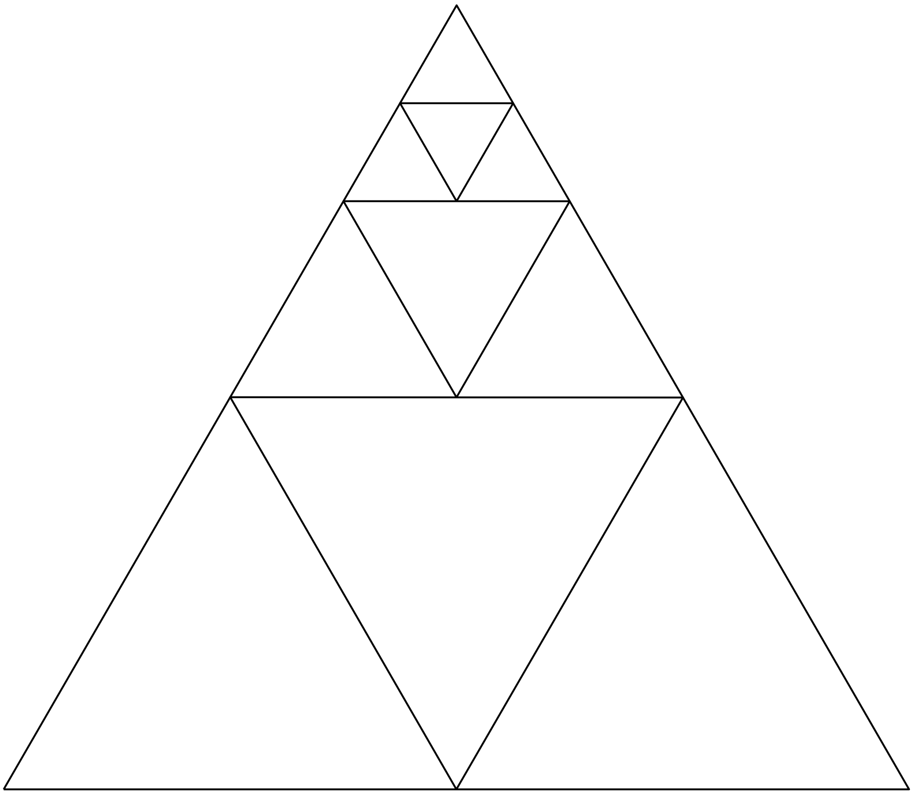
Jahrgang 35 | Heft 121 | März 2015

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins" hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.02.2014.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Bericht von der MMA: Unbeleuchtbare Räume

von Laura Biroth

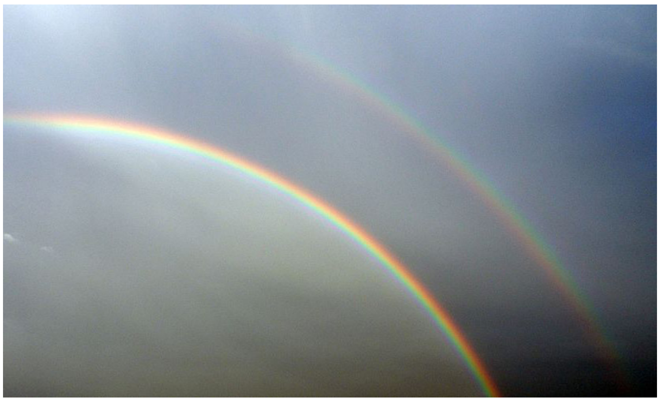
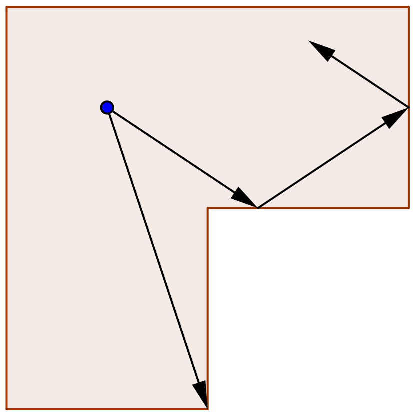


Abbildung 1: ©User: LeonadoWeiss / Wikimedia Commons / CC-BY-3.0

Abbildung 2: Ein ähnliches Muster entsteht auch, wenn man eine glänzende Kaffeetasse in die Sonne stellt.

Beim Kurs „Strahlengeometrie“ der Mainzer-Mathe-Akademie 2014 haben wir neben der Entstehung von Regenbögen und Mustern in Kaffeetassen auch über unbeleuchtbare Räume gesprochen.

Was ist das? Stell dir vor, du befindest dich in einem Raum, dessen Wände vollständig verspiegelt sind. An jeder glatten Fläche wird ein Lichtstrahl also nach dem Gesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ reflektiert, nur in den Ecken wird das Licht verschluckt.

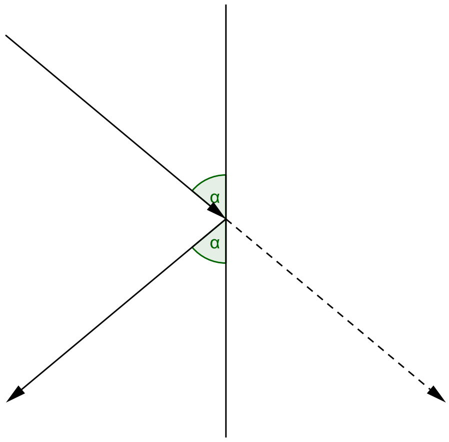


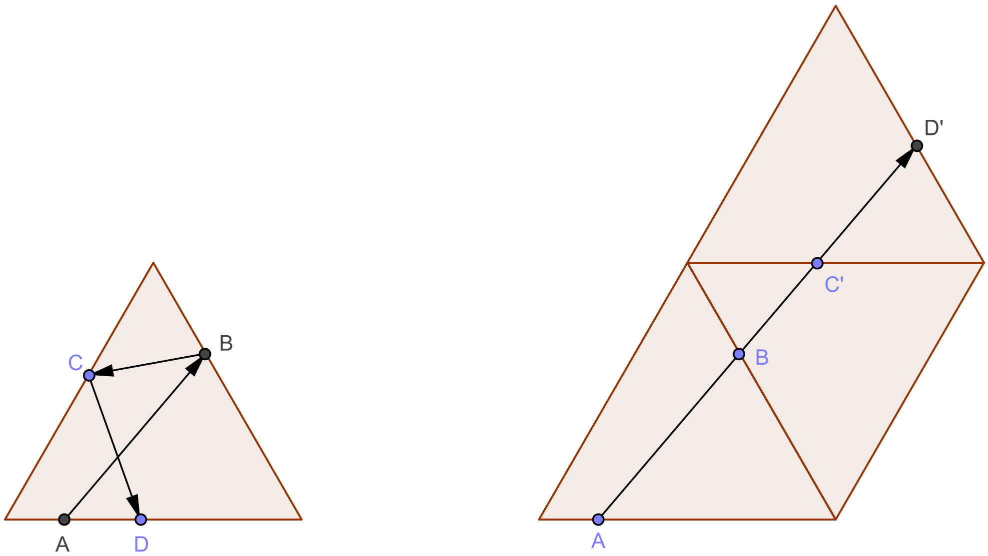
Wenn man jetzt eine Kerze an einem Punkte dieses Raumes anzündet, sollte ihr Licht doch eigentlich überall ankommen. Oder ist es möglich, den Grundriss des Raumes so zu wählen, dass es an gewissen Punkten oder ganzen Flächen dunkel bleibt?

Die Antwortet lautet „Ja“, und ist auch gar nicht so schwer zu beweisen.

Zunächst überlegen wir uns, wie wir Lichtstrahlen falten und entfalten können. Wenn ein Lichtstrahl auf einen Spiegel fällt, wird er nach dem Gesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ reflektiert. Spiegelt man den Weg, den der Lichtstrahl nach der Reflektion zurücklegt, an der Spiegelebene, so erhält man wieder eine Gerade. Diesen Vorgang nennen wir *entfalten*.

Wird ein Lichtstrahl mehrmals nacheinander an verschiedenen Wänden reflektiert, so kann man ihn genauso entfalten, indem man den Raum jedes mal, wenn der Lichtstrahl irgendwo reflektiert wird, an der entsprechenden Wand spiegelt. Wenn der Raum eine entsprechend einfache Form hat, wie z.B. ein Rechteck, ein gleichseitiges oder ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, klappt das auch ohne Überlappungen.





Umgekehrt kann man einen Lichtstrahl, der sich durch einen Raum bewegt, der aus mehreren gespiegelten Kopien einer solchen einfachen Form besteht, auch in die Ausgangsform *zusammenfalten*. Man erhält dann einen Lichtstrahl der an den Wänden korrekt reflektiert wird.

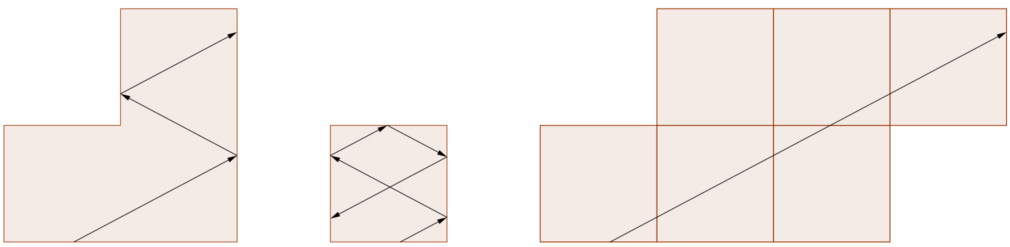
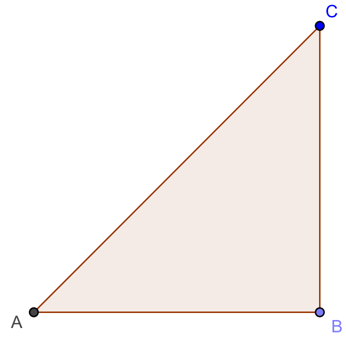


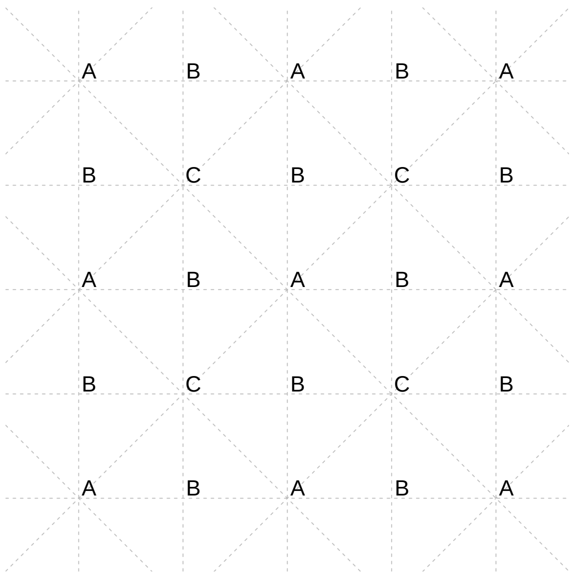
Abbildung 3: Faltet man den Lichtstahl im linken Raum komplett in das Ausgangsquadrat zusammen, erhält man die mittlere Grafik. Wenn du diesen Lichtstrahl vollständig entfaltest, bekommst du die Figur rechts.

Damit können wir folgendes zeigen:

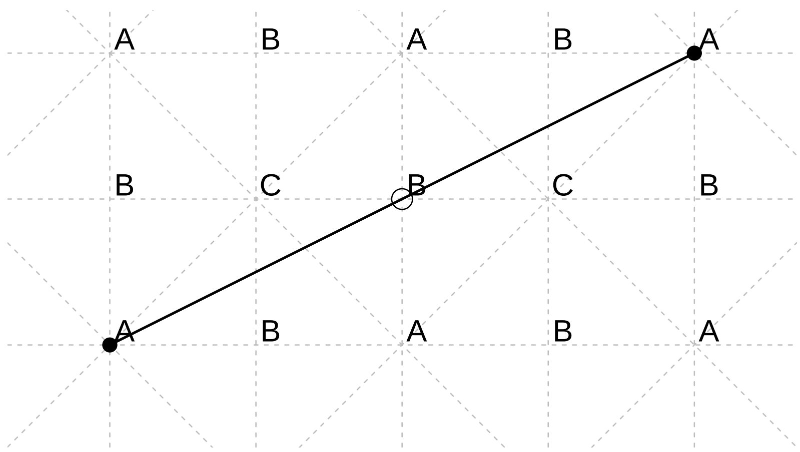


1. Ein Lichtstrahl, der in der Ecke A des nebenstehenden rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks startet, kann nie wieder in die Ecke A zurück gelangen.

Beweis: Wenn wir das Dreieck wie beim Entfalten in alle Richtungen spiegeln, erhalten wir folgendes Gitter:



Legt man das ursprüngliche Dreieck so in ein Koordinatensystem, dass der Punkt A im Ursprung liegt und die beiden Katheten jeweils die Länge 1 haben, so landen alle Kopien der Eckpunkte A, B und C auf Punkten mit ganzzahligen Koordinaten. A landet an den Punkten, deren x- und y-Koordinate gerade ist, C dort, wo beide Koordinaten ungerade sind und B an den Plätzen mit gemischten Koordinaten.



Wenn es so einen Lichtstrahl gäbe, könnten wir ihn also zu einer geraden Strecke in diesem Gitter entfalten, die im Punkt $A = (0, 0)$ beginnt, und in einer anderen Kopie von Punkt A endet. Die Koordinaten dieses Punktes sind dann $(2n, 2m)$ mit ganzen Zahlen n und m. Das heißt, auf der Strecke liegt noch mindestens ein anderer ganzzahliger Punkt, nämlich der mit den Koordinaten (n, m).
Also muss der ursprüngliche Lichtstrahl durch eine Ecke des Dreiecks gelaufen sein. In den Ecken wird der Lichtstrahl aber nicht reflektiert, sondern verschluckt! Das heißt, ein solcher Lichtstrahl kann unmöglich existieren.

Mit dieser Aussage kann man jetzt auch folgendes zeigen:

2. Das Licht einer Kerze, die im Punkt A_1 des auf Seite 6 abgebildeten eckigen Raumes steht, wird niemals den Punkt A_2 erreichen.

Beweis: Wir nehmen wieder an, wir hätten einen Lichtstrahl gefunden, der von Punkt A_1 aus startet und nach einer oder mehreren Reflektionen den Punkt A_2 erreicht. Der auf Seite 6 dargestellte Raum ist aus lauter gespiegelten Kopien des Dreiecks $A_1B_1C_1$ zusammengesetzt. Wir können den Lichtstrahl also so zusammenfalten, dass er sich komplett in diesem Dreieck befindet. Er beginnt und endet dann in Ecke A. Da alle B- und C-Punkte des Raumes in Ecken liegen, die das Licht nicht reflektieren, trifft auch der zusammengefaltete Strahl die Ecken nicht, wird also nicht verschluckt. Wir hätten jetzt also einen Lichtstrahl, der in der Ecke A_1 des rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks $A_1B_1C_1$ startet und nach einigen Reflektionen wieder in diese Ecke zurück kommt. Das kann es nach Aussage 1 aber nicht geben.

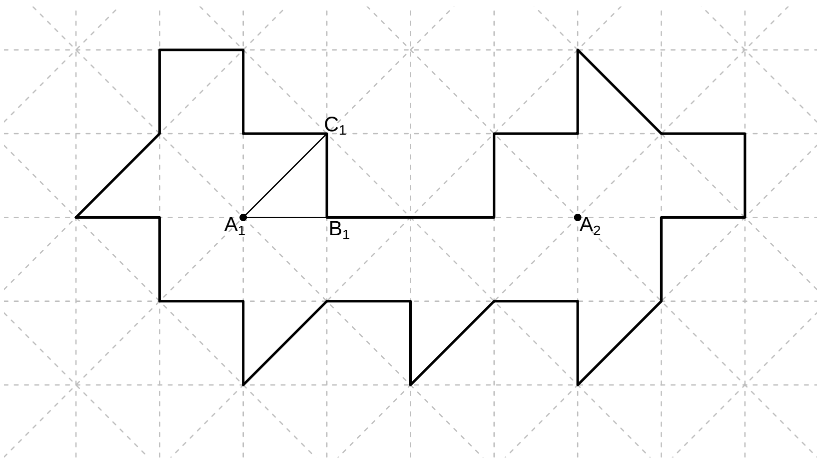


Abbildung 4: Dieser unbeleuchtbare polygonale unbeleuchtbare Raum miit 26 Wänden wurde 1995 von George W. Tobarski gefunden.

