) $g + a = 29$

und mit (3) folgt: $e + 39 + a + 1 = 74$, also (6) $e + a = 34$.

Addiert man (5) und (6), so erhält man $e + g + 2a = 63$, woraus sich mit (3) $74 - 3a + 2a = 63$ ergibt. Daher ist $a = 11$. Also ist $c = 24$. Aus dem System der Gleichungen (1), (2), (3) folgt, dass $e = 23$, $f = 21$ und $g = 18$ ist. Damit berechnet man nacheinander $b = 25$, $i = 19$, $h = 17$ und $d = 26$. Das gesuchte magische Quadrat ist somit bestimmt.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)

Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe

Betreuung der Abonnements und Versand: Anita Pfeffer-Kohl

Inhalt

Zum Titelblatt	3
Aufgaben zum Neuen Jahr	3
Die Aufgabe für den Computer-Fan	4
H. Fuchs: Trugschlüsse und Paradoxien	6
L. Biroth: Eine verrückte Dreiecksflächenformel	6
H. Fuchs: Hättest Du es gewusst?	14
Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr	18
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 119	20
Neue Mathespielereien	23
Neue Aufgaben	25
Gelöste Aufgaben aus MONOID 119	27
Mathematische Entdeckungen	31
B. Diller: Chinesische Multiplikation	33
H. Fuchs: Eine Verwandte der Markow-Gleichung	34
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	35
F. Breiden: Bericht zur Mainzer Mathematik-Akademie 2014	36
M. Gruner: Wackeln mathema-Tisch	37
K. Mours: Bericht zur MONOID-Jahresfeier 2014	41
Die MONOID-Preisträger 2014	43
Rubrik der Löser und Löserinnen	44
Lösung zur Aufgabe von Seite 3	47
Redaktion	47
Impressum	48

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das folgende Konto zu überweisen:
IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18, BIC: MVBMD55, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>