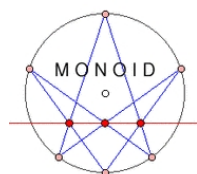


# MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 00 | 61 | 47 | 52 | 93 | 29 | 34 | 18 | 85 | 76 |
| 21 | 97 | 32 | 78 | 06 | 65 | 89 | 43 | 10 | 54 |
| 68 | 46 | 74 | 30 | 55 | 83 | 12 | 09 | 27 | 91 |
| 14 | 88 | 25 | 99 | 62 | 51 | 77 | 36 | 03 | 40 |
| 73 | 35 | 69 | 26 | 17 | 44 | 01 | 90 | 58 | 82 |
| 95 | 13 | 80 | 04 | 71 | 38 | 56 | 22 | 49 | 67 |
| 37 | 50 | 08 | 41 | 84 | 92 | 23 | 75 | 66 | 19 |
| 59 | 24 | 96 | 15 | 48 | 07 | 60 | 81 | 72 | 33 |
| 86 | 02 | 11 | 63 | 39 | 70 | 45 | 57 | 94 | 28 |
| 42 | 79 | 53 | 87 | 20 | 16 | 98 | 64 | 31 | 05 |



Eine mathematische Zeitschrift  
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)  
1980 gegründet von Martin Mettler

herausgegeben von der  
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz  
vertreten durch den Präsidenten  
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG  
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

**Wichtig:** Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

**Für Schüler/innen der Klassen 5–8** sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der  
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**15.02.2016.**

**Johannes Gutenberg–Universität  
Institut für Mathematik  
MONOID-Redaktion  
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107  
Fax: 06131/3924389

E-Mail: [monoid@mathematik.uni-mainz.de](mailto:monoid@mathematik.uni-mainz.de)

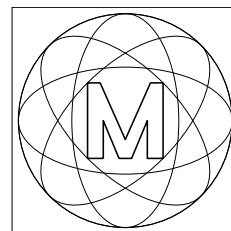
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die  
Redaktion

# Ein Euler-Quadrat für das Jahr 2016

von Hartwig Fuchs

## Das Dürer-Quadrat

Albrecht Dürer (1471–1528) gilt als einer der größten deutschen Maler. Weniger bekannt aber ist, dass er auch zu den bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit zu zählen ist.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

Er hat im Jahr 1514 seinen berühmten rätselhaften Kupferstich „Melencolia“ eines sehr nachdenklichen Engels geschaffen. Im Hintergrund des Bildes sieht man an der Wand eines Hauses ein magisches  $4 \times 4$ -Zahlenquadrat\*, für das gilt:

- (1') Jede der Zahlen 1, 2, 3, ..., 16 kommt im Quadrat vor.
- (2') Die beiden mittleren Zahlen der letzten Zeile geben zusammengelesen das Entstehungsjahr des Kupferstichs an.

## Eine Variante des Dürer-Quadrats

Es sei  $Q$  ein  $10 \times 10$ -Zahlenquadrat, für das gilt:

- (1) Jeder der Zahlen 00, 01, 02, ..., 09, 10, 11, ..., 99 kommt in  $Q$  vor.
- (2) Die beiden mittleren Zahlen der letzten Zeile bilden zusammengesetzt die vierziffrige Zahl 2016.

Anders als das Dürer-Quadrat soll das  $10 \times 10$ -Quadrat nun nicht magisch sein. Vielmehr soll es die Bedingung erfüllen:

- (3) Jede der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 kommt bei den Zahlen einer jeden Zeile von  $Q$  und ebenso einer jeden Spalte von  $Q$  genau ein Mal als Zehnerziffer und genau ein Mal als Einerziffer vor.

\* „Magisch“ bedeutet, die Summe der Zahlen jeder Zeile und Spalte sowie der Diagonalen ist gleich.

Ein Zahlenquadrat, das die Bedingungen (1) und (3) erfüllt, heißt ein „Euler-Quadrat“<sup>\*\*</sup>, denn es war Leonhard Euler (1707–1783), der in seiner Schrift „Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques“ (1782) eine Klasse von Quadraten aus  $n^2$  Elementen,  $n \neq 2$ , definierte und untersuchte, zu der auch unser  $10 \times 10$ -Quadrat  $Q$  gehört. Lange Zeit blieb die Frage unbeantwortet, ob es überhaupt Zahlenquadrate vom Typ des Quadrats  $Q$  gibt.

Erst um 1960 gelang es dem amerikanischen Mathematiker E. T. Parker, ein  $10 \times 10$ -Quadrat mit den Eigenschaften (1) und (3) zu konstruieren. Und von diesem Parker-Quadrat ist unser Euler-Quadrat mit der Jahreszahl 2016 – siehe die Titelseite – abgeleitet.

Parker entdeckte sein Quadrat mit Hilfe eines Computers und dessen Leistung ist bemerkenswert: War das Parker-Quadrat doch aus der Menge der  $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 100!$  Zahlenquadrate mit 100 Elementen herauszufiltern und nach der Formel von Sterling  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$  mit  $e \approx 2,718$  ist  $100! \approx 10^{158}$ .

## Aufgaben zum Neuen Jahr

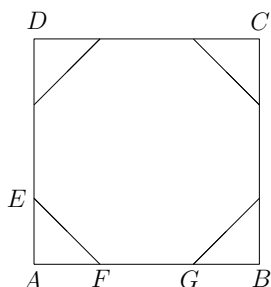
### Jahreszahlen

Berechne

$$\frac{(10^{2016} + 25)^2 - (10^{2016} - 25)^2}{(10^{2015} + 25)^2 - (10^{2015} - 25)^2}.$$

(gefunden: H.F.)

### Flächeninhalt eines Achtecks



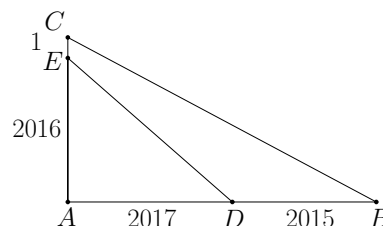
Es sei  $Q = ABCD$  ein Quadrat der Seitenlänge  $S = 12\sqrt{\frac{7}{\sqrt{2}-1}}$ .

Welchen Flächeninhalt hat das regelmäßige Achteck, das man erhält, wenn man an den Ecken von  $Q$  vier kongruente gleichschenklige Dreiecke abtrennt? (H.F.)

### Flächenvergleich

Im Dreieck  $\triangle ABC$  sei  $D$  ein Punkt der Seite  $AB$ , für den gilt:  $|AD| = 2017$  und  $|DB| = 2015$ . Ferner sei  $E$  ein Punkt der Strecke  $AC$  mit  $|AE| = 2016$  und  $|EC| = 1$ .

Zeige, dass dann gilt: Die Strecke  $DE$  halbiert die Fläche des Dreiecks  $\triangle ABC$ . (H.F.)



<sup>\*\*</sup> Gilt (3) auch noch für die beiden Diagonalen des Euler-Quadrats, so spricht man von einem Gauß-Quadrat.

## 2016 Lösungen

Zeige: Für jede Primzahl  $p \geq 3$  hat die Gleichung

$$(1) \quad (x + y)(x - y)^2 = p^{2015}$$

jeweils 2016 ganzzahlige Lösungen.

(H.F.)

*Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 34.*

### Ein Blick hinter die Kulissen Der Gedankenleser von Hartwig Fuchs

Mathis hat einen neuen numerischen Trick entdeckt, den er sogleich mit seinem Freund Matheo ausprobiert. Dazu bittet er ihn:

- a) Denke Dir eine einziffrige Zahl  $x$ .
- b) Multipliere  $x$  mit 109.
- c) Berechne die Ziffernsumme von  $x \cdot 109$  und teile mir Dein Ergebnis mit.

Dann nenne ich Dir sofort Deine gedachte Zahl  $x$ .

Tatsächlich kann Mathis bei mehreren Versuchen, die von Mathis gewählte Zahl  $x$  richtig angeben.

Wieso gelingt ihm das?

Des Rätsels Lösung:

Es ist  $x \cdot 109 = x \cdot 100 + x \cdot 9$  mit  $1 \leq x \leq 9$  und deshalb  $9 \leq x \cdot 9 \leq 81$ . Dann gilt, wenn  $Q(y)$  die Ziffernsumme der natürlichen Zahl  $y$  ist:

$$(1) \quad Q(x \cdot 109) = Q(x \cdot 100) + Q(x \cdot 9).$$

Zunächst ist  $Q(x \cdot 100) = x$ . Weiter ist  $Q(x \cdot 9) = 9$ , denn  $x \cdot 9 = (x-1) \cdot 10 + 10 - x$  mit  $0 \leq x-1 \leq 8$  und  $1 \leq 10-x \leq 9$ , sodass

$$Q(x \cdot 9) = Q((x-1) \cdot 10 + (10-x)) = Q((x-1) \cdot 10) + Q(10-x) = x-1 + 10-x = 9.$$

Wegen (1) gilt nun:

$$(2) \quad Q(x \cdot 109) = x + 9.$$

Aus (2) ergibt sich: Sobald Mathis die Zahl  $x + 9$  erfährt, kann er unmittelbar danach die von Matheo gedachte Zahl  $x$  bestimmen.

# Der Satz von Thales und seine Verwandten

## Wann ist ein Dreieck spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig?

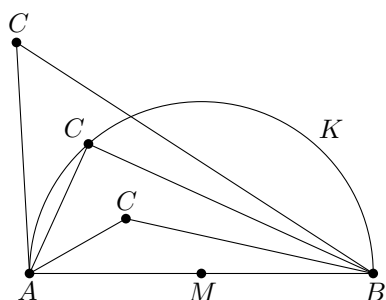
von Hartwig Fuchs

In Mathis Geometrie-Unterricht stellt der Lehrer die Aufgabe:

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$ . Seine Basis  $AB$  sei Durchmesser eines Kreises  $K$ . Was kann man dann über das Dreieck jeweils aussagen, wenn sein Eckpunkt  $C$  im Innengebiet, auf dem Rand oder im Außengebiet von  $K$  liegt?

Zu Hause begibt sich Mathis an die Bearbeitung der Aufgabe.

Als erstes fertigt er eine Zeichnung an, die die in der Aufgabe vorgegebenen Bedingungen veranschaulicht – insbesondere ist der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $AB$  der Mittelpunkt des Kreises  $K$  und  $|MA|$  ist sein Radius. Aus dieser Zeichnung liest Mathis **eine** Antwort auf die Frage des Lehrers ab:



Je nachdem ob  $C$  im Innern, auf dem Rand oder im Äußeren von  $K$  liegt, ist der Winkel bei  $C$  größer als  $90^\circ$ , möglicherweise gleich  $90^\circ$  oder kleiner als  $90^\circ$ .