Wenn man mit gebogenen Wänden arbeitet, kann man nicht nur erreichen, dass einzelne Punkte des Raumes dunkel bleiben, wenn man die Lichtquelle an einer bestimmten Stelle platziert, sondern man kann sogar dafür sorgen, dass ganze

Gebiete des Raumes im Dunkeln liegen, und zwar egal, wo man die Lichtquelle aufstellt. Hier seht ihr einen solchen Raum, den Roger Penrose entwickelt hat.

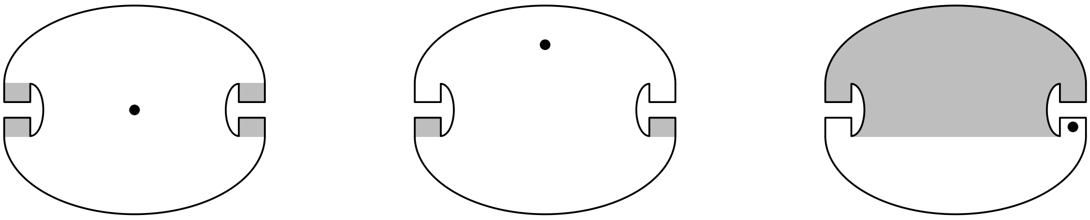


Abbildung 5: Abhängig davon, wo die Lampe (schwarzer Punkt) steht, liegen immer andere Teile des Raums im Schatten.

Aus den Archiven der Mathematik
Das Problem von J. Sylvester

von Hartwig Fuchs

Der englische Mathematiker James J. Sylvester (1814–1897), der bedeutende Beiträge insbesondere zur Algebra und Invariantentheorie leistete, veröffentlichte 1893 ein Problem, um dessen Lösung er sich offenbar vergeblich bemüht hatte.

(1) In der Ebene sei eine endliche Menge P von mindestens drei Punkten so gegeben, dass jede Gerade, die zwei Punkte aus P enthält, noch einen dritten Punkt aus P aufweist.
Dann liegen sämtliche Punkte aus P auf einer Geraden.

Das Sylvester-Problem widersetzte sich lange Jahre seiner Lösung und es geriet so in den Ruf, ein „schweres“ Problem zu sein. Tatsächlich war dann auch der erste Beweis für (1)*, den der Ungar Tibor Gallai (eigentlich T. Grünwald, 1912–1992) im Jahr 1933 gefunden hatte, auf verwickelten Wegen hergeleitet worden. Der dabei benötigte hohe mathematische Aufwand für ein doch recht elementar erscheinendes geometrisches Problem spornte die Mathematiker an, nach einfacheren Herleitungen zu suchen.
Das Besondere an Sylvesters Behauptung ist nun nicht nur, dass es für (1) tatsächlich einen ganz elementaren Beweis gibt – der Amerikaner Leroy M. Kelly (1914–2002) hat ihn 1948 entwickelt – sondern auch wie er mit Hilfe eines arithmetischen „Verbrechers“ und zweier „Schubladen“ geführt wird.

Der Beweis

($\bar{1}$) Annahme: Die Punkte der Menge P liegen **nicht** alle auf einer Geraden.

* Seither nennt man (1) auch den Satz von Sylvester-Gallai

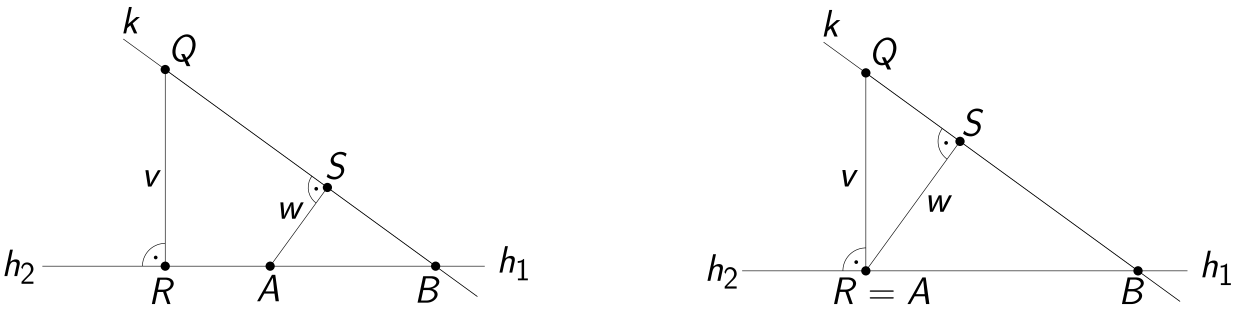
Es sei G die Menge der Geraden, von denen jede mindestens zwei Punkte aus P (und deshalb auch noch einen dritten Punkt aus P) enthält.

Mit $|A, g|$ sei dann der Abstand eines Punktes $A \in P$ von der Geraden $g \in G$ bezeichnet. Da P und somit auch G jeweils endliche Mengen sind, ist auch die Anzahl der Abstände $|A, g|$ endlich. Nun gilt der arithmetische Satz:

> In jeder nicht leeren endlichen Menge positiver reeller Zahlen gibt es ein kleinstes Element.

Daraus folgt: Unter den positiven reellen Abstandszahlen $|A, g|$ gibt es eine kleinste Zahl – sie sei v, der kleinste arithmetische „Verbrecher" genannt, denn mit v ist die Annahme $(\bar{1})$ widerlegbar, wie nun gezeigt werden soll.

Es sei $Q \in P$ ein Punkt, der von der Geraden $h \in G$ den Abstand $v \neq 0$ hat. Der Fußpunkt des Lotes von Q auf h sei R. Dann wird h von R in zwei jeweils mit R beginnende Halbgeraden h_1 und h_2 zerlegt. Nach Voraussetzung liegen drei Punkte aus P auf h und deshalb liegen zwei von ihnen – etwa A und B – nach dem Schubfachprinzip auf h_1 oder auf h_2. Wir wollen annehmen, sie liegen auf h_1, wobei sich A näher bei R befinde als B:



Die Gerade durch Q und B sei k; da sie zwei Punkte aus P enthält, ist k nach Voraussetzung eine Gerade aus G. Für den Abstand $|A, k|$ des Punktes A von der Geraden k, $|A, k| = |AS| = w$ gesetzt, gilt dann:

(2) $w < v$.

Die Dreiecke $\triangle QRB$ und $\triangle SAB$ sind ähnlich (sie stimmen in drei Winkeln überein) und es ist $|BA| < |BQ|$, denn im Dreieck $\triangle BQR$ ist BQ die längste Seite. Daraus folgt: $|AS| : |QR| = |BA| : |BQ| < 1$ und daher ist $w = |AS| < |QR| = v$.

Nach (2) ist also v nicht der kleinste Abstand – im Widerspruch zur Definition von v. Dieser vom kleinsten „Verbrecher" v erzeugte Widerspruch zeigt, dass die Annahme $(\bar{1})$ falsch sein muss – es gilt daher der Satz (1) von Sylvester-Gallai.

Umformulierung von (1)

Der Satz (1) von Sylvester-Gallai lässt sich so umformulieren:

(1′) Wenn die Punkte aus P nicht alle einer Geraden liegen, dann gibt es eine Gerade durch genau zwei Punkte aus P.

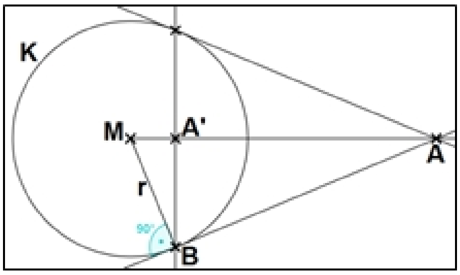
Da jetzt (1) nicht gilt, kann es auch nicht zutreffen, dass jede Gerade, die zwei Punkte aus P enthält, stets noch einen dritten Punkt aus P aufweist – was (1′) beweist.

Übertrag von geradlinigen in Kreisbewegungen
oder: Antrieb einer Lokomotive

von Hannah Schneider

Inversion am Kreis

Seien K ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{MB} = r$, dem sogenannten *Inversionsradius*, und A ein beliebiger Punkt in der Ebene. K wird als *Inversionskreis* bezeichnet. M bildet das sogenannte *Inversionszentrum*. Die *Inversionsabbildung* liefert zu jedem Urbild $A \neq M$ einen Bildpunkt A'. Der Punkt A' liegt dabei auf der Halbgeraden $\overline{MA}$ und erfüllt die folgende Bedingung: $\overline{MA'} \cdot \overline{MA} = r^2$.



Konstruktion

Um die Bildpunkte zu konstruieren müssen vier verschiedene Fälle betrachtet werden.

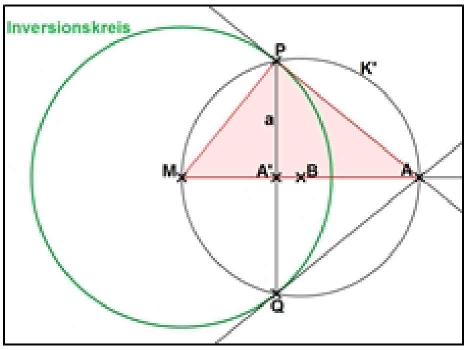
1. Fall: A liegt auf dem Inversionskreis.

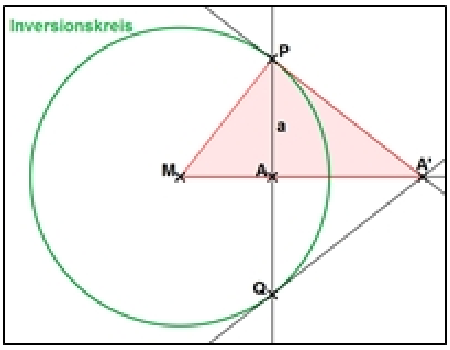
   Dies ist der einfachste Fall: Der Bildpunkt A' entspricht dem Urbild A, denn es gilt: $r^2 = \overline{MA}^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MA} = \overline{MA} \cdot \overline{MA'}$.

2. Fall: A liegt außerhalb des Inversionskreises.

   Konstruktionsanleitung:

   a) Halbiere die Strecke $\overline{MA}$ und nenne den Halbierungspunkt B.
   b) Zeichne den Kreis K' mit Mittelpunkt B und Radius $\overline{MB}$ (Thaleskreis).
   c) Bezeichne die Schnittpunkte des Inversionskreises mit K' mit P und Q.
   d) Verbinde A mit P beziehungsweise Q, dies sind die Tangenten an den Inversionskreis, die durch A verlaufen.
   e) Verbinde P und Q und nenne die entstandene Strecke a.
   f) Der Schnittpunkt der Strecke a mit dem Strahl $\overline{MA}$ ist der gesuchte Bildpunkt A'.





3. Fall: $A \neq M$ liegt innerhalb des Inversionskreises.

   Konstruktionsanleitung:

   a) Zeichne die Senkrechte zu $\overline{MA}$ durch A und nenne diese a.
   b) Bezeichne die Schnittpunkte des Inversionskreises K mit a mit P und Q.
   c) Zeichne die Tangenten an den Kreis K in den Punkten P und Q.
   d) Der Schnittpunkt der Tangenten mit dem Strahl $\overline{MA}$ ist der gesuchte Bildpunkt A'.

Dass die obigen Anleitungen des zweiten und dritten Falles die Bedingung $\overline{MA'} \cdot \overline{MA} = r^2$ der Inversion erfüllen, folgt direkt aus dem Kathetensatz. Durch Anwendung des Satzes folgt direkt: $r^2 = \overline{MP}^2 = \overline{MA'} \cdot \overline{MA}$.

4. Fall: Sobald wir jedoch versuchen die obige Konstruktionsleitung (siehe dritter Fall) anzuwenden, um den Bildpunkt des Inversionsmittelpunktes herauszufinden, stoßen wir auf ein Problem. Die in der Anleitung zu konstruierenden Tangenten besitzen keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Dieser Spezialfall muss also gesondert betrachtet werden. Damit die Inversionsabbildung eineindeutig wird, wird der „unendlich ferne Punkt“ ∞ der Euklidischen Ebene hinzugefügt. Dieser bildet den Bildpunkt des Inversionsmittelpunktes. Diese Vereinbarung ist sinnvoll, denn je näher das Urbild A am Inversionszentrum M liegt, desto weiter weg ist sein Bildpunkt A'.

Einige Eigenschaften der Inversion am Kreis

- Alle Punkte des Inversionskreises werden bei der Inversion auf sich selbst abgebildet. Das heißt, der Inversionskreis ist ein Fixpunktkreis (siehe erster Fall).

- Bei der Kreisspiegelung wird das Innere des Inverionskreises auf das Äußere abgebildet und umgekehrt. (Diese Eigenschaft folgt direkt aus dem oben dargestellten zweiten und dritten Fall der Konstruktionsbeschreibung.)

- Wenn A' die Inversion des Punktes A ist, so ist A die Inversion des Punktes A', das heißt, die Inversion I ist eine sogenannten *Involution*, es gilt also:

  $$I \circ I(A) = I(I(A)) = I(A') = A.$$

- Mit Hilfe der dynamischen Verschiebefunktion und der Spurfunktion des Programm Geogebra finden wir folgende Zusammenhänge über Urbilder und zugehörige Bilder unter der Inversion:

Urbild	Bild unter Inversion am Kreis
Kreis K, der durch das Inversionszentrum verläuft	Gerade g, die nicht durch das Inversionszentrum verläuft
Gerade g, die nicht durch das Inversionszentrum verläuft	Kreis K, der durch das Inversionszentrum verläuft
Kreis K, der nicht durch das Inversionszentrum verläuft	Kreis K', der nicht durch das Inversionszentrum verläuft
Gerade g, die durch das Inversionszentrum verläuft	Gerade g, die durch das Inversionszentrum verläuft

Exemplarisch wollen wir dies im Folgenden für den ersten Fall durchgehen. Teste dies selbstständig auch für die anderen drei Beobachtungen.

Anleitung:

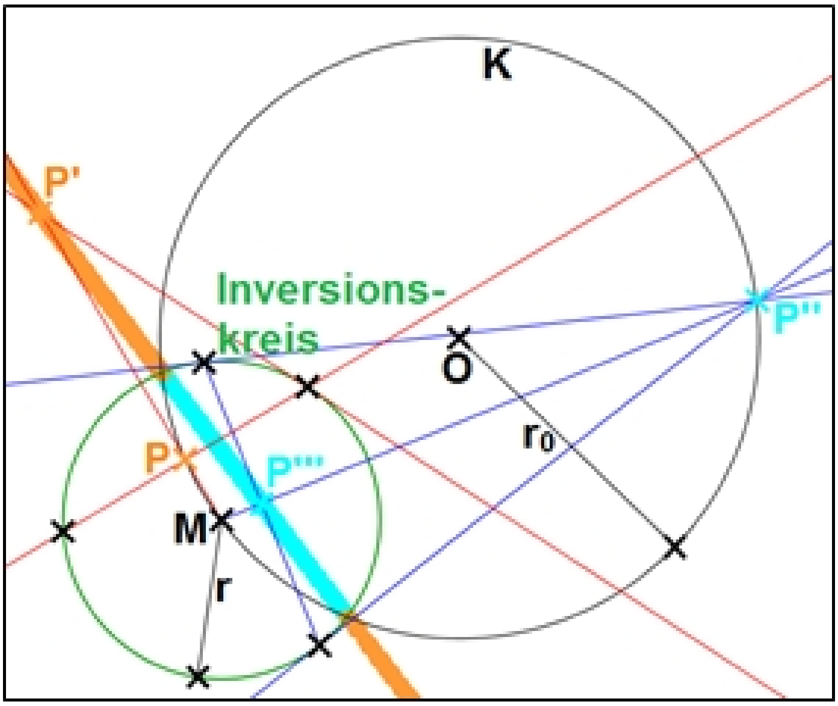
1. Zuerst wird der Inversionskreis mit Inversionszentrum M und beliebigem, aber festem Radius r gezeichnet.

2. Nun wird ein Kreis K durch M gezeichnet, mit Mittelpunkt O und Radius r_0.

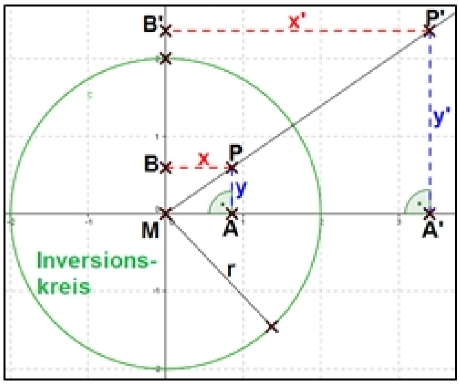
3. Daraufhin wird zu einem beliebigen Punkt P auf dem Kreis K seine Inversion P' konstruiert. Falls dieser Kreis den Inversionskreis schneidet, dann konstruiere zu einem weiteren Punkt $P'' \in K$ die Inversion P'''. Für P'' soll dabei Folgendes gelten: Dieser liegt innerhalb des Inversionkreises, falls P außerhalb gewählt wurde, und außerhalb, wenn P innerhalb des Inversionskreises liegt.

4. Nun wird die Spurfunktion für die Punkte P' und P''' eingeschaltet.

5. Wenn nun die Punkte P beziehungsweise P' auf dem Kreis K bewegt werden, so zeichnet die Spur der Punkte P' und P''' die Inversion des Kreises K. Diese stellt eine Gerade dar.



Die Inversion in kartesischen Koordinaten



Sei P ein beliebiger Punkt in der Ebene und P' seine Inversion. Nun wollen wir eine Darstellung für die x- beziehungsweise y-Koordinate des Bildpunktes P' herausfinden, die nur von den Koordinaten des Urbildpunktes P abhängen. Dazu betrachten wir nebenstehende Zeichnung.

Seien $\overline{MP} = d$ und $\overline{MP'} = d'$. Nach Definition der Inversion gilt:

$$r^2 = \overline{MP} \cdot \overline{MP'} = d \cdot d' \Leftrightarrow d' = \frac{r^2}{d}.$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt außerdem:

$$d^2 = x^2 + y^2, d'^2 = x'^2 + y'^2.$$

Nach dem zweiten Strahlensatz folgt nun:

$$\frac{x'}{x} = \frac{d'}{d} = \frac{\frac{r^2}{d}}{d} = \frac{r^2}{d^2}.$$

Aus $d^2 = x^2 + y^2$ folgt:

$$\frac{x'}{x} = \frac{r^2}{d^2} = \frac{r^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x' = x \cdot \frac{r^2}{x^2 + y^2}.$$

Analog ergibt sich:

$$x = x' \cdot \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}.$$

Eine analoge Rechnung gilt auch für die y-Koordinate des Bildpunktes P', das heißt, es gilt:

$$y = y' \cdot \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}.$$

Inversion einer gleichseitigen Hyperbel

Mit Hilfe der obigen Koordinatendarstellungen wollen wir nun das Bild und die Gleichung der Inversion einer gleichseitigen Hyperbel herausfinden. $x^2 - y^2 = a^2$ bildet die allgemeine gleichseitige Hyperbelgleichung. Der Koordinatenursprung bildet dabei das Inversionszentrum, der Radius des Inversionskreises soll $r = a$ betragen. Oben haben wir bereits herausgefunden, dass die folgende Beziehung zwischen den Urbild- und Bildpunkten einer Inversion besteht:

$$x = x' \cdot \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}$$
$$y = y' \cdot \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}$$

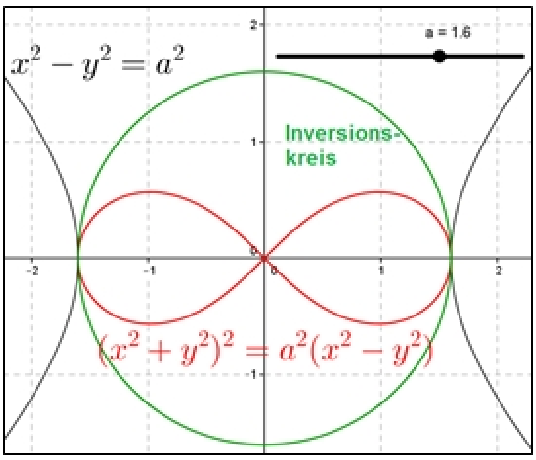
Daher gilt:

$$x^2 - y^2 = a^2 \Leftrightarrow \left(x' \cdot \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}\right)^2 - \left(y' \cdot \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}\right)^2 = a^2$$
$$\Leftrightarrow x'^2 \cdot a^4 - y'^2 \cdot a^4 = a^2 \cdot (x'^2 + y'^2)^2 \Leftrightarrow a^2 \cdot (x'^2 - y'^2) = (x'^2 + y'^2).$$

Die Inversion der gleichseitigen Hyperbel erfüllt daher die folgende Gleichung:

$$a^2 \cdot (x'^2 - y'^2) = (x'^2 + y'^2).$$

Die graphische Darstellung sieht folgendermaßen aus:

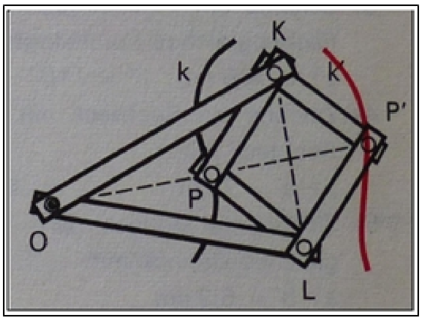


Anwendung

Der Inversor von Peaucellier ist eine Zeichenmaschine, die nach dem Franzosen Charles-Nicolas Peaucellier benannt wurde. Für die Länge ihrer Gelenke gilt:

$$\overline{OK} = \overline{OL} \text{ und } \overline{PK} = \overline{PL} = \overline{P'K} = \overline{P'L}.$$

Diese Maschine, die im Jahr 1984 erfunden wurde, überführt eine Kreisbewegung in eine geradlinige Bewegung.

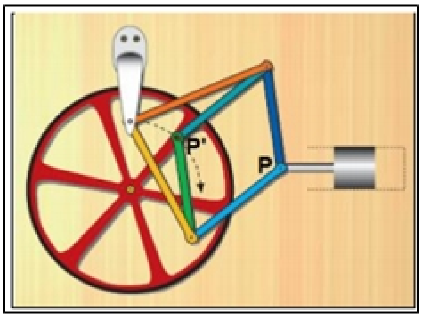


Und nun bist Du gefragt: Mit Hilfe der Inversion am Kreis kannst Du bestimmt die folgende Aufgabe zum Inversor von Peaucellier lösen:

a) Zeige, dass $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine bestimmte feste Zahl darstellt und somit O der Mittelpunkt eines Inversionskreises ist.

b) Wie sieht die Spur des Bildpunktes P' unter der Bewegung des Punktes P aus?

c) Diese Abbildung wird beim Bau von Dampfmaschinen unter anderem in der Eisenbahntechnik angewandt. Kannst Du Dir vorstellen warum? Betrachte dazu die folgende Abbildung.



Lösung des Problems

a) Setze $a^2 = \overline{OL}^2 - \overline{P'L}^2$. Eine Rechnung zeigt $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = a$. Der Punkt O bildet also den Mittelpunkt des Inversionskreises mit Inversionsradius:

$$r = \sqrt{\overline{OL}^2 - \overline{P'L}^2} = \sqrt{a}.$$

b) Wenn P einen Kreis durchläuft, der durch das Inversionszentrum O geht, ist die Spur des Bildpunktes P' eine Gerade, die nicht durch O verläuft.

c) Der Inversor von Peaucellier ist ein Koppelgetriebe, das eine Kreisbewegung in eine Geradenbewegung überführt und umgekehrt. Das Prinzip des Invesors wird zur Kraftübertragung in der Eisenbahntechnik benutzt. Der Kolben in der obigen Abbildung bewegt sich geradlinig und bewegt somit auch den Punkt P auf einer geraden Linie. Aufgrund der bisherigen Ergebnisse bewegt sich die Inversion P' des Punktes P auf einem Kreis, dreht also das Rad der Lokomotive.

Mitteilung

MATHE im Advent URKUNDE

Herzlichen Glückwunsch!

MONOID – Mathematikblatt
für Mitdenkerinnen und Mitdenker

hat den 1. Platz des Aufgabenwettbewerbs
„Mathe im Advent 2014“ belegt. Die Aufgabe

„Mandelliebe 3.0“

wurde zur beliebtesten eingereichten Aufgabe der
Klassenstufen 7 bis 9 gewählt.

MATHE im Advent 2014

Im Namen des gesamten
„Mathe im Advent“-Teams gratuliert

J. Kramer

Professor Dr. Jürg Kramer
Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Eine Initiative des Bundesministeriums für Bildung und Forschung
Wissenschaftsjahr 2014
DIE DIGITALE GESELLSCHAFT

„Alle Jahre wieder...“ bietet die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) mathematische Adventskalender im Internet an. Jeden Tag vom 1. bis 24. Dezember können mathematikinteressierte Schüler eine Tür des Kalenders öffnen und eine interessante Knobelaufgaben lösen. Wie jedes Jahr haben wir von der Monoid-Redaktion auch 2014 Aufgaben für den Kalender eingereicht und wie schon im letzten Jahr wurde eine dieser Aufgaben von den Lösern zur beliebtesten Aufgabe der Klassenstufen 7–9 gewählt. Über diese Auszeichnung freuen wir uns sehr und

bedanken uns bei allen, die sich bei der Wahl beteiligt haben. Wir werden auch dieses Jahr wieder Vorschläge einreichen.
Die ausgewählte Aufgabe lautet:

Mandelliebe 3.0

Wichtel Frodo hat von seinem Freund Holgar als Überraschung eine kleine Tüte gebrannte Mandeln geschenkt bekommen. Er hat sich fest vorgenommen, diesmal nicht alle auf einmal zu essen. Als Ziel setzt er sich: „Ich esse jeden Tag maximal die Hälfte!"
Das schafft er aber nicht ganz: Am ersten Tag isst er die Hälfte und noch eine Mandel. Am zweiten isst er von den noch vorhandenen Mandeln wieder die Hälfte und noch zwei weitere. Schließlich isst er am dritten Tag von den noch übrigen Mandeln ebenfalls die Hälfte und noch drei Mandeln. Danach sind noch fünf Mandeln in der Tüte.

Wie viele Mandeln waren es ursprünglich?

Die Lösung und weitere Aufgaben zum Thema Advent findest Du im Internet auf:
www.mathe-im-advent.de/Kalender/AufgabeLoesen/7-9/18

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Würfelschlange

Wir beschreiben zunächst die Erzeugung der Schlange und anschließend welche Aktionen zu einer Überraschung führen können.
Würfelschlange erzeugen: Aus N idealen Würfel W_1, W_2 ,..., W_N mit $N \geq 7$, die jeweils Zufallszahlen Z_1, Z_2 , ..., Z_N zwischen 1 und 6 zeigen, wird eine Schlange gebildet: $Z_1\,Z_2$ ... Z_N. Das weitere Vorgehen (Durchlauf) wird an Hand der Skizze einer 50er-Würfelschlange demonstriert. Dabei gibt die Zeile A die Würfelnummern (zwischen 1 und $N = 50$) an, die Zeile B gibt die Zufallszahl (zwischen 1 und 6) des entsprechenden Würfels an und die Zeile C kennzeichnet die betroffenen Würfel mit $*$.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
B	5	3	4	1	1	2	3	4	6	1	6	1	2	5	3	2	4
C	$*$					$*$		$*$				$*$	$*$		$*$		
A	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
B	5	3	5	5	3	4	1	3	2	6	1	6	6	3	5	2	1
C	$*$					$*$				$*$						$*$	
A	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
B	4	4	2	5	3	2	4	1	5	3	1	2	5	6	4	3	
C	$*$				$*$			$*$	$*$					$*$			

Vom ersten Würfel W_1 mit der Zahl $Z_1 = 5$ aus geht man 5 Schritte weiter zum Würfel W_6, der $Z_6 = 2$ zeigt. Von diesem aus nun 2 Schritte weiter zu W_8 mit $Z_8 = 4$, dann zu W_{12} mit $Z_{12} = 1$ und so fort. Man gelangt zu W_{48} mit $Z_{48} = 6$, was nicht mehr ausgeführt werden kann. Nun werden W_{49} und W_{50} weggelegt, sodass 48 Würfel in der Schlange bleiben.
Aktion (ein mathematischer Zaubertrick): Nun wird der erste Würfel zufallsmäßig verändert (zum Beispiel nochmals mit ihm gewürfelt). Würde er nun eine 1 zeigen, so käme man erneut am letzten Platz, auf W_{48} an. Dies ist bei 2, 3, 4 und 6 auch so; der Durchlauf geht also immer auf! Surprise! Wirklich immer? Dies soll von Dir nun mit einem Programm, welches diese Situation simuliert, getestet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Überraschung der Aktion bei $N = 70$ Würfeln gelingt?

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2015 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden. *Ein Struktogramm ist nicht erforderlich;* dafür sollten die wichtigsten Programmschritte im Sourcecode mit Kommentaren dokumentiert sein. Die verbale Darstellung des Ergebnisses als Antwort auf die Aufgabenstellung kann in einer PDF- oder ODT-Datei erfolgen.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 119

Symmetrische Summen

Zu einer mehrstelligen Zahl wird diese Zahl, aber mit umgekehrter Ziffernfolge addiert. Mit der sich ergebenden Summenzahl wird dasselbe sooft gemacht, bis die Summe ein Zahlenpalindrom ist, also eine Zahl, die von links und rechts gelesen gleich ist. Startet man zum Beispiel mit 89, so addiert man im ersten Schritt 98 und erhält 187; hierzu wird 781 addiert und so weiter.
Nach wie vielen Additionen erhält man gegebenenfalls eine symmetrische Summe (Palindrom) und wie lautet diese? (WG)

Ergebnisse

Kevin Mours vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal hat die Aufgabe korrekt gelöst. Er kommt mit 24 Additionen zur symmetrischen Summe (=Zahlenpalindrom) 8813200023188. Bei seinem Programm kann man außerdem beliebige Startzahlen eingeben, was es dem Benutzer ermöglicht, seine Vermutungen über andere Startzahlen als 89 zu testen.
Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey hat mit seinem Programm alle zweistelligen Startzahlen untersucht. Dabei ist ihm aufgefallen,

dass fast immer höchstens sechs Additionen bis zu einer symmetrischen Summe notwendig sind; die 89 mit 24 Additionen stellt also in diesem Sinne eine Ausnahme dar. Außerdem zeigen seine Ergebnislisten, dass stets Zahlenpaare auftreten, die mit gleich vielen Additionen zum selben Palindrom führen. Diese Tatsache hat er auch theoretisch bewiesen. In Bezug auf die Zahl 89 aus der Aufgabe heißt dies, dass auch 98 dieselbe Eigenschaft besitzt.
Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal geht noch einen großen Schritt weiter. Er untersucht alle Startzahlen zwischen 1 und 1000 und erstellt mit seinem Programm eine Statistik, in der die Anzahl der Additionen und das erreichte Palindrom aufgeführt werden: Dabei stellt sich heraus, dass die Startzahlen 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986 selbst bei 1000 Additonen nicht zu einem Palindrom führen. Für die kleinste dieser Zahlen, nämlich 196, probiert er sogar 10 000 Schritte aus, ohne zu einem Ergebnis zu kommen. Ich selbst habe mit derselben Zahl 2000 Additionen durchgeführt und bin dabei zu 450-stelligen Zahlensummen gekommen, die aber eben kein Palindrom waren. Marcels Vermutung, dass sich bei diesen Zahlen vielleicht nie ein Palindrom ergibt, stellt den Stand der Wissenschaft dar, nämlich in dem Sinne, dass es nach dem Kenntnisstand des Autors bis heute keine Antwort gibt, weder im positiven noch im negativen Sinne, ob mit einer solchen Startzahl je eine Ende erreicht werden wird. Es ist also eine bis heute noch „nicht geknackte Nuß“. Ein möglicher Ansatz, um diesem Problem beizukommen, ist Marcels Versuch, eine Näherungsformel für obige Zahlen unter Verwendung von Logarithmen zu finden, ganz ähnlich wie man es von der Primzahlverteilung kennt. Dazu verwendet er eine aufwendige graphische Darstellung seiner Ergebnisse. Letztere Methoden und Vermutungen harren allerdings noch einer weiteren Erforschung.