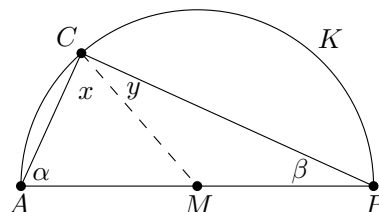
Das, was Mathis sieht, muss er natürlich beweisen.

(1) Der Punkt  $C$  liegt auf  $K$ . Dann ist  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ .

Die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  liegen nach Voraussetzung sämtlich auf  $K$ . Deshalb gilt:

(a)  $|MA| = |MC|$ ,

woraus dann  $|MB| = |MC|$  folgt. In den gleichschenkligen Dreiecken  $\triangle AMC$  und  $\triangle BCM$  gilt nun für die Winkel  $x$ ,  $y$ :  $x = \alpha$  und  $y = \beta$ . Damit hat man im Dreieck  $\triangle ABC$ :  $\alpha + \beta + x + y = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ . Also ist  $\alpha + \beta = 90^\circ$  und somit  $\sphericalangle ACB = x + y = 90^\circ$ .  $\square$

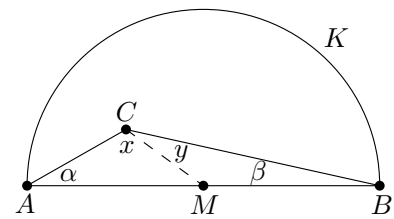


(2) Der Punkt  $C$  liegt im Inneren von  $K$ . Dann ist  $\sphericalangle ACB > 90^\circ$ .

Da der Eckpunkt  $C$  des Dreiecks  $\triangle ABC$  im Inneren von  $K$  liegt, gilt:

(b)  $|MA| > |MC|$ ,

sodass auch  $|MB| > |MC|$ . In einem Dreieck liegt nun der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber. Daraus folgt mit (b):  $x > \alpha$  und  $y > \beta$  und damit ist  $x + y > \alpha + \beta = 180^\circ - (x + y)$  oder  $2(x + y) > 180^\circ$  und daher  $\sphericalangle ACB = x + y > 90^\circ$ .  $\square$

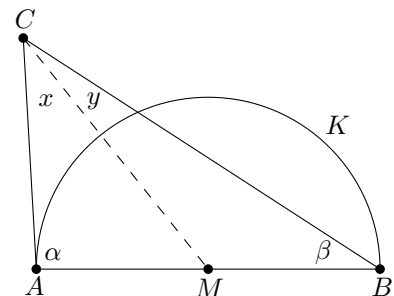


(3) Der Punkt  $C$  liegt im Äußeren von  $K$ . Dann ist  $\sphericalangle ACB < 90^\circ$ .

Für jeden Punkt  $C$  außerhalb von  $K$  gilt:

(c)  $|MA| < |MC|$ ,

also auch  $|MB| < |MC|$ . Aus (c) folgt nun  $x < \alpha$  und  $y < \beta$ . Dann ist  $x + y < \alpha + \beta = 180^\circ - (x + y)$  oder  $2(x + y) < 180^\circ$  und daher  $\sphericalangle ACB = x + y < 90^\circ$ .  $\square$



Mathis Lehrer kommentiert die Ergebnisse seines Schüler – natürlich auch lobend – so:

Mit (1) hast Du in leicht modifizierter Form einen berühmten und wichtigen Satz der elementaren Geometrie erneut bewiesen – den Satz des Thales<sup>1</sup>:

Verbindet man in einem Kreis  $K$  die Endpunkte  $A$  und  $B$  eines Durchmessers mit einem Punkt  $C$  auf dem Kreis  $K$ ,  $C \neq A$  und  $C \neq B$ , dann ist der Winkel  $\sphericalangle ACB$  ein rechter Winkel.

Danach fährt er fort: Deine Ergebnisse (2) und (3) stellen eine unmittelbare Verallgemeinerung von (1) dar – man könnte auch sagen, Du hast die nächsten Verwandten des Satz von Thales aufgespürt.

Zuletzt weist er Mathis darauf hin, dass seine Herleitungen von (1), (2) und (3) im Wesentlichen auf den Beziehungen  $|MA| = |MB|$  und (a), (b), (c) beruhen und dass es daher möglich sein sollte, die Sätze (1), (2) und (3) so zu formulieren, dass in ihnen nur noch Gegebenheiten des Dreiecks  $\triangle ABC$  vorkommen.

Und tatsächlich findet Mathis eine solche Möglichkeit.

Mathis' Ergebnis:

Für jedes Dreieck  $\triangle ABC$ , bei dem  $M$  der Mittelpunkt der Dreiecksbasis  $AB$  ist, gilt:

Wenn  $|MA| > |MC|$  ist, dann ist  $\triangle ABC$  stumpfwinklig.

Wenn  $|MA| = |MC|$  ist, dann ist  $\triangle ABC$  rechtwinklig.

Wenn  $|MA| < |MC|$  ist, dann ist  $\triangle ABC$  spitzwinklig.

<sup>1</sup> nach Thales von Milet (etwa 625–547 v.Chr., griechischer Mathematiker)

# Mathematische Entdeckungen

## Die Collatz-Folge

Die sogenannte Collatz-Folge  $d(n)$  ist für natürliche Zahlen  $n$  definiert als:

$$d(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & \text{wenn } n = 3k \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n + 1, & \text{wenn } n = 3k + 1 \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n - 1, & \text{wenn } n = 3k + 2 \text{ für eine natürliche Zahl } k \end{cases}$$

Zeige, dass die Funktion  $d$  für jede natürliche Startzahl  $n$  eine periodische Folge erzeugt! (H.F.)

*Hinweis:* Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2016 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

## Lösung der Aufgabe aus Heft 122

In Heft 122 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

### Zwölfer-Reste

Schreibe ein nicht zu kurzes Anfangsstück  $A$  der Folge aller natürlichen Quadratzahlen auf. Dividiere dann alle Zahlen aus  $A$  durch 12 und achte auf die dabei entstehenden Reste.

Erkennst du ein Muster in der Aufeinanderfolge der Zwölfer-Reste? Versuche dieses Muster mathematisch zu beschreiben. (H.F.)

### Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich Maximilian Göbel (Gymnasium Oberursel), Adriana Stenger (Karolinen Gymnasium Frankenthal) und Silas Rathke (Alexander-von-Humboldt-Gymnasium, Neumünster) beschäftigt. Alle drei kommen zu folgendem Ergebnis:

Die Zwölfer-Reste wiederholen sich periodisch und zwar bilden 1, 4, 9, 4, 1, 0 in dieser Reihenfolge eine Periode.

| natürliche Zahl $n$ | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | 11  | 12  | ... |
|---------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| Quadratzahl $n^2$   | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | ... |
| Zwölferrest         | 1 | 4 | 9 | 4  | 1  | 0  | 1  | 4  | 9  | 4   | 1   | 0   | ... |

Wir bezeichnen mit  $q_n$  die  $n$ -te natürliche Quadratzahl, wobei  $q_0 = 0$  ist. Die Zwölfer-Reste der Quadratzahlen sind ebenfalls Quadratzahlen und zwar folgendermaßen (für natürliche Zahlen  $k$ ):

$$\begin{aligned} q_{6k} &\equiv 0 \pmod{12} \\ q_{6k+1} &\equiv q_{6k+5} \equiv 1 \pmod{12} \\ q_{6k+2} &\equiv q_{6k+4} \equiv 4 \pmod{12} \\ q_{6k+3} &\equiv 9 \pmod{12} \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich die Reste-Folge 0, 1, 4, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 4, ....

**Beweis:** Wie man anhand obiger Tabelle sieht, gilt diese Folge für  $q_0$  bis  $q_5$ . Außerdem ist wegen  $x^2 - (x-6)^2 = 12x + 36 = 12x + 36 \equiv 0 \pmod{12}$ , also  $x^2 \equiv (x-6)^2 \pmod{12}$  die Reste-Folge nach dem sechsten Folgenglied periodisch. Demnach gilt die oben beschriebene Formel für alle Quadratzahlen.

## Die Aufgabe für den Computer-Fan

### Eine veränderte Collatz-Folge

Was bewirkt eine scheinbar unwesentliche Veränderung in der Aufgabe aus den mathematischen Entdeckungen in diesem Heft, wenn man die Fälle  $n = 3k + 1$  und  $n = 3k + 2$  vertauscht. Wir nennen die veränderte Funktion  $dx(n)$ . Diese sei definiert als:

$$dx(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & \text{wenn } n = 3k \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n - 1, & \text{wenn } n = 3k + 1 \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n + 1, & \text{wenn } n = 3k + 2 \text{ für eine natürliche Zahl } k \end{cases}$$

Schreibe ein Computerprogramm, mit dessen Ergebnissen Du eine Vermutung formulieren kannst.

Ein theoretischer Beweis Deiner Vermutung gibt Zusatzpunkte! (WG)

*Hinweis:* Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2016 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an [monoid@mathematik.uni-mainz.de](mailto:monoid@mathematik.uni-mainz.de) einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

# Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 122

## Verschlüsselte E-Mail

Ein Mädchen verschlüsselt seine E-Mails. Sie unterschreibt mit ihrem Vornamen HERBUCO. Bekannt ist, dass sie eine sogenannte affine Chiffre benutzt. Dabei wird der Klartextbuchstabe  $x$  mit Ordnungszahl  $O_x$  (Platzierung des Buchstaben  $x$  im Alphabet) zum chiffrierten Buchstaben  $y$ , indem man  $O_y = a \cdot O_x + b \bmod 26$  bildet. Für  $a$  und  $b$  sind nur solche natürlichen Zahlen zugelassen, die eine Umkehrung der Verschlüsselung erlauben und damit eine Entschlüsselung. Als Alphabet werden die 26 großen deutschen Buchstaben von A-Z verwendet mit Ordnungszahlen 0–25. Schreibe ein Programm, um zu herauszufinden, wie sie wirklich heißt! (WG)

## Ergebnisse

Da in der affinen Chiffre  $a$  und  $b$  unbekannt sind, muss man alle möglichen Invertierungen von ihr ausprobieren, in der Hoffnung, dabei einen deutschen Mädchennamen zu erhalten. Es kommen nur die zwölf zu 26 teilerfremden Elemente 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25 in Frage, da der Faktor  $a$  modulo 26 invertierbar sein muss. Seine multiplikativen Inversen  $a^{-1}$  sind daher 1, 9, 21, 15, 3, 19, 7, 23, 11, 5, 17, 25. Zum Beispiel ist die Inverse von  $a = 17$  dann  $a^{-1} = 23$ . Denn wenn  $y = 17 \cdot x \bmod 26$  ist, dann ist  $a^{-1} \cdot y = 23 \cdot 17 \cdot x \bmod 26 = x \bmod 26$ . Die Summandenmenge für  $b$  besteht aus den 26 Zahlen von 0 bis 25. Insgesamt gibt es also  $12 \cdot 26 = 312$  Möglichkeiten für eine invertierbare affine Abbildung.