Was uns so über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

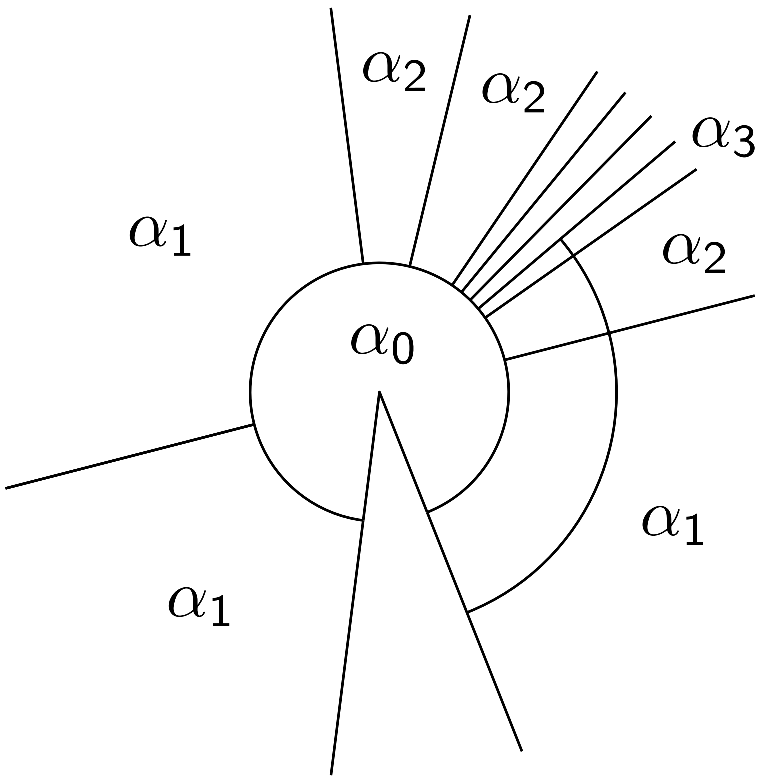
Seit der klassischen griechischen Mathematik schwelte in der Geometrie ein ungelöstes Problem:

(1) Kann man einen beliebigen Winkel konstruktiv – und zwar allein mit Zirkel und Lineal – in drei gleich große Teilwinkel zerlegen?

In der Liste der Geometer, die vergeblich nach einer Antwort auf diese Frage suchten, finden sich viele berühmte Namen – etwa Archimedes, Dürer, Newton, Gauß, ... Sie alle mussten erfolglos bleiben, denn wie der französische Mathematiker Pierre L. Wantzel 1837 bewies, ist die Dreiteilungsaufgabe (1) nicht lösbar.
Daher bemühen sich Mathematiker schon lange, wenigstens Näherungslösungen für dieses Problem zu finden.

Eine solche Näherungskonstruktion ist uns kürzlich über den Weg gelaufen.

Ausgehend von einem gegebenen Winkel α_0 konstruiert man nacheinander die Winkel $\alpha_1 = \frac{1}{4}\alpha_0$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}\alpha_1 = \frac{1}{4^2}\alpha_0$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}\alpha_2 = \frac{1}{4^3}\alpha_0$ und so weiter.



(Skizze unmaßstäblich)

So wie in der Figur setzt man dann endlich viele Winkel der Folge α_1, α_2, α_3, ... zu einem Winkel $\alpha(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n$ zusammen.
Dann ist $\alpha(n)$ eine Näherung für den Winkel $\frac{1}{3}\alpha_0$.

Nachweis: Zunächst erhält man aus der Formel $1 - a^{n+1} = (1-a)(1 + a + a^2 + ... + a^n)$ die Gleichung

(2) $a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - 1 = a \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$.

Wegen $\alpha_1 = \frac{1}{4}\alpha_0$, $\alpha_2 = \frac{1}{4^2}\alpha_0$, ..., $\alpha_n = \frac{1}{4^n}\alpha_0$ und $\alpha(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ ergibt sich aus (2) für $a = \frac{1}{4}$:

(3) $\alpha(n) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n})\alpha_0 = (\frac{1}{4} \cdot \frac{1-\frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}})\alpha_0 = (1 - \frac{1}{4^n})\frac{\alpha_0}{3}$.

(3) zeigt, dass die Konstruktion der Winkel $\alpha(n)$, $n \geq 1$, zu beliebig guten Näherungen für den Winkel $\frac{\alpha_0}{3}$ führt:
Wählt man nämlich n hinreichend groß, dann hat $\frac{1}{4^n}$ einen Wert nahe bei 0 und $1 - \frac{1}{4^n}$ nahe bei 1.
Beispiel: Für $n = 10$ ist $\alpha(10) = 0{,}999999 \cdot \frac{\alpha_0}{3}$.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 120

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Heftnummer

Stelle die Heftnummer 120 dar...

a) als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen,

b) als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden geraden Zahlen,

c) als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden ungeraden Zahlen,

d) als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden Dreieckszahlen,

e) als Summe von möglichst vielen aufeinander folgenden Primzahlen,

f) als Produkt von möglichst vielen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen.

Bemerkung: Es genügt hier, die Darstellungen anzugeben. Eine Begründung, dass es keine Darstellungen mit mehr Summanden oder Faktoren gibt, wird nicht verlangt. (MG)

Lösung:

a) $120 = 1 + 2 + 3 + ... + 13 + 14 + 15$,

b) $120 = 8 + 10 + 12 + ... + 22$

c) $120 = 3 + 5 + 7 + ... + 21$,

d) $120 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36$,

e) $120 = 23 + 29 + 31 + 37$,

f) $120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$,

II. Glaspfand

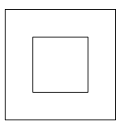
Bei Familie Schaller haben sich viele Joghurtgläser mit einem Pfandwert von je 30 Cent angesammelt. Frau Schaller schickt ihren Sohn Timo deshalb ohne Geld zum Einkaufen von drei Gläsern Joghurt. Wie viele Pfandgläser muss Timo mitnehmen, wenn ein Glas Joghurt ohne Pfand 90 Cent kostet? (WJB)

Lösung:

Der Einkauf kostet (in Cent) einschließlich Pfand für die drei vollen Gläser $3 \cdot 90 + 3 \cdot 30 = 360$. Dafür braucht er $\frac{360}{30} = 12$ leere Gläser.

III. Fläche zwischen äußerem und innerem Quadrat

Wie in der nebenstehenden Skizze seien zwei Quadrate angeordnet. Dabei haben die Seiten des inneren Quadrates einen Abstand von 1cm zu denen des äußeren Quadrates. Die Fläche zwischen den beiden Quadraten ist 20cm^2. Wie lang sind die Kanten des inneren Quadrates? (WG)



Lösung:
Die Kantenlänge (in cm) des äußeren Quadrates sei a, dann gilt für die Kantenlänge i (in cm) des inneren Quadrates: $i = a - 2$. Daher ist die Zwischenfläche (in cm^2) $a^2 - i^2 = a^2 - (a-2)^2 = 20$, also $a^2 - a^2 + 4a - 4 = 20$ und daher $a = 6$ und $i = 6 - 2 = 4$. Die Kantenlänge des inneren Quadrates beträgt also 4cm.

IV. Hausnummern

Janina fährt mit ihrem Fahrrad durch die Weierstraße in Hausdorf, in der die Hausnummern nach der üblichen Orientierungsnummerierung vergeben sind.*

a) Sie passiert zu ihrer Rechten die Häuser mit den Nummern 8 bis 18. – Wieviele Häuser sind das auf der rechten Straßenseite?
b) Janina hat als Wegbeschreibung von ihrer Freundin bekommen: „Nach dem Haus mit der Nummer 18 kreuzt der Bolzanoweg, danach im dritten Haus auf der rechten Seite wohne ich.“ – Welche Hausnummer hat dieses Haus?
c) Da Janina etwas zu früh ist, fährt sie mit ihrem Fahrrad die Weierstraße hin und zurück. Sie zählt insgesamt 18 Häuser auf der linken und 19 Häuser auf der rechten Seite. – Welche ist die größte Hausnummer in der Weierstraße? (MG)

Lösung:

a) Da auf der rechten Straßenseite die Häuser mit gerader Hausnummer stehen, sind es $(18 - 8) : 2 + 1 = 6$ Häuser.
b) Das Haus hat, wegen $18 + 3 \cdot 2 = 24$, die Hausnummer 24.
c) Die 18 Häuser auf der linken Seite haben die ungeraden Nummern 1 bis 35, die 19 Häuser auf der rechten Seite die geraden Nummern 2 bis 38. Daher ist die größte Hausnummer die 38.

V. Farbige Socken

Andrea hat in einer Schublade je 15 Paar Socken in vier verschiedenen Farben. Dabei liegen alle 30 Socken einzeln in der Schublade. Sie holt davon im Dunkeln rein zufällig n Socken heraus. Wie groß muss n mindestens sein, wenn sie sicher sein will, dass

a) sie mindestens drei Paar in der gleichen Farbe herausgezogen hat?
b) sie von zwei verschiedenen Farben je drei Paar Socken hat?
c) sie von jeder Farbe drei Paar hat? (WJB)

Lösung:

a) Zieht sie 20 Socken, so könnten dies fünf von jeder Farbe sein. Dies reicht also nicht, eine Socke mehr erzwingt aber, dass mindestens eine Farbe mindestens

* Es gibt hier auch keine „Doppel-Hausnummern“ wie „Weierstraße 2–4“ oder Buchstabenzusätze, wie 9a.

sechs Mal vertreten ist.

b) Hier könnte schlimmstenfalls beim Ziehen von $30 + 3 \cdot 5$ Socken eine Farbe 30 mal vertreten sein, die anderen je fünf Mal, das heißt $30 + 3 \cdot 5 = 45$ reicht noch nicht, aber 46 ist genug.

c) Der schlimmste Fall ist jetzt $3 \cdot 30 + 5 = 95$, 96 ist also erforderlich.

VI. Primzahlen als Primzahlsumme

Ist es für jede Primzahl, für manche Primzahlen oder für keine Primzahl möglich, sie als Summe zweier anderer Primzahlen zu schreiben? (WJB)

Lösung:

Es ist für manche Primzahlen möglich, zum Beispiel $5 = 3 + 2$, $7 = 5 + 2$, ..., $43 = 41 + 2$, ..., jedoch nicht für alle, da zum Beispiel 2 nicht als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist, da sie die kleinste Primzahl ist.

(Jonas Ahlfeld, Klasse 9, Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium)

Bemerkung: Alle Primzahlen außer der 2 sind ungerade. Ist eine ungerade (Prim-)Zahl Summe zweier ganzer Zahlen, so ist eine davon gerade und die andere ungerade. Eine Primzahl lässt sich also nur dann als Summe von zwei Primzahlen schreiben, wenn eine davon gleich 2 ist. Dies ist für manche Primzahlen möglich (siehe oben). Aber nicht für alle, denn außer 2 ist dies auch für beispielsweise $11 = 9 + 2$ nicht möglich, da 9 keine Primzahl ist. Die Primzahlen, für die eine solche Summendarstellung möglich ist, sind also genau die jeweils größeren Zahlen von Primzahlzwillingen. Wie viele Primzahlzwillinge es gibt, endlich viele oder unendlich viele, ist bis heute ein offenes mathematisches Problem. (MG)

VII. BA, BABA, BAABAA

In einer simplen Sprache werden Wörter nur aus den Buchstaben A und B nach den folgenden Regeln gebildet:

1. A ist ein Wort.
2. Ist W ein Wort, dann ist WB ein Wort.
3. Ist W ein Wort, dann ist WW ein Wort.
4. Kommt in einem Wort W die Buchstabenfolge AAA vor, dann ergibt sich ein Wort W', wenn man in W die Sequenz AAA durch B ersetzt.
5. Aus einem Wort W, das die Sequenz BBB enthält, ergibt sich durch Weglassen von BBB ein Wort W'.

Gibt es in dieser Sprache die in der Überschrift genannten Wörter? (H.F.)

Lösung:

Für den Satz „W ist ein Wort“ schreiben wir (W). Ergibt sich aus einem Wort W mit der Regel x das Wort W', so stellen wir das durch $(W) \xrightarrow{x} (W')$ dar.

a) $A \xrightarrow{1} (A) \xrightarrow{3} (AA) \xrightarrow{3} (AAAA) \xrightarrow{4} (BA)$; also ist BA ein Wort.

b) $(BA) \xrightarrow{3} (BABA)$; also ist $BABA$ ein Wort.

c) $(BA) \xrightarrow{2} (BAB) \xrightarrow{2} (BABB) \xrightarrow{3} (BABBBABB) \xrightarrow{5} (BAABB) \xrightarrow{2} (BAABBB) \xrightarrow{5} (BAA) \xrightarrow{3} (BAABAA)$; also ist $BAABAA$ ein Wort.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Alter gesucht

Bettina Müller ist die Mutter von vier Kindern. Multipliziert man Frau Müllers Alter mit jedem der Alter ihrer Kinder, so ergibt sich 20150.

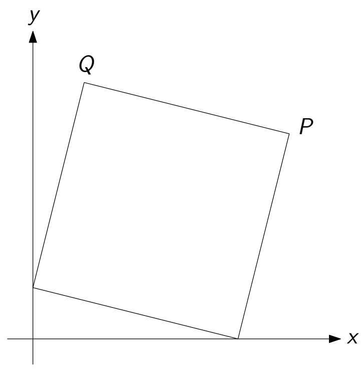
Patrizia Sailer hat zwei Söhne. Multipliziert man Frau Sailers Alter mit jedem der Alter ihrer Kinder, so ergibt sich 20140.

Kurioserweise haben sowohl Frau Müllers als auch Frau Sailers ältestes Kind heute Geburtstag.

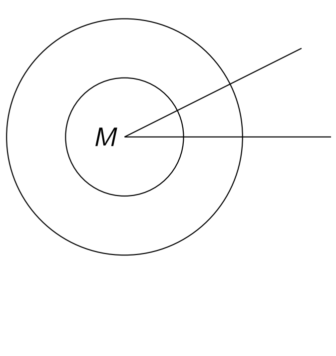
Wie alt waren Frau Müller und Frau Sailer jeweils bei der Geburt ihres ersten Kindes? (WJB)

II. Gekipptes Quadrat

Ein Quadrat in einem Koordinatensystem mit unbekannter Kantenlänge sei so gekippt, dass sein rechter unterer Eckpunkt auf der x-Achse ist und der obere linke die Koordinaten $(19|99)$ besitzt. Wie lauten die Koordinaten des rechten oberen Eckpunktes P? (WG)



III. Konstruktion mit eingeschränkten Mitteln



Gegeben seien zwei konzentrische Kreise in der Ebene mit dem gemeinsamen Mittelpunkt M sowie ein Winkel mit dem Scheitel in M. Konstruiere allein mit einem Lineal die Winkelhalbierende des Winkels. (HF)

IV. Zahlen-Knobelei

$$\begin{array}{cccccccc}
A & B & C & D & \cdot & A & B & C & D \\
\hline
 & & & & * & * & * & * & * \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & * & * & * & * & & \\
 & & * & * & * & * & & & \\
\hline
 & * & 0 & 0 & * & 0 & * & * & *
\end{array}$$

Die nebenstehende Figur beschreibt eine Multiplikation, von der nur die in der Rechnung vorkommenden Ziffern 0 angegeben sind. Man weiß noch: *CD* ist eine Quadratzahl. Wie heißt die *ABCD* entsprechende Zahl? (HF)

V. Alles in Butter

Vollmilch enthält 3,5 % Fett. In der Molkerei wird daraus Magermilch mit 1,5 % Fett und Butter (80 % Fett) hergestellt.
Wie viele Liter Vollmilch werden benötigt, um ein Stück Butter (250 ml) herzustellen?

a) Mache zunächst eine Überschlagsrechnung.

b) Rechne (erst) dann genau. (Valentin Blomer)

VI. Das tapfere Schneiderlein

...holte das Brot aus dem Schrank, schnitt sich ein Stück über den ganzen Laib und strich das Mus darüber ...er legte das Brot neben sich, nähte weiter ...Indes stieg der Geruch von dem süßen Mus hinauf an die Wand, wo die Fliegen in großer Menge saßen, so dass sie ...sich scharenweise darauf niederließen. „Ei, wer hat euch eingeladen?“ sprach das Schneiderlein ...Die Fliegen aber, die kein Deutsch verstanden, ..., kamen in immer größerer Gesellschaft wieder. Da ...langte ...nach einem Tuchlappen und „Wart, ich will es euch geben!“ schlug es unbarmherzig drauf.

Nimm an, die Brotscheibe war kreisförmig und der Tuchlappen hatte die Form eines Viertelkreises mit gleichem Radius. Nimm weiterhin an, dass sich 25 Fliegen auf das Brot setzten. Zeige: Ganz egal, wie sich die Fliegen auf dem Brot verteilten, hatte das tapfere Schneiderlein immer die Möglichkeit, wie im Märchen der Brüder Grimm (mindestens) „Siebene auf einen Streich“ mit seinem Tuchlappen zu erwischen. (WJB)

VII. Quadratzahlen gesucht

Eine vierziffrige Zahl habe die Form *xyxy* mit den Ziffern x und y, $x \neq 0$.
Wie viele Quadratzahlen dieser Form gibt es? (H.F.)
Hinweis: 101 ist eine Primzahl.

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

Aufgabe 1120: Summe gleich Produkt gleich Quotient?
Gibt es Zahlen x und y, deren Summe gleich ihrem Produkt und auch gleich dem Quotienten $\frac{x}{y}$ ist? (WJB)

Aufgabe 1121: Zwei Vögel und ein Wurm
Ein 10 Meter hoher Baum und ein 14 Meter hoher Baum stehen 16 Meter voneinander entfernt. Auf beiden Bäumen sitzt jeweils ein Vogel am höchsten Punkt. Gleichzeitig bemerken sie auf der Straße zwischen diesen Bäumen einen Wurm und stürzen sich mit gleicher Geschwindigkeit auf ihn. Sie erreichen ihn zum selben Zeitpunkt.
Berechne die Entfernung des Wurmes von beiden Bäumen! (WG)

Aufgabe 1122: Wasserrohr
Durch ein Wasserrohr mit kreisförmigem Querschnitt mit Radius R fließt Wasser mit einer konstanten Fließgeschwindigkeit. Durch Kalkablagerungen ist der Radius um 5% verkleinert und dadurch die Fließgeschwindigkeit um 10% vermindert. Um wieviel Prozent ist der Wasserdurchfluss pro Stunde kleiner geworden? (WJB)

Aufgabe 1123: Ein kaukasisches Rätsel
In Azerbaijan spricht man eine türkische Sprache, in der „Bir“ die Zahl Eins und „Dörd“ die Zahl Vier bedeutet. Ersetze nun in der Figur gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern – wobei B und D nicht durch Null ersetzt werden dürfen – sodass eine korrekte Addition entsteht.(gefunden: H.F.)

$$\begin{array}{rcccc} & & B & I & R \\ & & B & I & R \\ & & B & I & R \\ + & & B & I & R \\ \hline & D & \ddot{O} & R & D \end{array}$$

Probe: $4 \cdot BIR = 4 \cdot 683 = 2732 = D\ddot{O}RD$.

Aufgabe 1124: Zahlen-Logik
Der Logiker L und der Mathematiker M haben am gleichen Tag Geburtstag. Bei ihrer gemeinsamen Geburtstagsfeier unterhalten sich die beiden Freunde L und M.

L zu M: Ich habe mir drei natürliche Zahlen gedacht, deren Produkt 2450 ist und deren Summe dein Alter (in ganzen Jahren) angibt.

M zu L nach längerem Nachdenken und Rechnen: Ich sehe keine Möglichkeit, die drei Zahlen anzugeben.

L zu M: Jeder der drei Zahlen ist kleiner als mein Alter (in ganzen Jahren).

M zu L: Jetzt kenne ich die drei Zahlen.

a) Wie heißen die drei Zahlen?
b) Wie alt sind L und M? (H.F.)

Aufgabe 1125: Zufällige Auswahl

Aus dem Intervall $[1, 10]$ wird durch Zufallsauswahl eine reelle Zahl x bestimmt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x die Ungleichung $x + \frac{6}{x} \leq 5$ erfüllt? (H.F.)

Aufgabe 1126: Teiler einer Primzahlen-Summe

Zeige: Für zwei unmittelbar aufeinander folgende Primzahlen p und q, beide > 2, gilt: $p + q$ ist eine Zahl mit mindestens drei Primteilern. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 120

Klassen 9–13

Aufgabe 1113: Bunt gefärbte Strecken

In der Ebene seien n Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte werden durch genau eine Strecke miteinander verbunden, die beliebig in einer von fünf Farben gefärbt ist. Man erhält so 2 029 105 farbige Strecken.

Hinweis: Leider hat sich in die Aufgabe 1113 in Monoid 120 ein Fehler eingeschlichen. So wurde die Anzahl der Strecken mit 2 028 098 angegeben, wodurch die Aufgabe nicht lösbar ist.

a) Wie viele Punkte sind gegeben?

b) Zu jedem Punkt gehört mindestens eine Farbe, in der die meisten der in diesem Punkt beginnenden Strecken gefärbt sind. Wie groß ist bei jedem Punkt die Mindestanzahl der Strecken, die in dieser Farbe (in diesen Farben) gefärbt sind? (H.F.)

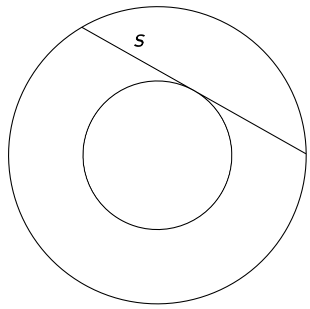
Lösung:

a) Jeder der n Punkte ist mit anderen $n-1$ Punkten verbunden. Die Gesamtzahl aller Strecken ist jedoch nicht $n(n-1)$, sondern $\frac{1}{2}n(n-1)$, da in $n(n-1)$ jede Strecke wegen ihrer zwei Endpunkte doppelt gezählt ist. Nach Voraussetzung gilt daher. $\frac{1}{2}n(n-1) = 2029105 \Longrightarrow n = 2015$.

b) Von jedem der 2015 Punkte gehen 2014 Strecken aus. Es sei nun P ein beliebiger der 2015 Punkte. Wir teilen die in P beginnenden Strecken nach ihrer Farbe in fünf Gruppen ein.
Angenommen, jede dieser fünf Gruppen enthielte höchstens 402 Strecken, dann wäre die Gesamtzahl aller von P ausgehenden Strecken höchstens $5 \cdot 402 = 2010$ – ein Widerspruch, da 2014 Strecken von diesem Punkt ausgehen.
Somit enthält mindestens eine Gruppe mehr als 402 Strecken. Da P beliebig gewählt ist, gilt: Zu jedem der 2015 Punkte gibt es stets eine oder mehrere Gruppen von mindestens 403 Strecken, die gruppenweise von gleicher Farbe sind.

Aufgabe 1114: Leuchtturm

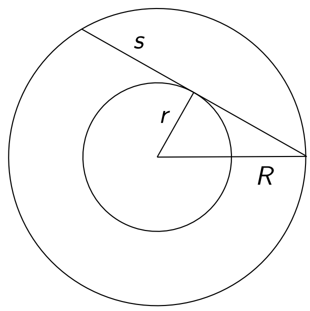
Der Leuchtturmwärter will in seinem Leuchtturm einen neuen Boden verlegen. Der Leuchtturm ist kreisrund und hat in der Mitte ein (ebenfalls rundes) Treppenhaus. Leider weiß der Leuchtturmwärter nicht, welche Durchmesser Turm und Treppenhaus haben. Er hat nur festgestellt, dass eine Holzlatte der Länge $s = 5\text{m}$ wie nebenstehend abgebildet genau zwischen Außenwand und Treppenhaus passt.



Berechne wie groß der Fußboden ist. (gefunden von LB)

Lösung:

Sei R der Radius des Leuchtturms und r der Radius des Treppenhauses. Dann beträgt die gesuchte Fläche $F = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$. Wir können R und r zwar nicht ausrechnen, aber nach dem Satz des Pythagoras gilt $r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = R^2$, also $R^2 - r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2$. Setzen wir dies in obige Formel ein, so erhalten wir:



$$F = \pi \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \pi \cdot (2{,}5\text{m})^2 = \pi \cdot 6{,}25\text{m}^2.$$

Aufgabe 1115: Schokoraub

Der böse große Bruder Klaus hat aus den fünf Türchen T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 des Adventskalenders die Schokolade „gemopst".

Die Nummer T_1 des ersten Türchens ist kleiner als die Nummer T_2 des zweiten Türchens und bei den nachfolgenden Türchen gibt es keine (der Reihe nach gelesen) aufsteigende Teilfolge aus mindestens drei Zahlen.

An welchem Tag sind die Spuren des „Schokoladenklaus" verwischt? (H.F., MG, CHA)

Lösung:

Da es bei den Türchen keine aufsteigende Teilfolge aus drei Zahlen gibt, muss gelten:

$$T_3 < T_2 \qquad \text{sowie} \qquad T_4 < T_2 \qquad \text{und} \qquad T_5 < T_2.$$

Wäre nämlich $T_i > T_2$ für eine der Zahlen $i = 3$, 4 oder 5, dann wäre wegen $T_1 < T_2$ die Teilfolge T_1, T_2, T_i aufsteigend – ein Widerspruch zur Voraussetzung. Wegen $T_1 < T_2$ folgt damit insgesamt: T_2 ist der letzte Tag an dem ein leeres Türchen geöffnet wird.

Aufgabe 1116: Dezimales Kryptogramm

Die vierstellige Zahl $Z = abcd$ hat die Primfaktorzerlegung

$$Z = ce \cdot d \cdot ec.$$

Bestimme die Zahl Z.

Bemerkung: Verschiedene Buchstaben bedeuten auch stets verschiedene Ziffern. (MG)

Lösung:

Die Ziffer und Zahl d ist eine Primzahl und kann daher nur 2, 3, 5 oder 7 sein.

Da c und e beide Einerstelle einer Primzahl sind, können sie nur 1, 3, 7 oder 9 sein. Da zudem sowohl ce als auch ec beide Primzahlen sind kommen nur die Kombinationen $(13, 31)$, $(17, 71)$, $(37, 73)$ oder $(79, 97)$ in Frage.

- Für 79 und 97 wird das kleinste Produkt (mit $d = 2$) bereits fünfstellig.
- Für 37 und 73 muss $d \leq 3$ sein. Weil aber $2 \cdot 37 \cdot 73 = 5402$ und $3 \cdot 37 \cdot 73 = 8103$, sind in beiden Fällen die Ziffer an der Zehnerstelle 0 und nicht 3 oder 7.
- Für 17 und 71 stimmt nur für $d = 5$ die Einerziffer des Produktes, nämlich $5 \cdot 17 \cdot 71 = 6035$, mit dem Primfaktor d überein, aber diesmal ist die Ziffer an der Zehnerstelle nicht 1 oder 7.

Es müssen also c und e die Ziffern 1 bzw. 3 sein. Für $d = 2$ ist das Produkt dreistellig. Bei $d = 3$ und $d = 7$ stimmen wiederum die Einerziffer des Produktes nicht mit dem Primfaktor überein.

Daher ist $d = 5$ und mit $c = 1$ und $e = 3$ ergibt sich

$$Z = 13 \cdot 5 \cdot 31 = 2015,$$

also ist 2015 die gesuchte Zahl.

Beachte auch die palindromische Primfaktorzerlegung der Jahreszahl!

Aufgabe 1117: Bierdeckel

Johanna und Moritz sitzen im Restaurant. Um sich die Zeit zu vertreiben, bauen sie aus quadratischen Bierdeckeln mehrstöckige dreieckige Kartenhäuser.

a) Wie viele Dreiecke (jeglicher Größe) enthält ein solches Kartenhaus mit zwei bzw. drei Stockwerken?

b) Wie viele Dreiecke (jeglicher Größe) enthält ein solches Kartenhaus mit n Stockwerken? Unterscheide die Fälle n gerade und n ungerade.

(Valentin Blomer)

Lösung:

a) Ein solches Kartenhaus mit zwei Stockwerken enthält vier „kleine“ Dreiecke (drei im unteren Stockwerk, eines im oberen Stockwerk) sowie das „große Dreieck“ der äußeren Form, also insgesamt fünf Dreiecke.
Das Kartenhaus mit drei Stockwerken enthält $9 + 3 + 1 = 13$ Dreiecke.

b) Wir zählen die Anzahl $f(n)$ der Dreiecke, die in der n-ten Reihe hinzukommen. Das sind
$$n + (n-1) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$
mit Spitze nach oben und
$$\begin{aligned}(n-1) + (n-3) + ... &= \frac{n^2}{4} && \text{(falls } n \text{ gerade) oder}\\ &= \frac{n^2-1}{4} && \text{(falls } n \text{ ungerade)}\end{aligned}$$
mit Spitze nach unten. Es folgt
$$f(n) = \frac{3n^2+2n}{4},$$
falls n gerade ist, und
$$f(n) = \frac{3n^2+2n-1}{4},$$
falls n ungerade ist.
Gesucht ist nun $F(m) := f(1)+f(2)+...+f(m)$. Aus der Definition $F(2n) = f(1) + f(2) + ... + f(2n)$ erhält man direkt die explizite Formel für
$$F(2n) = \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{2n} k^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{2n} k - \frac{n}{4} = ... = \frac{4n^3+5n^2+n}{2}$$
und hieraus wegen $F(2n-1) = F(2n) - f(2n)$ sofort die für
$$F(2n-1) = \frac{4n^3-n^2-n}{2}.$$
Die Spezialfälle aus Teil a) erhält man als $F(2) = 5$ beziehungsweise $F(3) = 13$.

Aufgabe 1118: Wahr oder falsch?

Jasmin beschäftigt sich nun schon eine ganze Weile mit der Darstellung von Zahlen als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und möchte nun, nachdem sie bisher solche Darstellungen gesucht hat, Zusammenhänge untersuchen. Heute geht sie folgenden Fragen nach.
Entscheide jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe. (Jasmin konnte übrigens alle korrekt entscheiden!)

a) Lässt sich eine Zahl als Summe von sowohl zwei als auch drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch als Summe von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

b) Lässt sich eine Zahl als Summe von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch als Summe von sowohl zwei als drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. (MG)

Lösung:
Die Summe der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen m, $m+1$, $m+2$, ..., $m+n-1$ beträgt

$$\begin{aligned} S &= m + (m+1) + (m+2) + ... + (m+n-1) \\ &= nm + 1 + 2 + ... + (n-1) \overset{(*)}{=} nm + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+2m-1)}{2}, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(*)$ die Gaußsche Summenformel verwendet wurde. Daraus folgt $2S = n(n+2m-1) =: nk$ und somit lässt sich S als Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, wenn es eine Zerlegung $2S = nk$ gibt wobei $n < k$ und, wegen $k = n + 2m - 1$, genau eine der beiden Zahlen n und k gerade und die andere ungerade sein müssen.
Damit folgt für die Fragestellungen:

a) Für $9 = 4+5 = 2+3+4$ und $15 = 7+8 = 4+5+6$ ist die Aussage falsch – und somit auch allgemein.
Bemerkung: Für größere Zahlen, also $S > 15$ gilt die Aussage, denn: Nach Voraussetzung gibt es zwei Zerlegungen $2S = 2k_2$ mit ungeradem k_2. Insbesondere hat die Primfaktorzerlegung von $2S$ also nur einmal den Primfaktor 2. Damit folgt aus der Zerlegung mit $n = 3$:
$$2S = 3 \cdot k_3 = 3 \cdot 2k = 6k,$$
wobei k ungerade ist. Dann exisitiert eine solche geforderte Summendarstellung, wenn $6 < k$ ist. Wegen $k = 6 + 2m - 1$ erhält man also alle Zahlen der Form $S = 3(5+2m)$ für jede natürliche Zahl m, also $S = 21, 27, 33, \ldots$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$, das heißt für alle ungeraden Zahlen $k = 7, 9, 11, \ldots$.

b) Lässt sich eine Zahl als Summe von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so gibt es eine Zerlegung $2S = 6k = 2 \cdot 3 \cdot k$ mit ungeradem k und $6 < k$.
Dann gibt es aber auch die Zerlegungen $2S = 2 \cdot (3k)$, wobei $3k$ ungerade und $2 < 3k$ sind, sowie $2S = 3 \cdot (2k)$, wobei $2k$ gerade und $3 < 12 = 2 \cdot 6 < 2k$ sind.
Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 1119: Ausgewürfelte Zahl

David möchte mithilfe eines üblichen Spielwürfels eine vierstellige Zufallszahl erzeugen, die er als PIN verwenden kann. Dazu wirft er den Würfel viermal nacheinander. Ist dabei aber die Augenzahl eines Wurfes gleich der Augenzahl des vorherigen Wurfes, so wiederholt David den Wurf und verwendet das Ergebnis der

Wiederholung – unabhängig davon, ob dies wieder die gleiche Augenzahl ist oder nicht.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass...

a) ... die erwürfelte Zahl kleiner als 5000 ist.

b) ... die zweite und die dritte Ziffern gleich sind.

c) ... die zweite Ziffer eine 4 ist.

d) ... die zweite und die dritte Ziffer beide eine 6 sind. (nach WJB)

Lösung:

a) Die erwürfelte Zahl ist kleiner als 5000, wenn die erste Ziffer eine 1, 2, 3 oder 4 ist – unabhängig von den weiteren Würfen. Die Wahrscheinlichkeit ist also $P(\text{„Zahl} < 5000\text{“}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) Damit die dritte Ziffer gleich der zweiten Ziffer ist, muss zunächst für die dritte Ziffer dieselbe Augenzahl wie für die zweite Ziffer geworfen werden. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{6}$. Dann aber wird der Wurf wiederholt und es muss erneut dieselbe Augenzahl wie zuvor geworfen werden; erneut beträgt die Wahrscheinlichkeit hierfür $\frac{1}{6}$.
Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit also

$$P(\text{„zweite und dritte Ziffer gleich“}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Bemerkung: Analog sind auch die Wahrscheinlichkeiten $P(\text{„erste und zweite Ziffer gleich“}) = P(\text{„dritte und verte Ziffer gleich“}) = \frac{1}{36}$.

c) Unabhängig von der ersten Ziffer ist die Wahrscheinlichkeit für jede Ziffer gleich groß, also

$$P(\text{„zweite Ziffer 4“}) = \frac{1}{6}.$$

(Dies lässt sich auch nachrechnen, wobei berücksichtigt werden muss, dass im ersten Wurf eine 4 geworfen sein kann sowie dass eine andere Zahl des ersten Wurfes zunächst beim zweiten Wurf erneut und die 4 erst im Wiederholungswurf geworfen wird : $P(\text{„zweite Ziffer 4“}) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{216} + \frac{35}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$

d) Analog zu Teil c) ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Ziffer eine 6 ist, $\frac{1}{6}$.
In Teil b) haben wir berechnet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite und die dritte Ziffern gleich sind, $\frac{1}{36}$ beträgt.
Somit ist

$$P(\text{„zweite und dritte Ziffer jeweils 6“}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216}.$$

(MG)

Mathematische Entdeckungen

Spitze Innenwinkel eines konvexen m-Ecks

Ein m-Eck, $m \geq 3$, heißt konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringenden Ecken besitzt und keine drei benachbarten Ecken in einer Seite des m-Ecks liegen. Dann gilt für jeden seiner Innenwinkel α_i, $i = 1, 22, \ldots, m$, dass $\alpha_i < 180°$ ist und umgekehrt. Einen Winkel, der $< 90°$ ist, nennt man spitz.
Es gibt Dreiecke mit lauter spitzen Winkeln. Dagegen kann ein konvexes 4-Eck keine vier spitzen Innenwinkel α_i haben: Wäre alle α_i spitz, so wäre $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 4 \cdot 90°$; tatsächlich aber gilt im konvexen 4-Eck: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360°$.