Gilt  $y = a \cdot x + b$  ist, dann ist  $a^{-1} \cdot (y - b) = a^{-1} \cdot (a \cdot x + b - b) = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = x$ . Diese wird auf jeden Buchstaben der Chiffre angewendet. Für  $a = 17$  und  $b = 12$  ist die Entschlüsselung von HERBUCO daher XQDOJKUW, was offensichtlich nicht in Frage kommt. Ergibt sich dabei jedoch ein deutscher Mädchennamen, so hat man den richtigen Klartext gefunden. Dies geschieht bei  $a = 15$  und  $b = 14$  mit der Inversen  $a^{-1} = 7$ . Listet man alle 312 Invertierungen auf, so erhält man nur einen einzigen sinnvollen Namen, nämlich **VERONIKA**.

Dies haben auch die Schüler Silas Rathke von der Alexander-von-Humboldt-Schule in Neumünster, Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey und Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal herausgefunden. Marcel begründet die 312 Möglichkeiten sogar mit einem Beweis, bei dem er den Euklidischen Algorithmus verwendet. Darüber hinaus benutzt er eine Datei mit 1122 gängigen Mädchennamen, um das richtige Ergebnis heraus zu finden. Maximilian leitet zusätzlich die allgemeine Gleichung für die Inverse der affinen

Abbildung her. Silas beschränkt sich auf ein Programm, bei dem die richtigen 312 entschlüsselten Namen am Bildschirm ausgegeben werden; es fehlt noch die Selektion der einzigen Lösung. (WG)

## Was uns so über den Weg gelaufen ist Eine sehr einfache Multiplikation von Hartwig Fuchs

Es wird wohl manch einen unter unseren Lesern geben, der die Bruchrechnung in der Schule als eine numerisch nicht ganz einfache Angelegenheit in Erinnerung hat.

Umso mehr wird es ihn daher überraschen, dass man den Wert des nachfolgenden faktorreichen Produktes rationaler Zahlern ohne numerische Rechnung bestimmen kann.

Es sei  $P = 2 \cdot (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \dots (1 - \frac{1}{2015^2})$ . Dann ist  $P = \frac{2015}{2016}$ .

Man sieht das ohne Computer, ja sogar praktisch ohne Kopfrechnen so:

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015}\right) \left(1 - \frac{1}{2015}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2016}{2015} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2014}{2015} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2016}{1} \cdot \frac{1}{2015} = \frac{2016}{2015}. \end{aligned}$$

## Trugschluss Die Schnecke im Brunnen von Hartwig Fuchs

Eine 5cm lange Schnecke liegt am Boden eines 10m tiefen Brunnens. Um ihn zu verlassen, klettert sie tagsüber 2m hoch – nachts jedoch rutscht sie wieder 1m nach unten. Nach wie vielen Tagen kommt die Schnecke aus dem Brunnen?

Lösung: Da sie im Laufe von 24 Stunden genau 1m an Höhe gewinnt, befindet sie sich nach acht Tagen insgesamt 8m über dem Boden des Brunnens. Am neunten Tag klettert sie zunächst 2m hoch. Damit erreicht sie den Brunnenrand und sie kann daher am neunten Tag den Brunnen verlassen.

Falsch! Wieso?

## Lösung

Nach acht Tagen befindet sich die Schnecke 8m über dem Boden des Brunnens. Am neunten Tag klettert sie 2m höher und erreicht den Brunnenrand. Damit aber kann sie den Brunnen nicht verlassen – denn sie muss dazu weitere 5cm klettern (ihre eigene Länge). Deshalb rutscht sie nachts um 1m tiefer. Erst am zehnten Tag – nachdem sie 1,05cm hoch geklettert ist, kann sie den Brunnen verlassen. Genauer:

Wenn die Schnecke ihr Kletterprogramm jeweils um 6 Uhr morgens beginnt und sie 2m in 12 Stunden, also 1,05cm in 6 Stunden und 18 Minuten zurücklegt, dann kann sie am zehnten Tag um 12 : 18 Uhr den Brunnen verlassen.

## Durch Widersprüche zur Erkenntnis

von Hartwig Fuchs

### Widersprüche

Für die Mathematik hat das Wort *Widerspruch* eine eingeschränktere Bedeutung, als es sie in der Alltagssprache hat.

Reagiert jemand auf den Befehl „Tu das!“ mit der Antwort „Nein!“, so ist das „Nein!“ umgangssprachlich ein Widerspruch zu dem zuvor ergangenen Befehl. In der Mathematik jedoch spricht man nur dann von einem Widerspruch, wenn man von einer Aussage  $A$  und ihrer Negation  $\bar{A}$  feststellen muss, dass beide Aussagen wahr sind.

Wenn also jemand behauptet, die Aussage „ $\sqrt{2}$  ist eine rationale Zahl“ sei wahr, dann steht das im Widerspruch zu der längst bewiesenen gegenteiligen Aussage „ $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl“.

Da nun in der Mathematik Widersprüche nicht geduldet werden, sollte man meinen, dass sie nur eine geringe Rolle bei der mathematischen Arbeit spielen. Das Gegenteil ist der Fall. Bereits die griechischen Mathematiker der Antike – allen voran Euklid von Alexandria – haben mit ihnen eine der schärfsten und erfolgreichsten mathematischen Waffen entwickelt: den *Widerspruchsbeweis* (auch indirekter Beweis genannt).

### Widerspruchsbeweise

Ein Widerspruchsbeweis läuft nach dem folgenden Muster ab:

Es sei eine Behauptung (Aussage)  $A$  zu beweisen.

Man versucht dann nachzuweisen, dass das Gegenteil  $\bar{A}$  von  $A$  falsch ist.

Daraus lässt sich dann folgern, dass  $A$  wahr und damit bewiesen ist.

Es sollen nun zwei typische Verläufe eines Widerspruchsbeweises beschrieben und begründet werden.

Es sei zu beweisen, dass die Aussage  $A$  wahr ist.

Dazu geht man bei einem Widerspruchsbeweis vom Gegenteil  $\bar{A}$  aus und macht die

(1) Annahme: Die Aussage  $\bar{A}$  ist wahr.

Mit  $\bar{A}$  als Voraussetzung leitet man dann eine geeignete Aussage  $A_n$  her, indem man eine Kette  $K$  von Aussagen  $A_1, A_2, \dots$  mit  $A_n$  als letzter Aussage durch korrekte logische Schlüsse konstruiert.

$$K : \bar{A} \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow \dots \Rightarrow A_n.$$

Die Regeln der Logik sind nun so beschaffen, dass für jeden logischen Schluss und damit auch für jede endliche Schlusskette  $K$  gilt:

( $G_1$ ) Aus wahren Aussagen folgen stets wahre Aussagen.

Aus (1) und ( $G_1$ ) folgt: Alle Aussagen der Kette  $K$  sind wahr; insbesondere gilt:

(2) Die Aussage  $A_n$  der Kette  $K$  ist wahr.

Wenn man nun  $A_n$  einer der beiden folgenden Bedingungen (3) und (4) unterwirft, dann ergeben sich so zwei verschiedene Schlussketten, mit denen man das Prinzip des Widerspruchsbeweises für zwei seiner wichtigsten Anwendungsmöglichkeiten begründen kann.

(3)  $A_n$  und die zu beweisende Aussage  $A$  stimmen überein.

Oder:

(4)  $A_n$  ist eine Aussage, von deren Negation  $\bar{A}_n$  feststeht, dass sie wahr ist.

Fall (3):

Nach der Annahme (1) ist  $\bar{A}$  wahr. Zugleich ist auch  $A$  wahr wegen  $A_n = A$  und (2). Man hat also einen Widerspruch.

Nun ist aber durch den logischen Grundsatz vom *ausgeschlossenen Widerspruch* festgelegt:

( $G_2$ ) Eine Aussage und ihre Negation sind nicht beide wahr.

Nach ( $G_2$ ) sind also  $A$  und  $\bar{A}$  nicht beide wahr. Wäre nun  $\bar{A}$  wahr, so wäre auch  $A_n$ , also auch  $A$  wahr wegen ( $G_1$ ). Daher kann  $\bar{A}$  nicht wahr sein. Daraus folgt jedoch nicht(!), dass  $\bar{A}$  falsch ist. Das ergibt sich erst aus dem logischen Grundsatz vom *ausgeschlossenen Dritten*:

( $G_3$ ) Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch – ein Drittes gibt es nicht.

Da  $\bar{A}$  nicht wahr ist, muss  $\bar{A}$  nach ( $G_3$ ) falsch sein. Dann folgt aus ( $G_2$ ), dass  $A$  nicht falsch und mithin nach ( $G_3$ ) wahr ist – q.e.d.

## Beispiel

Im Quadrat  $\square ABCD$  sei ein Punkt  $P$  so gewählt, dass das Dreieck  $\triangle ABP$  gleichschenkelig und der Winkel  $\sphericalangle PAB$   $15^\circ$  groß ist. Dann ist das Dreieck  $\triangle CDP$  gleichseitig.

Nachweis:

Es seien  $|AB| = s$  und  $|CP| = |DP| = t$  gesetzt. Es ist dann zu zeigen, dass gilt:  $s = t$ .

Wir setzen voraus, das Gegenteil sei wahr:

*Annahme:* Es gilt  $s \neq t$ .

1. Fall: Es sei  $s > t$ .

Zunächst ist  $\sphericalangle DAP = 75^\circ$  und  $\sphericalangle APB = 150^\circ$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die in die Figur eingezeichneten Winkel. Dann gilt:

$$(a) \quad \alpha + 2\gamma + 150^\circ = 360^\circ, \text{ sodass } \alpha = 210^\circ - 2\gamma \text{ ist.}$$

Im Folgenden benötigen wir den Satz:

- (b) Im Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.

Für das Dreieck  $\triangle APD$  folgt aus  $s > t$  wegen (b), dass  $\gamma > 75^\circ$  ist und aus (a) erhält man damit  $\alpha < 60^\circ$ . Im Dreieck  $\triangle CDP$  ist dann  $\beta > 60^\circ$  und aus  $\alpha < \beta$  folgt aus (b), dass  $s < t$  ist – ein Widerspruch.

2. Fall: Es sei  $s < t$ .

Im Dreieck  $\triangle APD$  gilt dann  $\gamma < 75^\circ$ , woraus mit (a) folgt, dass  $\alpha > 60^\circ$  ist. Im Dreieck  $\triangle CDP$  ist dann  $\beta < 60^\circ$  und aus  $\alpha > \beta$  ergibt sich aus (b), dass  $s > t$  gilt – ein Widerspruch.

Die in beiden Fällen auftretenden Widersprüche zeigen, dass weder  $s > t$  noch  $s < t$  gilt und das bedeutet, dass  $s = t$  ist. Das letzte aber steht im Widerspruch zur Annahme  $s \neq t$ . Also ist die Annahme falsch, es gilt die Behauptung  $s = t$  und daher ist das Dreieck  $\triangle CDP$  gleichseitig.

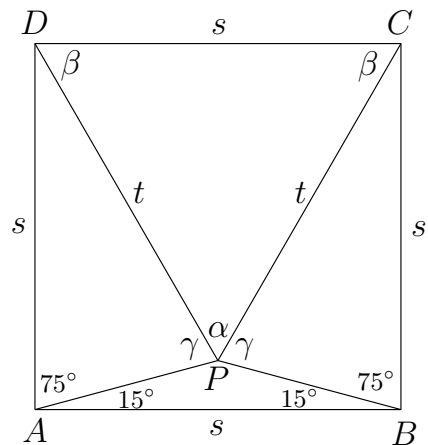
Nun zu Fall (4):

Nach Annahme (1) ist  $\bar{A}$  wahr. Weil nun aber  $\bar{A}_n$  wahr ist nach (4), folgt aus  $(G_2)$ , dass  $A_n$  nicht wahr und somit nach  $(G_3)$  falsch ist. Dann aber erzwingt  $(G_1)$ , dass  $\bar{A}$  nicht wahr sein kann, also nach  $(G_3)$  falsch ist – woraus dann mit  $(G_2)$  und  $(G_3)$  folgt, dass  $A$  wahr ist, q.e.d.

## Beispiel

Es sei  $M = \{2, 3, 4, \dots, 2016\}$ . Man zeige: Wenn man aus  $M$  beliebige 15 teilerfremde\* Zahlen entnimmt, dann befindet sich darunter stets eine Primzahl.

\* Zwei natürliche Zahlen  $n$  und  $m$  sind teilerfremd, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler 1 ist.



Lösung:

*Annahme:* Man kann in 15 teilerfremde Zahlen in  $M$  finden, von denen keine eine Primzahl ist.

Es seien  $n_1, n_2, \dots, n_{15}$  lauter verschiedene teilerfremde und nichtprime Zahlen aus  $M$ . Dann gilt für  $i = 1, 2, \dots, 15$ :

Jede Zahl  $n_i$  hat eine Produktdarstellung  $n_i = p_i P_i$ ,  $p_i$  der kleinste Primteiler von  $n_i$  und somit  $P_i$  eine Zahl  $\geq p_i$ . Die  $p_i$  sind alle verschieden, weil die  $n_i$  teilerfremd sind.

Es sei nun  $p_m$  die größte der Primzahlen  $p_i$ .

Da in der Folge 2, 3, 5, 7, ... aller Primzahlen das 15. Element 47 ist, gilt  $p_m \geq 47$  und deshalb ist  $n_m = p_m P_m \geq 47 \cdot 47 > 2016$ .

Die Aussage  $n_m > 2016$  widerspricht nun der Aussage, dass  $n_m$  ein Element der Menge  $M$  ist und mithin  $n_m \leq 2016$  sein muss.

Dieser Widerspruch – vergleiche oben Fall (4) – zeigt, dass die Annahme falsch ist. Somit gilt die Behauptung.

Das vorangegangene Beispiel vermittelt einen wenn auch nur schwachen Eindruck von der Leistungsfähigkeit des *Widerspruchsprinzips* – gestattet es doch die dort gestellte Aufgabe in einigen Zeilen zu lösen, während man bei der Überprüfung jedes einzelnen 15-Tupels insgesamt  $2014 \cdot 2013 \cdot \dots \cdot 2000 \approx 3 \cdot 10^{49}$  Nachweise von Teilerfremdheit und Primalität zu führen hätte.

Seine Bedeutung für die Mathematik geht jedoch weit darüber hinaus. Tatsächlich ist es unentbehrlich für die Arbeit eines Mathematikers.

Wir können darauf hier nicht näher eingehen. Seine Bedeutung lässt sich jedoch an einigen damit bewiesenen berühmten Theoremen – die als Höhepunkt der Mathematik gelten – erahnen:

- Euklids Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
- Cantors Nachweis mit seinem „Diagonalverfahren“, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.
- Brouwers Fixpunkt-Satz, dass bestimmte wichtige Abbildungen stets einen Fixpunkt besitzen.
- Cantors Mächtigkeits-Satz, dass es unendlich viele verschiedene Unendlichkeiten gibt.

# Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 123

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

## I. Raben-Zählung

Auf den zwölf Ästen eines Baumes sitzen insgesamt 121 Raben.

Begründe, dass auf mindestens einem Ast mehr als zehn Raben sitzen. (H.F.)

*Lösung:*

Annahme: Auf jedem Ast sitzen höchstens zehn Raben. Dann ist die Gesamtzahl der Raben  $\leq 12 \cdot 10 = 120$  – ein Widerspruch, denn im Baum sitzen 121 Raben. Daraus folgt: Auf mindestens einem Ast sitzen mehr als zehn Raben.

## II. Alles Käse

Camembert setzt sich aus einer Trockenmasse und Wasser zusammen.

Neulich kaufte ich einen französischen Camembert mit den Angaben: „45% Fett i.T. = 20% Fett absolut“.

Wie hoch ist in diesem Camembert der Wasseranteil an der gesamten Käsemasse?(WJB)

*Lösung:*

Sind  $W$  der Wassergehalt und  $T$  die Trockenmasse, so suchen wir nach  $\frac{W}{W+T}$ .

Laut Herstellerangaben gilt  $0,45T = 0,20(W + T)$ . Folglich gilt  $0,45T = 0,20W + 0,20T \iff 0,25T = 0,20W \iff \frac{0,25}{0,20} \cdot T = \frac{5}{4}T = W$ .

In das gesuchte Verhältnis eingesetzt ergibt sich:

$$\frac{W}{W+T} = \frac{\frac{5}{4}T}{\frac{5}{4}T + T} = \frac{\frac{5}{4}T}{\frac{9}{4}T} = \frac{5}{9}.$$

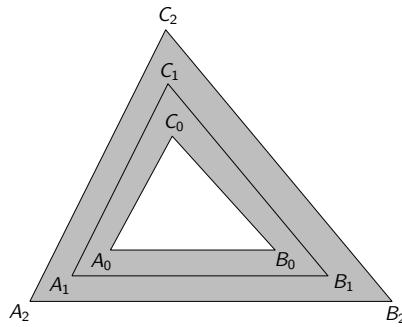
Der Wasseranteil in der Käsemasse ist also  $\frac{5}{9}$ .

Etwas kürzer erhalten wir, wenn wir aus den Herstellerangaben  $0,45T = 0,20(W + T) \iff \frac{T}{W+T} = \frac{0,20}{0,45} = \frac{4}{9}$  folgern und im gesuchten Verhältnis 0 addieren (ein Standard, „trick“):

$$\frac{W}{W+T} = \frac{W+T-T}{W+T} = \frac{W+T}{W+T} - \frac{T}{W+T} = 1 - \frac{T}{W+T} = 1 - \frac{0,20}{0,45} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

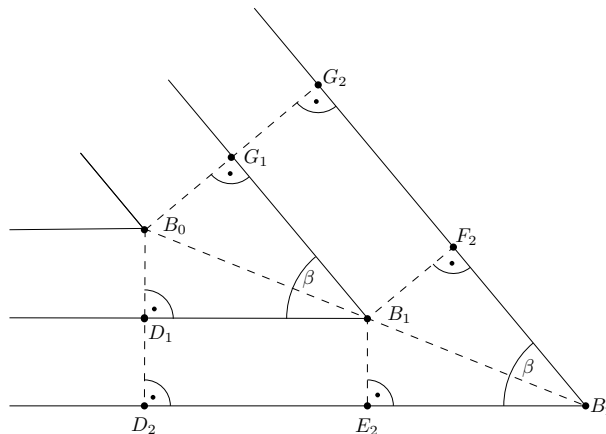
## III. Dreiecke im Abstand 1

Das Dreieck  $D_1 = \triangle A_1B_1C_1$  hat die Seitenlängen  $a_1 = 11\text{cm}$ ,  $b_1 = 9\text{cm}$ ,  $c_1 = 10\text{cm}$ . Die Seiten des inneren Dreiecks  $D_0 = \triangle A_0B_0C_0$  und des äußeren Dreiecks  $D_2 = \triangle A_2B_2C_2$  haben jeweils einen Abstand von 1cm zum mittleren Dreieck  $D_1$ . Wie groß ist die schattierte Fläche zwischen  $D_0$  und  $D_2$ ? (WG)



*Lösung:*

Betrachte den folgenden Ausschnitt:



Die Abstände  $B_0G_1$ ,  $B_0D_1$ ,  $B_1E_2$  und  $B_1F_2$  sind jeweils gleich 1cm. Ebenso sind die beiden Abstände  $B_0G_2$  und  $B_0D_2$  gleich 2cm. Deshalb sind die drei Geraden  $B_0B_1$ ,  $B_1B_2$  und  $B_0B_2$  gleich der Winkelhalbierenden des Winkels  $\beta$ .

Wegen dieser Eigenschaft lassen sich die drei Trapeze  $C_2A_2A_0C_0$ ,  $A_2B_2B_0A_0$  und  $B_2C_2C_0B_0$ , die die schattierte Fläche bilden, so aneinanderlegen, dass ein Trapez der Höhe 2cm und mit Mittelparallele der Länge  $b_1 + c_1 + a_1 = 30\text{cm}$  entsteht.



Daher ist die schattierte Fläche  $60\text{cm}^2$  groß.