Untersuche daher die Fragen:

a) Wie viele spitze Winkel kann ein beliebiges konvexes m-Eck, $m \geq 3$ höchstens haben?

b) Gibt es zu jedem m, $m = 3, 4, 5, \ldots$ ein konvexes m-Eck, das die höchstmögliche Anzahl spitzer Winkel besitzt? (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2015 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 119

In Heft 119 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Rekonstruktion einer Zahlenfolge

Die berühmte Zahlenolge von Fibonacci*

(1) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

mit den Startzahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ erfüllt die Regel

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Es sei nun x_1, x_2, x_3, ... eine von (1) verschiedene Zahlenfolge mit der Rekursionsregel (2), von der man irgend zwei Glieder x_m und x_n mit $1 \leq m < n$ kennt. Entwickle eine Formel zur Rekonstruktion der Formel. (H.F.)

Ergebnisse

Mit den mathematischen Entdeckungen aus M119 haben sich beschäftigt: Kevin Mours, Karolinen-Gymnasium Frankenthal, Jamico Schade, JMF-Gymnasium Burglengenfeld und Marcel Wittmann, Karolinen-Gymnasium Frankenthal.

* Leonardo von Pisa – genannt Fibonacci (um 1170 – um 1250), bedeutender Mathematiker am Ende des Mittelalters

Kevin benutzt die Approximation des Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen durch Φ, den Goldenen Schnitt, um eine Näherung für die x_i zu erhalten. Jamico und Marcel haben eine Formel für die Berechnung von x_1 und x_2 (und damit aller Folgenglieder) hergeleitet, die wir hier wiedergeben:
Es geht um die Rekonstruktion der Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$; $f_1, f_2, f_3, \dots$ sei die Fibonacci-Folge mit $f_1 = f_2 = 1$. Dann gilt für $n \geq 3$:

$$x_n = f_{n-2}x_1 + f_{n-1}x_2.$$

Beweis mit vollständiger Induktion:
Es ist $x_3 = x_1 + x_2 = f_{3-2}x_1 + f_{3-1}x_2$ und $x_4 = x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 = f_{4-2}x_1 + f_{4-1}x_2$.
Gelten für ein beliebiges n die Gleichungen $x_n = f_{n-2}x_1 + f_{n-1}x_2$ und $x_{n+1} = f_{n-1}x_1 + f_n x_2$, so folgt auch für $n+2$:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_n + x_{n+1} = (f_{n-2}x_1 + f_{n-1}x_2) + (f_{n-1}x_1 + f_n x_2) \\ &= (f_{n-2} + f_{n-1})x_1 + (f_{n-1} + f_n)x_2 = f_n x_1 + f_{n+1}x_2 \\ &= f_{(n+2)-2}x_1 + f_{(n+2)-1}x_2. \end{aligned}$$

Es gilt also für alle $n \geq 3$: $x_n = f_{n-2}x_1 + f_{n-1}x_2$.
Sind also Werte x_n und x_m gegeben, so lassen sich aus den Gleichungen

(3) $x_n = f_{n-2}x_1 + f_{n-1}x_2$ und

(4) $x_m = f_{m-2}x_1 + f_{m-1}x_2$

die Startzahlen x_1 und x_2 bestimmen:
Aus (3) folgt:

$$x_2 = \frac{x_n - f_{n-2}x_1}{f_{n-1}}.$$

Aus (4) folgt dann:

$$\begin{aligned} x_m &= f_{m-2}x_1 + f_{m-1}\frac{x_n - f_{n-2}x_1}{f_{n-1}} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{x_m - f_{m-1}\frac{x_n}{f_{n-1}}}{f_{m-2} - f_{m-1}\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}} = \frac{f_{m-1}x_n - f_{n-1}x_m}{f_{m-1}f_{n-2} - f_{m-2}f_{n-1}} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{x_n - f_{n-2}\frac{f_{m-1}x_n - f_{n-1}x_m}{f_{m-1}f_{n-1} - f_{m-2}f_{n-1}}}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-2}x_m - f_{m-2}x_n}{f_{m-1}f_{n-2} - f_{m-2}f_{n-1}}. \end{aligned}$$

Man kann nun alle folgenden Folgenglieder mit Hilfe der rekursiven Bildungsvorschrift $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ berechnen.
Es folgt aber auch:

$$x_i = f_{i-2}x_1 + f_{i-1}x_2 = f_{i-2}\frac{f_{m-1}x_n - f_{n-1}x_m}{f_{m-1}f_{n-2} - f_{m-2}f_{n-1}} + f_{i-1}\frac{f_{n-2}x_m - f_{m-2}x_n}{f_{m-1}f_{n-2} - f_{m-2}f_{n-1}}$$

für alle $i \geq 3$, sodass man aus n, m, x_n, x_m, i und der Fibonacci-Folge jedes Glied der x_i-Folge direkt berechnen kann.
Bemerkung: Setzt man für f_{i-2}, f_{i-1}, f_{m-1} und so weiter noch die explizite Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge

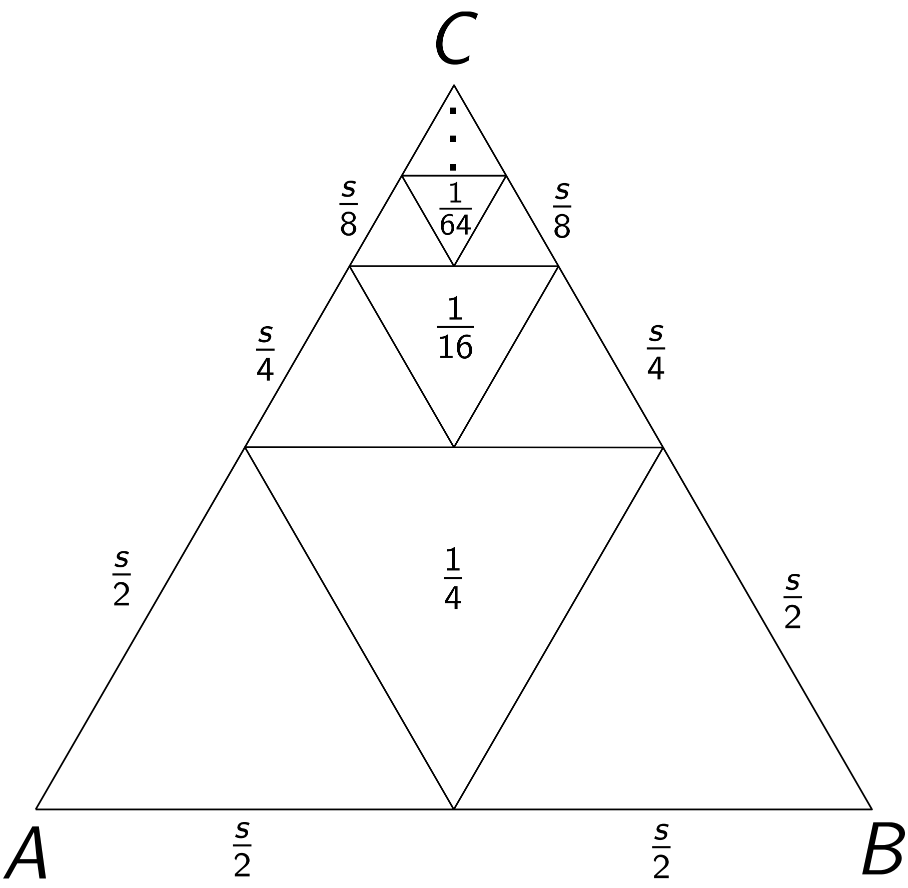
$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$$

ein, so erhält man sogar eine explizite Bildungsvorschrift für die x_i, die dann nur noch von den gegeben Zahlen n, m, x_n und x_m und von i abhängt.

Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge s und dem Flächeninhalt 1. Die Figur zeigt dann, dass gilt:



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... = \frac{1}{3}$$

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Mike Goldsmith: „So wirst Du ein Mathegenie“

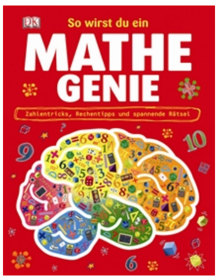
„So wirst du ein Mathe-Genie“ verspricht der reißerische Titel des Buches von Mike Goldsmith. Wer dadurch ein Trainingsbuch zur Verbesserung der Schulnoten erwartet, wird enttäuscht werden. Stattdessen handelt es sich um ein Sachbuch mit einer spannenden Sammlung von interessanten mathematischen Inhalten und Ideen.

In einer Comic-Szene eines Jahrmarktes wird zunächst gezeigt, wo wir in der Welt überall Mathematik begegnen, ohne es zu ahnen: bei Zahlen, Größen, Formen, Gewinnchancen und Mustern. Im ersten Kapitel „das Mathe-Gehirn“ wird kurz das menschliche Gehirn und grundlegendes zum Lernen von Mathematik vorgestellt. In den folgenden Kapiteln werden unter anderem die folgenden mathematischen Teilgebiete erarbeitet: Zahlensysteme, Zahlenmuster, die Null, Primzahlen, der goldene Schnitt, die Unendlichkeit, Geometrie in Ebene und Raum, unmögliche Figuren und Anwendungen der Mathematik im täglichen Leben. Kurzbiographien von großen Mathematikern wie Archimedes, Gauß und Euler, die an den inhaltlich passenden Stellen eingebaut wurden, vertiefen die Erkenntnis, dass die Mathematik von Menschen gemacht und weiterentwickelt wurde.

Die Aufmachung des Buches ist bunt und durch Fotos, Comics und Zeichnungen illustriert. Unter vielen Seiten gibt es unter dem Motto „Probier's aus“ Aufgaben zum Knobeln und Weiterdenken, deren Lösungen am Ende des Bandes abgedruckt sind.

Fazit: Auch wenn der reißerische Titel den Leser zunächst in die Irre leitet, so ist „So wirst Du ein Mathegenie“ ein schönes Buch, an dem Schülerinnen und Schüler ab der Klassenstufe 5, die sich für mathematische Fragestellungen interessieren, viel Freude haben werden.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:
Goldsmith, Mike: So wirst Du ein Mathegenie, Dorling Kindersley 2013, ISBN 978-3-8310-2292-2, gebunden, 128 Seiten, 14,95 €

Art des Buches:	Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 10 Jahren

„Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.“

Jean-Baptist le Rond d'Alembert
1717–1783
französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph

Bundeswettbewerb Mathematik 2015

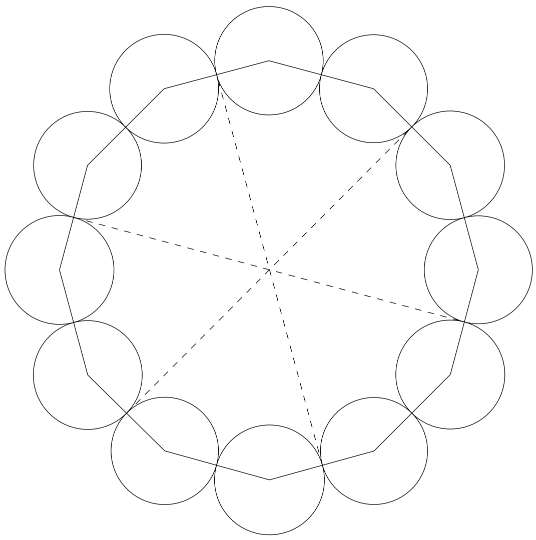
Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Zwölf 1-Euro-Münzen werden flach so auf einen Tisch gelegt, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen 12-Ecks bilden und sich benachbarte Münzen berühren.
Zeige, dass sich weitere sieben 1-Euro-Münzen in das Innere dieses Rings aus Münzen flach auf den Tisch legen lassen.

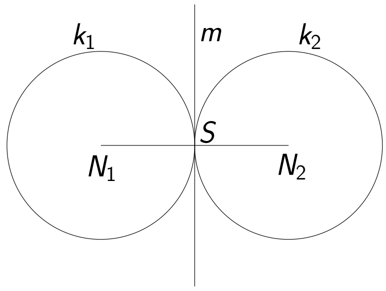
Lösung:
In der Skizze 1.1 zeigen wir die Anordnung der zwölf 1-Euro-Münzen als Ring entlang eines regelmäßigen 12-Ecks; hierbei sind als Hilfslinien drei Mittelsenkrechten jeweils gegenüberliegender 12-Eck-Seiten eingezeichnet. Wir wollen zeigen, dass sich sieben weitere 1-Euro-Münzen im Inneren des Rings flach auf den Tisch legen lassen. Wir interpretieren die 1-Euro-Münzen als Kreise mit Radius r. Zwei 1-Euro-Münzen liegen genau dann flach auf dem Tisch, wenn sich die beiden entsprechenden Kreise in höchstens einem Punkt berühren.



Skizze 1.1: Anordnung der zwölf 1-Euro-Münzen

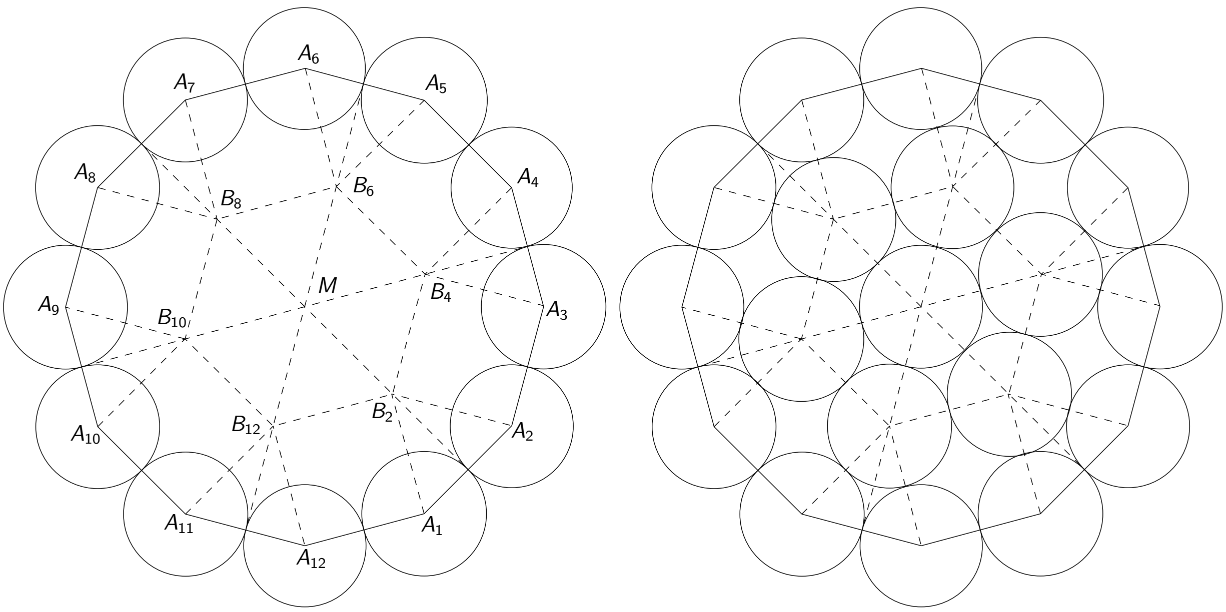
Hilfssatz: Zwei Kreise mit Radius r überlappen sich nicht oder berühren sich höchstens in einem gemeinsamen Randpunkt, wenn ihre Mittelpunkte mindestens den Abstand $2r$ haben.

Beweis des Hilfssatzes: Es seien $k_i = k(N_i, r)$, $i \in \{1, 2\}$, die beiden Kreise. Wir betrachten wie in Skizze 1.2 die Verbindungsstrecke N_1N_2 und deren Mittelsenkrechte m durch den Punkt $S \in N_1N_2$, die zwei Halbebenen definiert. Die Mittelpunkte N_1, N_2 liegen in getrennten Halbebenen, und alle Punkte auf $m \setminus \{S\}$ haben einen Abstand größer als $N_1S = SN_2 = \frac{1}{2} \cdot N_1N_2$ von den Mittelpunkten. Ist $N_1N_2 > 2r$, so liegen die Kreise vollständig in der Halbebene des jeweiligen Mittelpunkts und überlappen sich nicht. Ist $N_1N_2 = 2r$, so berühren sich die Kreise k_1, k_2 wegen $N_1S = SN_2 = r$ in $S \in m$. Alle anderen Punkte der Kreise liegen in der Halbebene des jeweiligen Mittelpunkts. ◇



Skizze 1.2: Beweis des Hilfssatzes im Fall $N_1N_2 = 2r$

Wir bezeichnen wie in Skizze 1.3 links mit $A_1, \dots, A_{12}$ (sowie $A_{12} =: A_0$) die Ecken des regelmäßigen 12-Ecks und mit M seinen Mittelpunkt. Außerdem definieren wir sechs weitere Punkte B_2, B_4, ..., B_{12} (sowie $B_{12} =: B_0$) im Inneren des 12-Ecks über die Eigenschaft, dass die Dreiecke $\triangle A_1A_2B_2$, $\triangle A_3A_4B_4$, ..., $\triangle A_{11}A_{12}B_{12}$ jeweils gleichseitig sind. (Für i, $1 \leq i \leq 6$, liegen die so definierten Punkte B_{2i} auf den Mittelsenkrechten der Seiten $A_{2i-1}A_{2i}$.)



Skizze 1.3: Bezeichnungen im 12-Eck und Anordnung der neunzehn 1-Euro-Münzen

Wir weisen nun nach:

$$\begin{aligned} 2r &= A_1A_2 = \dots = A_{11}A_{12} = A_{12}A_1 && (1.1)\\ &= A_1B_2 = A_2B_2 = A_3B_4 = A_4B_4 = \dots = A_{11}B_{12} = A_{12}B_{12} && (1.2)\\ &= B_2B_4 = \dots = B_{10}B_{12} = B_{12}B_2 && (1.3)\\ &= MB_2 = MB_4 = \dots = MB_{12}. && (1.4) \end{aligned}$$

Weil alle Strecken in (1.1), (1.2), (1.3) und (1.4) doppelt so lang wie die Radien r der Münzen sind, überlappen sich je zwei Münzen nicht, deren Mittelpunkte auf den Endpunkten der genannten Strecken liegen; das haben wir oben im Hilfssatz bewiesen. Damit können wir im Inneren des Rings sechs 1-Euro-Münzen mit ihren Mittelpunkten auf die Punkte B_2, B_4, ..., B_{12} und eine siebte 1-Euro-Münze mit ihrem Mittelpunkt auf den Punkt M flach auf den Tisch legen.

Die Gleichungen in (1.1) und (1.2) folgen sofort, weil nach Aufgabenstellung die Länge der Seiten des regelmäßigen 12-Ecks $2r$ beträgt und damit für i, $1 \leq i \leq 6$, nach Definition der Punkte B_i in den Dreiecken $\triangle A_{2i-1}A_{2i}B_{2i}$ für die Seiten $A_{2i-1}A_{2i} = A_{2i-1}B_{2i} = A_{2i}B_{2i} = 2r$ gilt.

Für den Beweis von (1.3) betrachten wir für i, $1 \leq i \leq 12$, im regelmäßigen 12-Eck die Mittelpunktswinkel $\sphericalangle A_{i-1}MA_i = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ und die Winkelsummen in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle A_{i-1}A_iM$, in denen die Basiswinkel gleich sind, also

$$\sphericalangle A_iA_{i-1}M = \sphericalangle MA_iA_{i-1} = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ \text{ für } i, 1 \leq i \leq 12. \quad (1.5)$$

Zudem sind für alle i, $1 \leq i \leq 6$, in den gleichseitigen Dreiecken $\triangle A_{2i-1}A_{2i}B_{2i}$ alle Innenwinkel 60° groß, woraus mit (1.5) folgt, dass

$$\sphericalangle B_{2i}A_{2i-1}A_{2i-2} = \sphericalangle A_{2i-1}A_{2i-2}B_{2i-2} = 90^\circ \text{ für } i, 1 \leq i \leq 6,$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle B_{2i}A_{2i-1}A_{2i-2} &= \sphericalangle A_{2i}A_{2i-1}M + \sphericalangle MA_{2i-1}A_{2i-2} - \sphericalangle A_{2i}A_{2i-1}B_{2i} && (1.6)\\ &= 2 \cdot 75^\circ - 60^\circ = 90^\circ, \end{aligned}$$

und der Nachweis, dass auch $\sphericalangle A_{2i-1}A_{2i-2}B_{2i-2} = 90^\circ$, verläuft analog zu (1.6). Damit sind für alle i, $1 \leq i \leq 6$, in den Vierecken $\square A_{2i-2}A_{2i-1}B_{2i}B_{2i-2}$ nach (1.1) und (1.2) drei der Seiten gleich lang, nämlich $A_{2i-2}B_{2i-2} = A_{2i-2}A_{2i-1} = A_{2i-1}B_{2i} = 2r$, und die Winkel mit Scheiteln A_{2i-2} und A_{2i-1} sind rechte; die Vierecke sind also Quadrate, in denen auch $B_{2i-2}B_{2i} = 2r$ gilt. Aus unseren Kenntnissen über die Winkel in diesen Quadraten sowie über die Winkel in den gleichseitigen Dreiecken $\triangle A_{2i-1}A_{2i}B_{2i}$, $1 \leq i \leq 6$, schließen wir

$$\sphericalangle B_4B_2B_{12} = \sphericalangle B_6B_4B_2 = \dots = \sphericalangle B_2B_{12}B_{10} = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \quad (1.7)$$

Wir beweisen nun noch (1.4). Hierzu betrachten wir das Sechseck $\square B_2B_4B_6B_8B_{10}B_{12}$, das auf Grund von (1.3) identische Seitenlängen und gemäß

(1.7) identische Innenwinkel hat, also ein regelmäßiges Sechseck ist; sein Mittelpunkt fällt daher mit dem oben definierten Punkt M zusammen. Für alle i, $1 \leq i \leq 6$, sind im regelmäßigen Sechseck die Mittelpunktswinkel $\sphericalangle B_{2i-2}MB_{2i} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ groß, und wegen der Winkelsummen in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle B_{2i-2}B_{2i}M$, in denen die Basiswinkel gleich sind, gilt $\sphericalangle B_{2i}B_{2i-2}M = \sphericalangle MB_{2i}B_{2i-2} = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$. Damit sind für alle i, $1 \leq i \leq 6$, die Dreiecke $\triangle B_{2i-2}B_{2i}M$ tatsächlich gleichseitig mit $B_{2i-2}B_{2i} = MB_{2i-2} = MB_{2i} = 2r$.

□

Aufgabe 2

Eine Summe von 335 paarweise verschiedenen positiven Zahlen hat den Wert 100000.

a) Wie viele ungerade Summanden müssen in dieser Summe mindestens vorkommen?

b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung: In der genannten Summe müssen mindestens 20 ungerade Summanden und können höchstens 314 ungerade Summanden vorkommen.

Hilfssatz 1: Wir benutzen für den Beweis die folgenden bekannten Summationsformeln, die für alle positiven ganzen Zahlen n und m gelten und die sich leicht induktiv beweisen lassen,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1), \tag{2.1}$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2m-1) = m^2. \tag{2.2}$$

Hilfssatz 2: Wir betrachten eine beliebige Summe wie in der Aufgabenstellung. Enthält sie n gerade Summanden, so hat deren Summe mindestens den Wert $n(n+1)$; enthält sie m ungerade Summanden, so hat deren Summe mindestens den Wert m^2.

Für den *Beweis von Hilfssatz 2* ist die Beobachtung zentral, dass die in der Aufgabenstellung betrachteten Summen nur positive ganze Zahlen addieren, die paarweise verschieden sind. Damit gilt für jede solche Summe, dass auch jede Teilmenge ihrer Summanden aus paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen besteht. Damit folgt für n gerade Summanden, die in einer Summe wie in der Aufgabenstellung enthalten sind, dass ihre Summe mindestens den Wert der Summe $2 + 4 + 6 + ... + 2n$ hat, die aus den n kleinsten paarweise verschiedenen positiven ganzen geraden Zahlen gebildet wird. Dieser Wert ist nach (2.1)

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) = n(n+1).$$

Entsprechend gilt für m ungerade Summanden, die in einer Summe wie in der

Aufgabenstellung enthalten sind, dass ihre Summe mindestens den Wert $1 + 3 + 5 + ... + (2m - 1)$ hat. Diese Summe nimmt nach (2.2) den Wert m^2 an. ◇

Beweis der Aufgabe: Wir beweisen Teil a) in zwei Schritten: Es gibt zum einen eine Summe wie in der Aufgabenstellung, in der 20 ungerade Summanden vorkommen; zum anderen gibt es keine Summe, die die Voraussetzung der Aufgabenstellung erfüllt, in der weniger als 20 ungerade Summanden vorkommen. Für den ersten Schritt stellen wir fest, dass die Summe in der ersten Zeile von (2.3) aus 315 geraden Summanden und 20 ungeraden Summanden besteht; alle 335 Summanden sind paarweise verschiedene positive ganze Zahlen und sie ergeben addiert wegen (2.1) und (2.2) den Wert 100000, denn

$$\begin{aligned} &2 + 4 + ... + 628 + 630 + 1 + 3 + ... + 37 + 99 \\ =\ &2 \cdot (1 + 2 + ... + 314 + 315) + 1 + 3 + ... + (2 \cdot 19 - 1) + 99 \\ =\ &315 \cdot 316 + 19 \cdot 19 + 99 = 99540 + 361 + 99 = 100000. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die Summe erfüllt also die Voraussetzungen der Aufgabenstellung. Wir werden den zweiten Schritt durch Widerspruch beweisen: Kämen weniger als 20, also höchstens 19, ungerade Summanden vor, so enthielte die Summe mindestens $335 - 19 = 316$ gerade Summanden. Die Summe von 316 paarweise verschiedenen positiven ganzen geraden Summanden hat jedoch nach Hilfssatz 2 mindestens den Wert

$$316 \cdot 317 = 100172 > 100000.$$

Da alle Summanden positive ganze Zahlen sind, ergibt sich für 316 oder mehr gerade Summanden also ein Widerspruch.
Wir beweisen auch Teil b) in zwei Schritten: Es gibt zum einen eine Summe wie in der Aufgabenstellung, in der 314 ungerade Summanden vorkommen; zum anderen gibt es keine Summe, die die Voraussetzung der Aufgabenstellung erfüllt, in der mehr als 314 ungerade Summanden vorkommen: Die Summe in der ersten Zeile von (2.4) besteht aus 21 geraden Summanden und 314 ungeraden Summanden; alle 335 Summanden sind paarweise verschiedene positive ganze Zahlen, und sie ergeben addiert wegen (2.1) und (2.2) den Wert 100000, denn

$$\begin{aligned} &2 + 4 + ... + 42 + 1 + 3 + ... + 625 + 1569 \\ =\ &2 \cdot (1 + 2 + ... + 21) + 1 + 3 + ... + (2 \cdot 313 - 1) + 1569 \\ =\ &21 \cdot 22 + 313 \cdot 313 + 1569 = 462 + 97969 + 1569 = 100000. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Summe erfüllt also die Voraussetzung der Aufgabenstellung. Wir zeigen abschließend (durch Widerspruch), dass eine Summe wie in der Aufgabenstellung nicht mehr als 314 ungeraden Summanden enthalten kann. Eine ungerade Anzahl ungerader Summanden scheidet generell aus, da ihre Summe einen ungeraden Wert und jede Summe gerader Summanden einen geraden Wert hat. Soll eine Summe wie in der Aufgabenstellung also den geraden Wert 100000 haben, so muss in ihr eine gerade Anzahl ungerader Summanden vorkommen. Dies können nicht 318 oder mehr ungerade Summanden sein. Denn die Summe von 318 paarweise verschiedenen positiven ungeraden Summanden hat nach Hilfssatz 2 mindestens den Wert

$$318 \cdot 318 = 101124 > 100000.$$

Da alle Summanden positive ganze Zahlen sind, ergibt sich für 318 oder mehr ungerade Summanden ein Widerspruch. Wir nehmen abschließend an, die Summe enthielte genau 316 paarweise verschiedene positive ungerade Summanden; sie muss dann genau $335 - 316 = 19$ paarweise verschiedene positive gerade Summanden enthalten. Die Summe aller Summanden hat nach Hilfssatz 2 dann insgesamt mindestens den Wert

$$316 \cdot 316 + 19 \cdot 20 = 99856 + 380 = 100236 > 100000;$$

auch dies ein Widerspruch. $\square$

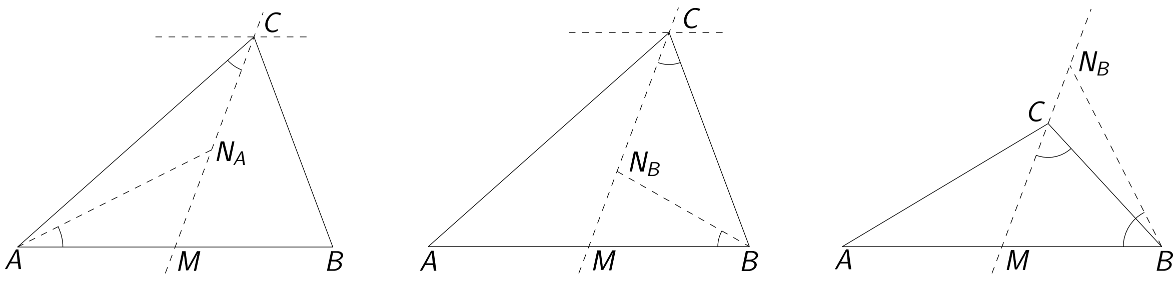
Aufgabe 3

Im Dreieck $\triangle ABC$ sei M der Mittelpunkt der Seite AB. An den Strahl $[AB$ wird in A der Winkel $\sphericalangle ACM$ angetragen, an den Strahl $[BA$ in B der Winkel $\sphericalangle MCB$; dabei wird die Drehrichtung jeweils so gewählt, dass die freien Schenkel auf der gleichen Seite von AB wie der Punkt C liegen.

Beweise, dass sich die freien Schenkel auf der Gerade CM schneiden.

Anmerkung: Mit Strahl $[XY$ (in manchen Lehrbüchern auch Halbgerade $[XY$ genannt) wird derjenige Teil der Geraden XY bezeichnet, der aus der Strecke XY zusammen mit ihrer geradlinigen Verlängerung über Y hinaus besteht.

1. Beweis: Gemäß Konstruktion in der Aufgabenstellung tragen wir in A den Winkel $\sphericalangle ACM$ an, sodass der freie Schenkel auf der gleichen Seite von AB wie der Punkt C liegt; siehe die linke Skizze. Der Schnittpunkt dieses freien Schenkels mit der Geraden CM heiße N_A.



Der Schnittpunkt N_A existiert tatsächlich, weil $\sphericalangle ACM < \sphericalangle BMC$, das heißt, der konstruierte freie Schenkel und die Gerade CM sind nicht parallel. Diese Ungleichung ergibt sich, wenn wir $\sphericalangle ACM$ am Scheitelpunkt C mit dem Wechselwinkel von $\sphericalangle BMC$ vergleichen, der sich dort an einer zu AB parallelen Geraden durch C ergibt. Genauer können wir hier aus $\sphericalangle ACM < \sphericalangle BMC$ schließen, dass der Schnittpunkt N_A stets auf der gleichen Seite von AB wie der Punkt C liegt.