#### IV. Auf dem Campingplatz

Auf dem Campingplatz soll Sara vom Brunnen vier Liter Wasser holen. Dazu gibt ihre Mutter ihr einen Fünf-Liter-Eimer und einen Drei-Liter-Eimer mit. Sara kommt tatsächlich mit vier Litern Wasser zurück. Wie konnte sie das schaffen?(gefunden: WJB)

*Lösung:*

Sara füllt zuerst den großen Eimer. Dann aus diesem den kleinen. Diesen schüttet sie aus. Nun hat sie im großen Eimer zwei Liter Wasser und schüttet diese in den

kleinen Eimer, sodass in diesem Eimer nun noch Platz für einen weiteren Liter Wasser ist. Füllt sie dann den großen Eimer wieder mit fünf Litern und aus diesem den kleinen Eimer, so verbleiben im großen Eimer exakt vier Liter.

## V. Wahrscheinlichkeit

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Menge  $\{1, 2, \dots, 2015\}$  entnommene Zahl

- a) ein Vielfaches von 3 und von 4, nicht aber von 5 ist?
- b) ein Vielfaches von 3 oder von 4, nicht aber von 5 ist? (H.F.)

*Lösung:*

Mit  $\lfloor a \rfloor$  sei die größte ganze Zahl  $\leq a$  bezeichnet; zum Beispiel ist  $\lfloor 7,65 \rfloor = 7$ .

- a) Es gibt  $\lfloor 2015 : (3 \cdot 4) \rfloor = 167$  Zahlen  $\leq 2015$ , die Vielfache von 3 und 4 sind. Unter diesen 167 Zahlen befinden sich noch  $\lfloor 2015 : (3 \cdot 4 \cdot 5) \rfloor = 33$  Zahlen, die Vielfache von 5, also auch von 3, 4 und 5 sind. Daher gibt es  $167 - 33 = 134$  Zahlen, für die a) gilt. Somit ist  $\frac{134}{2015} \approx 0,067$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl  $\leq 2015$  Bedingung a) erfüllt.

- b) Es gibt  $\lfloor 2015 : 3 \rfloor = 671$  Vielfache von 3, die  $\leq 2015$  sind; es gibt  $\lfloor 2015 : 4 \rfloor = 503$  Vielfache von 4, die  $\leq 2015$  sind. Unter diesen  $671 + 503 = 1174$  Zahlen sind die 167 Zahlen, welche Vielfache von 3 und 4 sind, doppelt gezählt. Und von den  $1174 - 167 = 1007$  Zahlen sind nun noch diejenigen Zahlen wegzulassen, die Vielfache von 5 und daher Vielfache von 3 und von 5 oder Vielfache von 4 und von 5 sind.

Das sind wegen  $\lfloor 2015 : (3 \cdot 5) \rfloor = 134$  und wegen  $\lfloor 2015 : (4 \cdot 5) \rfloor = 100$  zunächst 234 Zahlen – von denen jedoch die Vielfachen von 3, 4 und 5 und damit 33 doppelt gezählt sind.

Somit gibt es  $1007 - 134 - 100 + 33 = 806$  Zahlen, für die b) gilt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl  $\leq 2015$ , die Bedingung b) erfüllt, ist folglich  $\frac{806}{2015} = 0,4$ .

## VI. Teileranzahl

Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl  $n = 174\,636\,000$ ? (H.F.)

*Lösung:*

Es ist  $n = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ . Jeder Teiler von  $n$  hat die Form  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$ , wobei die möglichen Werte für  $a, b, c, d, e$  sind:  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $c \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $d \in \{0, 1, 2\}$ ,  $e \in \{0, 1\}$ , das heißt es gibt sechs Möglichkeiten für  $a$ , fünf für  $b$ , vier für  $c$ , drei für  $d$  und zwei für  $e$ .

Daher hat  $n$  genau  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$  verschiedene Teiler.

Ganz entsprechend hat eine Zahl  $n$  mit der Primzahlenprodukt-Darstellung  $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$  genau  $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_r + 1)$  verschiedene Teiler.

## VII. Einerziffer einer Quadratzahlensumme

Bestimme die Einerziffer der Summe der Quadratzahlen  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2015^2$ . (H.F.)

*Lösung:*

Mit  $E[n]$  sei die Einerziffer der natürlichen Zahl  $n$  bezeichnet. Dann gilt:

$$E[1^2 + 2^2 + \dots + 10^2] = E[1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100] = 5$$

$$E[11^2 + 12^2 + \dots + 20^2] = 5$$

$\vdots$

$$E[2001^2 + \dots + 2010^2] = 5$$

$$E[2011^2 + \dots + 2015^2] = E[1 + 4 + 9 + 16 + 25] = 5.$$

Damit folgt:  $E[1^2 + 2^2 + \dots + 2015^2] = E[202 \cdot 5] = 0$ .

## Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

### I. Wahr oder falsch?

Es seien  $n_1, n_2, n_3, n_4$  unmittelbar aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen. Dann ist  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 + 1$  stets eine Quadratzahl. Trifft das zu? (H.F.)

### II. Buchstabensuppe

Wie geht es weiter? Und warum?

a)

|       |   |   |   |   |   |  |   |
|-------|---|---|---|---|---|--|---|
| A     |   |   |   | E | F |  | H |
| <hr/> |   |   |   |   |   |  |   |
|       | B | C | D |   |   |  | G |

b)

|       |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| A     |   |   |   |   | F |   | H |
| <hr/> |   |   |   |   |   |   |   |
|       | B | C | D | E |   | G |   |

Gib jeweils die drei nächsten Buchstaben an.

(WJB)

### III. Eine geometrische Knebeli

Kannst Du in der Ebene acht Geraden so zeichnen, dass gilt:

- Die acht Geraden schneiden sich in genau neun Punkten?
- Sie schneiden sich in genau zehn Punkten?

- c) Sie schneiden sich in elf Punkten?  
 d) Beantworte die Fragen b) und c) auch für neun Geraden! (H.F.)  
*Hinweis:* Eine korrekte Zeichnung genügt als Lösung.

#### IV. Aufregung im Märchenwald

Im Märchenwald ist die Aufregung groß: Die goldene Kugel des Froschkönigs wurde gestohlen. Der König möchte, dass der Dieb schnellstmöglich überführt wird und beauftragt seinen Hofmarschall, Ermittlungen durchzuführen. Dieser befragt nun mögliche Zeugen.

Schneewittchen sagt: „Schau Aschenputtel nicht so böse an. Sie war es nicht!“

Aschenputtel schreit: „Ich weiß genau, dass es Pinocchio war!“

Der gestiefelte Kater meint: „Pinocchio war es nicht!“

Pinocchio ruft: „Es war Schneewittchen! Ich schwör's!“

Als der Hofmarschall wieder in seinem Büro sitzt und ratlos über die vier Aussagen nachdenkt, kommen Hänsel und Gretel herein: „Als wir gestern auf dem Heimweg durch den Wald waren, haben wir etwas beobachtet. Na ja... wir möchten ja niemanden verraten, aber wir können so viel sagen: Nur drei von ihnen sagen die Wahrheit...“

- a) Der Hofmarschall kann nun den Fall lösen und weiß, wer gelogen und wer gestohlen hat. Zu welchem Ergebnis ist er gekommen?  
 b) Um wie viele Zentimeter ist Pinocchios Nase gewachsen? (MG)

#### V. Einerziffer einer Summe mit 2016 Summanden

Welches ist die Einerziffer der Summe  $9^1 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{2016}$ ? (H.F.)

#### VI. Nichtnegatives Produkt

Für welche negativen Zahlen  $n$  ist das Produkt  $P = n(n+3)(n+7)$  nicht negativ? (WJB)

#### VII. Quersummen und Querprodukte

Die Quersumme (Ziffernsumme) einer Zahl ist die Summe aller ihrer Ziffern, das Querprodukt (Ziffernprodukt) entsprechend das Produkt aller Ziffern der Zahl, zum Beispiel hat 125 die Quersumme  $1+2+5 = 8$  und das Querprodukt  $1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$ . – Gib begründet

- a) die kleinste Zahl mit Quersumme 2016,  
 b) die kleinste Zahl mit Querprodukt 2016 sowie  
 c) jeweils die größte Zahl mit Quersumme beziehungsweise Querprodukt 2016 an. (MG)

# Neue Aufgaben

Klassen 9–13

## Aufgabe 1141: Ist 2025 wirklich eine besondere Zahl?

In dem Science-Fiction-Roman „Jenseits des blauen Horizonts“ von Frederik Pohl wird behauptet, die Zahl 2025 sei eine ganz besondere Zahl, weil sie gleichzeitig die Summe

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3$$

und das Quadrat der Summe

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9$$

ist. Was ist davon zu halten?

Hier eine Vorgehensweise, um diese Frage zu klären:

a) Berechne die Summe

$$T_n := 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

sowie das Quadrat der Summe

$$S_n := 1 + 2 + \dots + n$$

nicht nur für  $n = 9$ , sondern auch für  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  usw. (solange es halt Spaß macht). Welche Vermutung drängt sich auf?

b) Beweise Deine Vermutung. (H.P. Heinz)

*Hinweis:* Dabei kann man die bekannte Tatsache benutzen, dass  $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$  ist.

## Aufgabe 1142: Eine Summe

Berechne die Summe

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}.$$

(H.F.)

## Aufgabe 1143: Polygone der Oberfläche eines Polyeders

Jedes konvexe Polyeder – dessen Oberfläche also aus Polygonen zusammengesetzt ist – hat mindestens zwei Seitenflächen mit der gleichen Kantenzahl. Zeige dies. (H.F.)

## Aufgabe 1144: Zahlen mit Ziffern 1

Wie viele natürliche Zahlen  $< 1\,000\,000$  gibt es, welche die Ziffer 1 mindestens ein Mal besitzen? (H.F.)

## Aufgabe 1145: Drei mal drei macht... – Teil 3 von 3

Stelle die Zahlen 9 bis 12 mit genau drei Dreien dar.

Du darfst dazu alle beliebigen aus der Schulmathematik bekannten mathematischen Zeichen verwenden, aber keine weiteren Zahlen.

Beispiel:  $0 = (3 - 3) \cdot 3$  (MG)

### Aufgabe 1146: Wahrscheinlichkeit einer Einerziffer

Es sei  $S_n = 1^n + 3^n + 5^n + 7^n + 9^n$  für jedes  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Man bestimme die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass für ein beliebig gewähltes  $n$  die Zahl  $S_n$  die vorgegebene Einerziffer  $z$ ,  $z \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  hat. (H.F.)

### Aufgabe 1147: Überschwemmung?

Bei einer maximalen Tiefe von circa 250m hat der Bodensee eine Oberfläche von circa  $540\text{km}^2$ . In Deutschland leben zur Zeit circa 80 Millionen Menschen.

Um wieviel stiege der Wasserspiegel des Bodensees, wenn alle 80 Millionen Menschen gleichzeitig im Wasser untertauchen.

Schätze zuerst und lasse Dich dann von Deiner Berechnung überraschen. (WJB)

*Hinweis:* Nimm der Einfachheit halber an, das Durchschnittsgewicht der Menschen in Deutschland sei 50kg. Da die Dichte des Menschen etwa der Dichte von Wasser entspricht, hat ein Mensch ungefähr ein Volumen von 50l.

## Gelöste Aufgaben aus MONOID 123

Klassen 9–13

### Aufgabe 1134: Verdünnter Essig

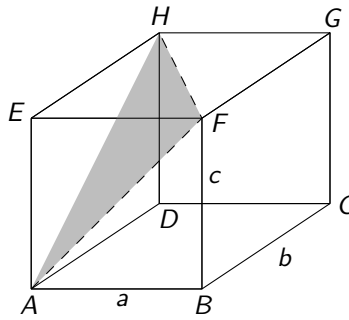
Für die Reinigung eines Geräts soll ein Teil Essig mit drei Teilen Wasser gemischt werden. Frau Klein nimmt an, dass mit Essig eine Mischung mit 5% Essigsäure gemeint ist, hat aber nur Essigessenz mit 25% Essigsäure bei der Hand. Wie viele Teile Wasser muss sie mit einem Teil Essigessenz mischen? (WJB)

*Lösung:*

Für die Reinigung wird bei Verwendung von 5%igem Essig ein Mischverhältnis  $\frac{\text{Wasser}}{\text{Essigsäure}} = \frac{3+0,95}{0,05} = 79$  vorgeschlagen. Gesucht ist die Anzahl  $x$  der Teile Wasser bei der Verwendung von 25%igem Essig, welche das gleiche Verhältnis liefert, also  $\frac{x+0,75}{0,25} = 79$ , woraus  $x = 19$  folgt.

### Aufgabe 1135: Winkel im Würfel

Wie groß ist der Winkel  $\alpha = \sphericalangle HFA$  im Würfel  $ABCDEFGH$  ( $a = b = c$ )? (WG)



*Lösung:*

Generell gilt:  $|HF| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $|AF| = \sqrt{a^2 + c^2}$ ,  $|AH| = \sqrt{b^2 + c^2}$ . Für den Würfel ist nun  $|HF| = |AF| = |AH| = \sqrt{2} \cdot a$ , das Dreieck  $\triangle AFH$  ist also gleichseitig und somit  $\alpha = 60^\circ$ .

*Alternative Lösung:* Die drei Seiten  $AF$ ,  $FH$  und  $HA$  des Dreiecks  $\triangle AFH$  sind jeweils die Diagonale einer der Würfelseiten. Damit sind alle Seiten gleich lang und das Dreieck gleichseitig. Somit ist  $\alpha = 60^\circ$ .

### Aufgabe 1136: Frosch-Sprünge

In einer Ebene, die mit einem  $x,y$ -Koordinaten-System versehen ist, sitzt ein Frosch, der sein Sprungtraining nach mathematischen Regeln betreibt.

- Sein erstes Trainingsprogramm besteht aus Sprüngen längs der  $x$ -Achse, wobei er weder vom Punkt  $(0,0)$  noch vom Punkt  $(1,0)$  aus startet. Seine Sprungregel lautet: Springe vom Punkt  $(x,0)$  zum Punkt  $(\frac{1}{1-x},0)$ . Die nach dieser Regel möglichen Sprungfolgen findet er allesamt langweilig. Warum wohl?
- Sein nächstes Übungsprogramm läuft nach der folgenden Regel ab: Springe vom Punkt  $(x,y)$  zum nächsten Punkt  $(y, y-x)$ . Auch bei so möglichen Springfolgen ist der Frosch bald gelangweilt. Weshalb diesmal?
- Nun ist die Springregel: Springe von einem Punkt  $(x,y)$ , der auf keiner Koordinatenachse liegt, zum nächsten Punkt  $(\frac{y}{x}, \frac{1}{y})$ . Warum kann er dann nicht beliebig viele Sprünge machen, falls die  $y$ -Koordinate seines Startpunktes  $\neq 1$  ist? (H.F.)

*Lösung:*

- Für einen Startpunkt  $(x,0)$  gilt:  $x \neq 0$  und  $x \neq 1$ . Nach der Regel ist dann:

$$(x,0) \rightarrow \left(\frac{1}{1-x}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}, 0\right) = \left(\frac{x-1}{x}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}, 0\right) = (x,0).$$

Nach drei Sprüngen ist der Frosch wieder am Startpunkt.

- Eine Sprungfolge mit dem Startpunkt  $(x,y)$  ist nach der Sprungregel:

$$(x,y) \rightarrow (y, y-x) \rightarrow (y-x, -x) \rightarrow (-x, -y) \rightarrow (-y, x-y) \rightarrow (x-y, x) \rightarrow (x,y).$$

Nach sechs Sprüngen hat der Frosch längs eines Sechsecks wieder den Startpunkt erreicht.

c) Für einen Startpunkt  $(x, y)$  mit  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$  ist die Sprungfolge:

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{y}\right) \rightarrow \left(\frac{\frac{1}{y}}{\frac{y}{x}}, \frac{1}{\frac{1}{y}}\right) = \left(\frac{x}{y^2}, y\right) \rightarrow \left(\frac{y^3}{x}, \frac{1}{y}\right) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \left(\frac{x}{y^{2n}}, y\right) \rightarrow \left(\frac{y^{2n+1}}{x}, \frac{1}{y}\right) \rightarrow \dots$$

Falls nun  $y > 1$  (beziehungsweise  $y < 1$ ) ist, dann gibt es Exponenten  $2n$  und  $2n + 1$ , sodass der Abstand der Punkte  $\left(\frac{y^{2n+1}}{x}, \frac{1}{y}\right)$  und  $\left(\frac{x}{y^{2n}}, y\right)$  zu groß für das Sprungvermögen des Froschs ist – es sei denn, unser Frosch hätte ein unendlich großes Sprungvermögen, was man bei einem Frosch nicht annehmen kann.

Ist zum Beispiel  $y = 1,01$  und  $x = 1$  und  $2n = 5000$ , dann haben die Punkte  $\left(1,01^{5001}, \frac{1}{1,01}\right) \approx (4 \cdot 10^{21}, 1)$  und  $\left(\frac{1}{1,01^{5000}}, 1,01\right) \approx (0, 1)$  einen Abstand von ungefähr  $4 \cdot 10^{21}$ .

### Aufgabe 1137: Drei mal drei macht... – Teil 2 von 3

Stelle die Zahlen 5 bis 8 mit genau drei Dreien dar.

Du darfst dazu alle beliebigen aus der Schulmathematik bekannten Rechenoperationen verwenden, aber keine weiteren Zahlen.

Beispiel:  $0 = (3 - 3) \cdot 3$  (MG)

Lösung:

a)  $5 = \frac{3!}{3} + 3 = 3! - \frac{3}{3}$

b)  $6 = 3 \cdot 3 - 3 = 3! \cdot \frac{3}{3} = \sqrt[3]{(3!)^3} = \left(\frac{3!}{\frac{3}{3}}\right)$

c)  $7 = 3! + \frac{3}{3}$

d)  $8 = \left(\frac{3!}{3}\right)^3 = 3! + \frac{3!}{3}$

### Aufgabe 1138: Was ist wahr, was ist falsch?

Von den folgenden vier Aussagen über positive ganze Zahlen  $x$  und  $y$  sind genau drei wahr.

- (1)  $x = 2y - 1$ .
- (2)  $x + y$  ist ein Vielfaches von 3.
- (3)  $x + 13$  hat den Teiler  $y$ .

(4)  $x + 4y$  ist eine Primzahl  $> 50$ .

Welche Werte können  $x$  und  $y$  dann haben?

(H.F.)

*Lösung:*

Annahme: (2) ist wahr.

Aus (2) und (1) folgt:  $x+y = 3v$  für ein  $v \geq 1$  und daher ist  $x+y = (2y-1)+y = 3y-1 = 3v$ , ein Widerspruch!

Somit ist (1) falsch.

Aus (2) folgt:  $(x+y) + 3y = x+4y$  ist ein Vielfaches von 3, also keine Primzahl, somit ist (4) falsch.

Nach Voraussetzung können nicht (1) und (4) beide falsch sein. Mithin ist die Annahme falsch. Also ist (2) falsch. (1), (3) und (4) sind wahr.

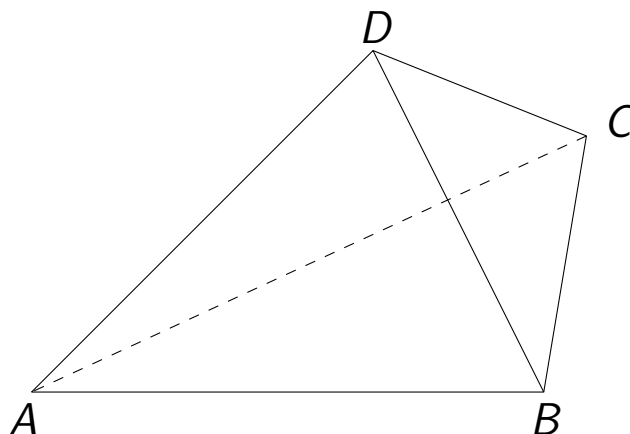
Aus (3) ergibt sich mit (1): Wegen  $x+13 = (2y-1)+13 = 2y+12$  ist  $2y+12$  teilbar durch  $y$ . Also ist 12 teilbar durch  $y$ , woraus mit (1) folgt:

|        |   |    |    |    |    |    |
|--------|---|----|----|----|----|----|
| $y$    | 1 | 2  | 3  | 4  | 6  | 12 |
| $x$    | 1 | 3  | 5  | 7  | 11 | 23 |
| $x+4y$ | 5 | 11 | 17 | 23 | 35 | 71 |

Aus der Tabelle folgt: Nur für  $x = 23$  und  $y = 12$  ist (4) erfüllt.

### Aufgabe 1139: Amelies Ameisen

Amelie hat Ameisen. Sie setzt eine davon auf die Ecke  $A$  eines Tetraeders.



Die Ameise wandert entlang der Kanten des Tetraeders. Erreicht sie eine Ecke, so wählt sie zufällig eine der beiden Kanten, auf denen sie nicht zu der Ecke gekommen war.