Wir betrachten nun die Dreiecke $\triangle AMN_A$ und $\triangle CMA$, die wegen $\sphericalangle MAN_A = \sphericalangle ACM$ (nach Konstruktion) und $\sphericalangle N_AMA = \sphericalangle CMA$ (da $N_A \in CM$) ähnlich sind. Daher gilt für die Verhältnisse der entsprechenden Seiten

$$AM : MC = MN_A : AM \Leftrightarrow MN_A = AM^2 : MC. \tag{3.1}$$

Analog tragen wir in B den Winkel $\sphericalangle MCB$ an, so dass der freie Schenkel auf der gleiche Seite von AB wie der Punkt C liegt; siehe die mittlere Skizze. Der Schnittpunkt dieses freien Schenkels mit der Geraden CM heiße N_B; dieser Schnittpunkt existiert, weil $\sphericalangle MCB < \sphericalangle CMA$, wie sich am Scheitelpunkt C durch einen Vergleich von $\sphericalangle MCB$ mit dem Wechselwinkel von $\sphericalangle CMA$ an einer zu AB parallelen Geraden durch C ergibt. Der Schnittpunkt N_B liegt hier stets auf der gleichen Seite von AB wie der Punkt C.
Wir betrachten analog zu oben die beiden Dreiecke $\triangle MBN_B$ und $\triangle CMB$; sie sind wegen $\sphericalangle N_BBM = \sphericalangle MCB$ (nach Konstruktion) und $\sphericalangle BMN_B = \sphericalangle BMC$ (da $N_B \in CM$) ähnlich. Daher gilt für die Verhältnisse der entsprechenden Seiten

$$MB : MC = MN_B : MB \Leftrightarrow MN_B = MB^2 : MC. \tag{3.2}$$

Wir nutzen nun aus, dass nach Konstruktion $AM = MB$. Damit folgt aus den jeweils rechten Gleichungen in (3.1) und (3.2) direkt, dass

$$MN_A = AM^2 : MC = MB^2 : MC = MN_B, \tag{3.3}$$

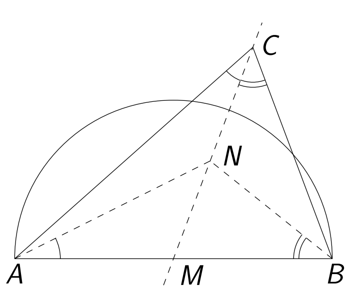
und weil beide Punkte N_A, N_B auf der gleichen Seite von AB liegen, bedeutet (3.3), dass $N_A = N_B =: N$. $\square$

Bemerkung 1: Aus dem Sinussatz in den Dreiecken $\triangle CAM$ und $\triangle BCM$ folgt mit $AM = MB$, dass

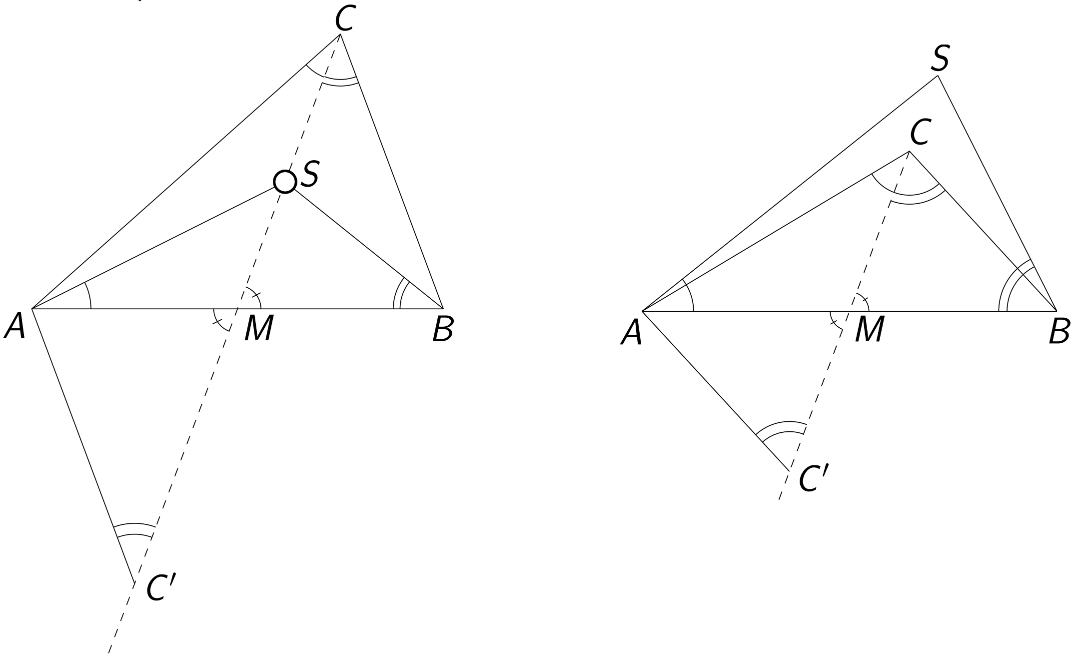
$$\frac{\sin \sphericalangle ACM}{\sin \sphericalangle MAC} = \frac{AM}{MC} = \frac{MB}{MC} = \frac{\sin \sphericalangle MCB}{\sin \sphericalangle CBM}.$$

Hieraus schließen wir, dass genau dann, wenn $AM = MB < MC$, die beiden in der Aufgabenstellung in A beziehungsweise B anzutragenden Winkel kleiner als die dortigen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ sind; genau in diesem Fall liegt der Schnittpunkt N also auf der Geraden CM im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$. An der rechten Skizze kann man nachvollziehen, dass der Beweis ganz analog zu oben verläuft, wenn $AM = MB > MC$, also die beiden anzutragenden Winkel größer als die jeweiligen Innenwinkel des Dreieck $\triangle ABC$ sind und der Schnittpunkt N auf der Geraden CM außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt. Im Fall $AM = MB = MC$ hat das Dreieck $\triangle ABC$ einen rechten Winkel in C; der Schnittpunkt N fällt dann mit dem Punkt C zusammen.

Bemerkung 2: Formel (3.3) besagt auch, dass $MN \cdot MC = AM^2 = MB^2$. Das ist nach Definition die Aussage, dass die Punkte N und C durch Spiegelung am Thaleskreis über AB ineinander übergehen.



2. Beweis (von Silvia Binder-Kermer): Gemäß Konstruktion der Aufgabenstellung tragen wir den Winkel $\sphericalangle ACM$ am Strahl $[AB$ in A und den Winkel $\sphericalangle MCB$ am Strahl $[BA$ in B an, so dass beide freie Schenkel auf derselben Seite von AB wie der Punkt C liegen. Weil $\sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = \sphericalangle ACB < 180°$ ist, können die beiden freien Schenkel nicht parallel verlaufen; sie schneiden sich also in einem Punkt, den wir S nennen (und der auf derselben Seite von AB wie der Punkt C liegt); vergleiche die nachstehende Skizze.



Skizze: Dreieck $\triangle ABC$ wie in der Aufgabenstellung mit $\sphericalangle ACB < 90°$ oder $\sphericalangle ACB > 90°$

Wir führen außerdem eine Punktspiegelung mit Zentrum (Fixpunkt) M durch. Sie bildet nach Voraussetzung $AM = MB$ der Aufgabenstellung den Punkt B auf den Punkt A ab. Der Bildpunkt von C unter dieser Punktspiegelung heiße C', womit nach Konstruktion $C'M = MC$ gilt. Außerdem ist $\sphericalangle BMC = \sphericalangle AMC'$ als Scheitelwinkel der Geraden AB und CC' in M. Unter der Punktspiegelung wird also das Dreieck $\triangle MBC$ auf das (wegen SWS) kongruente Dreieck $\triangle MAC'$ abgebildet; daher ist auch $\sphericalangle MC'A = \sphericalangle MCB$; siehe Skizze.
In den Dreiecken $\triangle C'CA$ und $\triangle ABS$ stimmen die Winkel überein, denn nach Konstruktion

$$\sphericalangle ACC' = \sphericalangle ACM = \sphericalangle BAS \text{ und } \sphericalangle CC'A = \sphericalangle MC'A = \sphericalangle MCB = \sphericalangle SBA. \quad (3.4)$$

Daher sind die beiden Dreiecke $\triangle C'CA$ und $\triangle ABS$ gegensinnig ähnlich zueinander mit

$$CA : SA = CC' : AB = MC : AM; \quad (3.5)$$

dabei folgt die zweiten Gleichung, weil, wie oben beobachtet, $CC' = 2 \cdot MC$ und $AB = 2 \cdot AM$.

Wir betrachten abschließend die beiden Dreiecke $\triangle CAM$ und $\triangle SAM$: Im Dreieck $\triangle CAM$ schließen die Seiten CA und MC den Innenwinkel $\sphericalangle ACM$ ein; im Dreieck $\triangle SAM$ schließen die Seiten $MA = AM$ und SA den Innenwinkel $\sphericalangle MAS = \sphericalangle BAS$ ein. Wie wir in der linken Gleichungskette von (3.4) beobachtet hatten, stimmen die von den genannten Seiten jeweils eingeschlossenen Innenwinkel überein. Außerdem besagt die äußere Gleichung in (3.5) mit $CA : SA = MC : AM$, dass die Paare entsprechender Seiten dasselbe Verhältnis haben. Die beiden Dreiecke $\triangle CAM$ und $\triangle SAM$ sind also gegensinnig ähnlich zueinander; insbesondere ist demnach auch $\sphericalangle CMA = \sphericalangle SMA$. Das bedeutet, dass die Geraden CM und SM übereinstimmen, der Schnittpunkt S der freien Schenkel also auf der Geraden CM liegt. Das war zu beweisen. $\square$

Aufgabe 4

Das soziale Netzwerk „BWM“ hat viele Mitglieder. Man weiß: Wählt man irgendwelche vier Mitglieder davon aus, dann ist immer eines von diesen vier Mitgliedern mit den drei anderen befreundet.

Ist dann unter vier Mitgliedern immer eines, das mit allen Mitgliedern von „BWM“ befreundet ist?

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Anmerkung: Wenn Mitglied A mit Mitglied B befreundet ist, dann ist auch Mitglied B mit Mitglied A befreundet.

Lösung: Ja, im sozialen Netzwerk „BWM“ ist unter irgendwelchen vier Mitgliedern immer eines, das mit allen Mitgliedern von „BWM“ befreundet ist.

Beweis: Es seien A, B, C, D vier beliebige, im Folgenden aber fest gewählte Mitglieder von „BWM“. Wir behaupten, dass unter ihnen ein Mitglied mit allen Mitgliedern von „BWM“ befreundet ist; solch ein Mitglied werden wir „Superfreund“ in „BWM“ nennen.

Wir wissen aus der Aufgabenstellung über die Freundschaften in „BWM“, dass eines der vier Mitglieder A, B, C, D mit den drei anderen Mitgliedern befreundet ist; dies sei ohne Einschränkung das Mitglied A. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Ist A auch Superfreund in „BWM“ (was zum Beispiel immer dann der Fall ist, wenn „BWM“ nur aus vier Mitgliedern besteht), so ist die Behauptung bewiesen.

b) Ist umgekehrt A kein Superfreund in „BWM“, so muss ein Mitglied E in „BWM“ existieren, das nicht mit A befreundet ist. (Das Mitglied E ist also von A, B, C, D verschieden.) Wir betrachten dann die Auswahl B, C, D, E von vier Mitgliedern in „BWM“. Über sie wissen wir aus der Aufgabenstellung, dass ein Mitglied unter ihnen mit den drei anderen Mitgliedern dieser Auswahl befreundet ist. Damit existiert ein Mitglied unter B, C, D, das mit E befreundet ist; ohne Einschränkung sei das Mitglied B mit dem Mitglied E befreundet. Das

Mitglied B ist nach unserer Festlegung im zweiten einleitenden Absatz auch mit A befreundet. Dann muss B ein Superfreund in „BWM“ sein: Denn wenn X ein beliebiges Mitglied (ungleich A, B, E) in „BWM“ ist, dann ist nach Voraussetzung in der Auswahl A, E, B, X von vier Mitgliedern in „BWM“ ein Mitglied mit den drei anderen Mitgliedern dieser Auswahl befreundet. Hierfür kommen nur B oder X in Frage, weil nach Konstruktion A, E nicht miteinander befreundet sind. Also sind B, X in jedem Fall miteinander befreundet. Die Behauptung ist damit bewiesen. □

Wir danken Herrn Prof. Quaisser und Herrn StD Fegert für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 119

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 8: Luca Bühler 12.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Lukas Born 7, Lea Daum 5, Amelie Mahler 10, Lorena May 10, Jonas Schneider 5;
Kl. 7: Torben Bürger 14, Virginia Fox 20, Maximilian Hauck 39, Sarah Kästner 21, Eileen Kirchner 6, Manuel Wolf 15, Rabea Zimmermann 14;
Kl. 9: Melanie Werner 9;
Kl. 10: Victoria Fox 6;
Kl. 11: Katharina Rößler 10.

Bad Ems, Goethe-Gymnasium: Kl. 11: Miriam Gerharz 22.

Bommersheim, Burgwiesenschule:
Kl. 4: Sina Schneider 12.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 5: Darico Schade 10;
Kl. 12: Jamico Schade 22.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 11: Kevin Mours 18.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule:
Kl. 9: Patrick Riebe 18.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 5: Aleksandra Herbst 13
Kl. 7: Tobias Jedich 38;
Kl. 9: Ben Mayer 18.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**: Kl. 12:** Luca Gladiator 16.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 7: Burak Sadic 3;
Kl. 8: Melanie Schuy 25;
Kl. 9: David Storzer 30, Lorenz Wagner 11.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Dilara Kösger 3;
Kl. 6: Jens Hein 4;
Kl. 7: Denis Mayle 25.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:
Kl. 5: Linus Rabeneck 8;
Kl. 6: Beatrice Popescu 7.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 8: Laura Baumir 2;
Kl. 9: Jana Eichhorn 10;
Kl. 10: Melanie Weibrich 13;
Kl. 12: Theresa Schöche 19.

Marienstatt, Privates Gymnasium Marienstatt:
Kl. 8: Florian Enders 5, Janik Seiler 5, Nils Siefert 5;
Kl. 12: Anna-Lena Schneider 17.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Nils Müller 8;
Kl. 6: Fiona Ruschke 17;
Kl. 7: Jannis Thron 12
Kl. 9: Jonas Ahlfeld 25, Darleen Baum 22, Moira Gier 7, Myrta Knauf 4, Sophie Schellhaas 4, Anja Wingender 13;
Kl. 10: Daniela Bergen 22, Matthias Bergen 22, Jasmin Hallyburton 22, Denise Kadri 9, Vinh-An Pham 20, Verena Rüsing 22;
Kl. 12: Daniel Fink 16, Sandra Wingender 7;
Kl. 13: Janina Vogl 22.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 7: Sonja Kowallek 21.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 6: Sönke Schneider 35;
Kl. 7: Jonas Blumenroth 15, Jonas Glückmann 23, Philipp Karn 14, Fabian Liepach 30, Sibylla Ribka 15;

Kl. 8: Maximilian Göbel 41, Julian Ingrisch 9, Maximilian Kraffzick 11, Jara Müller-Kästner 23, Helen Richter 11;
Kl. 10: Julia Theis 19;
Kl. 11: Katharina Kiefer 18;
Kl. 12: Jan-Philipp Bullenkamp 18, Heiko Kötzsche 22, Markus Kötzsche 22.

Regensburg, Albertus Magnus Gymnasium:
Kl. 6: Johannes Plößl 4.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner)**:**
Kl. 5: Niko Gersthahn 6, Justin Haubrichs 6, Greta Kluge 14, Joshua Knöpfel 7, Jordan Plümper 9;
Kl. 6: Carina Heinemann 5, Ruben Rohn 2, Johanna Schwarz 7, Naomi Smeets 7, Madita Spies 7, Lotte Tillmann 7;
Kl. 9: Friedrich Holtorf 3;
Kl. 11: Malte Bayer 3;
Kl. 12: Janine Röper 7.

Schwäbisch Gmünd, Landesgymnasium für Hochbegabung:
Kl. 8: Clara Deifel 18.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 5: Miriam Büttner 20.

Wiesbaden, Leibnizschule:
Kl. 9: Andreas Dernier 11;

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Raphael Gaedtke 4.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus
Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe
Betreuung der Abonnements und Versand: Anita Peffer-Kohl

Jahrgang 35 Heft 121 März 2015

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`