- Bestimme die Wahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$  dafür, dass sie die Ecke  $B$  nach 1 beziehungsweise 2 Schritten erreicht.
- Bestimme die weiteren Wahrscheinlichkeiten  $p_n$ ,  $n \geq 3$  dafür, dass die Ameise die Ecke  $B$  nach  $n$  Schritten zum ersten Mal erreicht.

(WJB)

*Lösung:*

- a) Von  $A$  aus hat die Ameise drei Möglichkeiten, eine davon führt nach  $B$ , also  $p_1 = \frac{1}{3}$ .  
Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  geht sie nach  $C$  oder  $D$  und von dort aus mit jeweils Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  nach  $B$ , somit  $p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ .
- b) Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  sitzt die Ameise nach den ersten beiden Schritten nicht in  $B$ . Danach führt bei jedem weiteren Schritt einer der für sie möglichen Wege nach  $B$  und einer nicht.  
Damit ist  $p_n = \frac{1}{3} \cdot P(n-3 \text{ mal nicht nach } B, \text{ dann nach } B) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ .

### Aufgabe 1140: Größter Teiler

Bestimme die größte ganze Zahl  $n$ , sodass  $n+11$  ein Teiler von  $n^3+2015$  ist. (H.F.)

*Lösung:*

Es ist  $(n^3 + 2015) : (n + 11) = n^2 - 11n + 121 + \frac{684}{n+11}$ . Der größtmögliche Teiler von 684 ist  $n + 11 = 684$ . Also ist  $n = 673$ .

## Mathematische Lese-Ecke

### – Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

### Albrecht Beutelspacher: „Wie man in eine Seifenblase schlüpft“

Für alle Freundinnen und Freunde des 2002 in Gießen gegründeten Mathematikums ist in diesem Jahr ein echter Leckerbissen erschienen: Albrecht Beutelspachers „Wie man in eine Seifenblase schlüpft“. Auf 319 Seiten werden 100 Exponate des Mathematikums vorgestellt und man erhält kurze Informationen zum mathematischen Hintergrund aber auch zur mathematikhistorischen Einbettung des Experimentes. Bei einem Teil der beschriebenen Exponate gibt es noch die Ergänzung „Zum Weiterdenken“, welche den mathematischen Inhalt vertieft.

„Wie man in eine Seifenblase schlüpft“ ist in dreierlei Hinsicht nutzbar zu machen: (1) zur Vorbereitung eines Besuches im Mathematikum, (2) zur Nachbereitung eines Besuches im Mathematikum oder (3) einfach nur zur spannenden Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen. Punkt (1) könnte für Mathematiklehrkräfte interessant sein, die sich vor einem Besuch mit ihrer Schulklasse über eine mögliche inhaltliche Schwerpunktsetzung des Unterrichtsgangs Gedanken machen wollen.

Der Rezensent sieht allerdings den größten Gebrauchswert eindeutig bei den Punkten (2) und (3). Es macht deutlich mehr Spaß – und regt entsprechend mehr zum Nachdenken an – wenn man mit den Exponaten des Mathematikums völlig un-

befangen experimentiert und ausprobiert, ohne darüber vorher etwas gelesen zu haben. Die sich beim Ausprobieren ergebenden Fragen können dann hinterher durch Lektüre des Buches vertiefend geklärt werden.

Durch die vielen im Buch enthaltenen Fotos und illustrierenden Abbildungen macht es aber auch ganz ohne einen Besuch im Mathematikum Spaß im vorliegenden Buch zu Blättern und sich über die vorgestellten Exponate und Fragestellungen Gedanken zu machen.

*Fazit:* Nach 13 Jahren Mathematikum schließt „Wie man in eine Seifenblase schlüpft“ eine große Lücke. Albrecht Beutelspacher ist ein sehr schönes Buch gelungen, in dem man immer wieder gerne blättern wird. „Wie man in eine Seifenblase schlüpft“ gehört nicht nur in jede Schulbibliothek sondern macht sich auch sehr gut unter dem Weihnachtsbaum.

*Gesamtbeurteilung:* sehr gut ☺☺☺



### Angaben zum Buch:

Beutelspacher, Albrecht: Wie man in eine Seifenblase schlüpft. Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten, C.H.Beck 2015, ISBN 978-3-406-68135-6, geb. 319 Seiten , 19,95 €

Art des Buches: Ausstellungskatalog

Mathematisches Niveau: verständlich

Altersempfehlung: ab 12 Jahren

## Eine geometrische Konstruktion von $\pi$

### Teil 2: Die Formel von Vieta

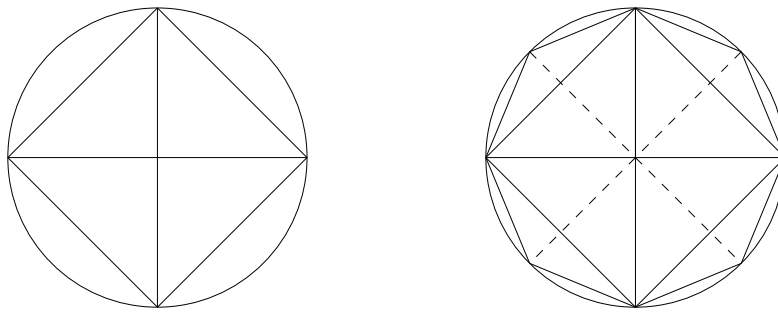
von Duco van Straten

Der französische Rechtsanwalt, Mathematiker und "Vater der Algebra" François Viète hat 1593 eine berühmte Formel für  $\pi$  gefunden. Diese Formel steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Euler-Polygon.

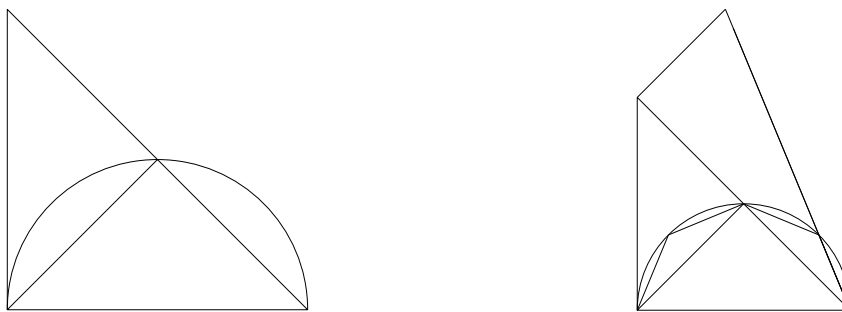


Leonhard Euler (1707-1783) François Viète (1540-1603)

Viète ging aus von einem im Kreis eingeschriebenen 4-Eck. Durch wiederholte Winkelhalbierungen entsteht hieraus ein 8-Eck, 16-Eck,... Es dürfte klar sein, dass der Umfang dieser eingeschriebenen  $2^n$ -Ecke immer bessere Annäherungen an den Kreisumfang darstellen.



Und diese Annäherungen stehen im direkten Zusammenhang mit den Längen der „Speichen“  $|AP_0|$ ,  $|AP_1|$ ,  $|AP_2|$ , ... des Euler-Polygons aus Heft 123. Die 0-te Speiche  $AP_0$  ist der Kreisdurchmesser und hat die Länge 2. Die Speiche  $AP_1$  hat die Hälfte eines eingeschriebenen Vierecks als Länge



und die Speiche  $AP_2$  hat die Hälfte eines eingeschriebenen Achtecks, und allgemein hat die  $n$ -te Speiche  $AP_n$  genau die Hälfte des eingeschriebenen  $2^{n+1}$ -Ecks als Länge!

Die Länge dieser Speichen lassen sich explizit bestimmen. Aus der Definition des Cosinus folgt:

$$|AP_0| = |AP_1| \cos \frac{\pi}{4}$$

$$|AP_1| = |AP_2| \cos \frac{\pi}{8}$$

$$|AP_2| = |AP_3| \cos \frac{\pi}{16}$$

und allgemein

$$|AP_n| = |AP_{n+1}| \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} .$$

Setzen wir die Formeln ineinander ein, so erhalten wir

$$|AP_0| = |AP_1| \cos \frac{\pi}{4} = |AP_2| \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} = |AP_3| \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} = \dots$$

Wenn wir dies *unendlich weit fortsetzen*, erhalten wir

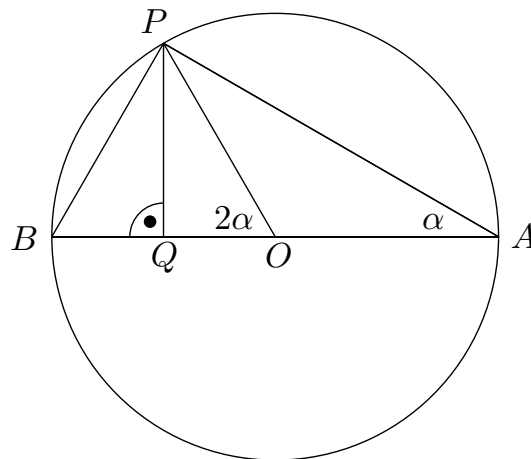
$$|AP_0| = |AP_\infty| \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{32} \dots$$

wobei auf der rechten Seite ein *unendliches Produkt* entsteht.

Die auftretenden Cosinus-Werte kann man mit Hilfe der *Verdopplungsformel* für den Cosinus

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

ermitteln. Diese Formel kann man wiederum aus der Thales-Figur herleiten.



Ist  $Q$  das Lot von  $P$  auf  $AB$ , so ist

$$\cos 2\alpha = \frac{|QO|}{|PO|} = \frac{|QO|}{|PO|}, \quad \cos \alpha = \frac{|QA|}{|PA|}.$$

Es ist  $|QA| = |QO| + |OA|$  und da  $|PA|^2 = |PQ|^2 + |QA|^2$  ist

$$\begin{aligned} |PA|^2 &= |PQ|^2 + |QA|^2 = |PQ|^2 + |QO|^2 + 2|QO||OA| + |OA|^2 \\ &= 2|QO||OA| + 2|OA|^2 = 2|QA||OA|. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\cos \alpha = \frac{|QA|}{|PA|} = \frac{|QA|}{\sqrt{2|OA||QA|}} = \sqrt{\frac{|QA|}{2|OA|}},$$

was mit  $|QA| = |QO| + |OA|$ ,  $\cos 2\alpha = |QO|/|PO|$ ,  $|PO| = |OA|$  auf

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos 2\alpha}.$$

führt.

Da  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ , finden wir nacheinander

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} \sqrt{2}, \\ \cos \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$\cos \frac{\pi}{32} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

etcetera.

Da  $|AP_0| = 2$  und  $|AP_\infty| = \pi$ , führt dies auf die Formel

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \dots,$$

welche das *unendliche Produkt von Vieta* genannt wird. Dieses herrliche Fest von Wurzeln stellt eine der ältesten Formeln für  $\pi$  dar.

## Die besondere Aufgabe

### Pythagoreische Tripel

von Wolfgang J. Bühler

In der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“, 20. Jahrgang 1986, Heft 1, fand ich folgende

*Behauptung:* „Bekanntlich erhält man alle pythagoreischen Tripel  $(x, y, z)$ , also alle Lösungen der diophantischen Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$ , durch den Ansatz  $x = k(m^2 - n^2)$ ,  $y = 2kmn$ ,  $z = k(m^2 + n^2)$ , wobei  $k, m, n$  ganze Zahlen sind.“

Im Internet fand ich einen Beweis für diese Behauptung. Da dieser Beweis eine kleine Lücke enthielt, untersuchte ich die Situation genauer und fand heraus, dass die Behauptung nicht ganz stimmt. Die korrekte Version ergibt sich aus den Aufgabenteilen a), b) und c):

- a) Zeige: Sind  $x, y, z$  von der in der Behauptung angegebenen Form mit  $m > n > 0$ , so bilden sie ein pythagoreisches Tripel.
- b) Finde ein pythagoreisches Tripel der Gestalt  $x = q(m^2 - n^2)$ ,  $y = 2qmn$ ,  $z = q(m^2 + n^2)$  mit  $q = \frac{1}{2}$ , das sich nicht in der Form der Behauptung darstellen lässt.
- c) Zeige: Jedes pythagoreische Tripel  $(x, y, z)$  lässt sich schreiben als  $x = q(m^2 - n^2)$ ,  $y = 2qmn$ ,  $z = q(m^2 + n^2)$  mit  $q = \frac{k}{2}$ ,  $m > n > 0$ ,  $k$  ganzzahlig,  $m$  und  $n$  teilerfremd. Sind  $m$  und  $n$  beide ungerade, so ist  $k$  auch ungerade.
- d) Gibt es auf dem Rand des Kreises um den Koordinatenursprung mit Radius  $D$  Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, wenn  $D = 2013$  (außer den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen)?

## Lösung

a)  $x^2 + y^2 = k^2(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 4k^2m^2n^2 = k^2(m^4 + 2m^2n^2 + n^4) = z^2$ .

b) Es ist  $65 = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13 = 13 \cdot 5$ .

Für Tripel in der in der Behauptung angegebenen Form mit  $z = 65$  müsste also  $k = 1$ ,  $k = 5$  oder  $k = 13$  gelten. Der Fall  $k = 1$ : Wir wollen nun  $\frac{z}{k} = 65$  als  $m^2 + n^2$  schreiben. Dafür ziehen wir sukzessive Quadratzahlen von 65 ab und überprüfen, ob der Rest ebenfalls eine Quadratzahl ist:  $65 = 4 + 61 = 9 + 56 = 16 + 49 = 36 + 31$ . Dabei ist nur die Zerlegung  $16 + 39$  von der Form  $m^2 + n^2$  mit  $m = 4$ ,  $n = 7$ . Das Tripel  $x = 19 - 16 = 3$ ,  $y = 2 \cdot 4 \cdot 7 = 56$ ,  $z = 65$  ist also pythagoreisch. Der Fall  $k = 5$ :  $\frac{65}{5} = 13 = 4 + 9 = m^2 + n^2$  mit  $m = 3$  und  $n = 2$ . Also ist  $x = 5(9 - 4) = 25$ ,  $y = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 60$ ,  $z = 65$  ein pythagoreisches Tripel. Der Fall  $k = 13$ :  $\frac{65}{13} = 5 = 4 + 1 = m^2 + n^2$  mit  $m = 2$ ,  $n = 1$ . Also ist  $x = 13(4 - 1) = 39$ ,  $y = 13 \cdot 2 \cdot 1 = 26$ ,  $z = 65$  ein pythagoreisches Tripel. Dies sind alle pythagoreischen Tripel mit  $z = 65$  wie in der Behauptung. Aber 16, 63, 65 ist ebenfalls pythagoreisch!

Hier gilt  $x = \frac{1}{2}(9^2 - 7^2) = 16$ ,  $y = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 = 63$ ,  $z = \frac{1}{2}(9^2 + 7^2) = 65$ .

c)  $(r, s)$  sei ein Punkt auf dem Einheitskreis, das heißt  $r^2 + s^2 = 1$  mit  $r \geq 0$ ,  $s > 0$ . Setzen wir  $t = \frac{1-r}{s}$ , so rechnen wir nach, dass  $r = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  und  $s = \frac{2t}{1+t^2}$ . Sind dabei  $r$  und  $s$  rational, so auch  $t$  und umgekehrt. Wir wenden dies an auf ein pythagoreisches Tripel  $x, y, z$  mit  $x > y$ . Wir setzen  $r = \frac{x}{z}$  und  $s = \frac{y}{z}$ , das heißt  $\frac{x}{z} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  und  $\frac{y}{z} = \frac{2t}{1+t^2}$  und wir rechnen dies um zu  $x = \frac{z}{1+t^2}(1-t^2)$ ,  $y = \frac{z}{1+t^2}2t$  und  $z = \frac{z}{1+t^2}(1+t^2)$ .

Ist  $t$  nun rational mit teilerfremder Darstellung  $t = \frac{m}{n}$ , so wird daraus  $x = q(m^2 - n^2)$ ,  $y = q2mn$ ,  $z = q(m^2 + n^2)$  mit rationalem  $q = \frac{z}{m^2(1+t^2)} =: \frac{k}{j}$  mit  $k, j$  teilerfremd.

Da  $m$  und  $n$  teilerfremd sind, sind auch  $m^2 - n^2$  und  $mn$  teilerfremd. Bei ganzzahligen Werten  $x = \frac{k(m^2 - n^2)}{j}$ ,  $y = \frac{k2mn}{j}$  kommen deshalb für  $j$  nur die Werte 1 und 2 in Frage. Dabei können  $m$  und  $n$  nicht beide gerade sein. Falls  $j = 2$  ist, müssen also  $m^2 + n^2$  und  $m^2 - n^2$  gerade sein, also  $m$  und  $n$  beide ungerade. Ist nur eine der Zahlen  $m$  und  $n$  ungerade, so ist  $m^2 - n^2$  ungerade und damit  $x = \frac{k(m^2 - n^2)}{j}$  nur dann ganzzahlig, wenn  $j = 1$ .

d) Es ist  $2013 = 1 \cdot 2013 = 3 \cdot 671 = 11 \cdot 183 = 33 \cdot 61$ . Es kommen also für  $z$  die Werte 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671 in Frage. 3 und 11 sind nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, also scheiden 671 und 183 aus.

Der Fall  $k = 61$ .  $33 = 1 + 32 = 4 + 29 = 9 + 24 = 16 + 17$ . Also lässt sich 61 nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellen. Der Fall  $k = 33$ :  $61 = 1 + 60 = 4 + 56 = 9 + 52 = 16 + 45 = 25 + 36$ . Nur  $61 = 25 + 36 = n^2 + m^2$  für  $n = 5$ ,  $m = 6$  ist eine Summe zweier Quadratzahlen. Damit ist  $x = 33(36 - 25)$ ,  $y = 2 \cdot 33 \cdot 5 \cdot 6$ ,  $z = 2013$ , also

$(x, y, z) = (363, 1980, 2013)$  ein pythagoreisches Tripel. Das heißt, mindestens die Punkte  $(393, 1980)$ ,  $(393, -1980)$ ,  $(-393, 1980)$  und  $(-393, -1980)$  sowie  $(1980, 393)$ ,  $(-1980, 393)$ ,  $(1980, -393)$  und  $(-1980, -393)$  sind ganzzahlige Punkte auf dem Kreis.

## Bericht zur Mainzer Mathematik-Akademie 2015

von Daniel Fink

Dieses Jahr fand vom 30. September bis zum 4. Oktober die sechste Mainzer Mathe-Akademie statt, an welcher 30 mathematikbegeisterte Schüler und Schülerinnen teilnehmen konnten. Zum Beginn der Akademie trafen alle Teilnehmer im Jugendhaus Don Bosco ein, wo sie, wie in den Jahren zuvor, untergebracht waren. An diesem Abend hatten alle Teilnehmer die Möglichkeit einander kennenzulernen. Am Donnerstag ging es nach dem Frühstück sofort an die Johannes Gutenberg-Universität. Dort durften sich die Schüler einem der drei angebotenen Kurse anschließen. Dieses Jahr standen die Themen „Markovketten, Gleichgewichte und Kartenmischen“ von Prof. Dr. Matthias Birkner, „Der Goldene Schnitt in Mathematik, Kunst, Architektur und Malerei“ von Dr. Cynthia Hog-Angeloni und „Gleichungen mit dem Lineal im Handumdrehen lösen“ von Prof. Dr. Ysette Weiß-Pidstrygach zur Auswahl. Nachdem jeder im Kurs seiner Wahl gelandet war, begann die Arbeit in den Kursen und das Erschließen des jeweiligen Themas. Die Themen, an denen über die gesamte Akademi-Zeit gearbeitet wurden, waren deutlich schwerer als die Mathematik, die wir aus der Schule kennen.

Am Donnerstag gab es noch eine Uni-Führung und Abends hatten wir noch Freizeit, in der wir mit den anderen Teilnehmern Gesellschaftsspiele spielen oder einfach nur entspannen konnten. Am nächsten Tag ging es dann wieder an die Uni, wo wir weiter in unseren Kursen arbeiteten. Nachmittags gab es noch eine SWR-Führung mit anschließender Freizeit in der Stadt. Am Abend bestand das freiwillige Angebot, das Unterhaus zu besuchen, in welchem Tina Teubner und Ben Süverkrüp ihr Stück „Männer brauchen Grenzen“ aufführten. Dieses Angebot nutzten 19 Schüler. Alternativ dazu gab es für die übrigen ein Gesellschaftsabend in der Unterkunft. Samstags ging es dann noch ein letztes Mal in die Uni. Dort beendeten wir unsere jeweiligen Kurse und bereiteten eine Präsentation vor, die den anderen Teilnehmern veranschaulichen sollte, was wir in den letzten Tagen erarbeitet und gelernt haben. Als kleines Extra gab es an diesem Tag noch eine Schnitzeljagd. Hierbei waren wir in fünf Gruppen aufgeteilt und mussten mathematische Rätsel lösen. Außerdem besuchten uns an diesem Tag noch vier Teilnehmer vorheriger MMAs.

Am letzten Tag präsentierten die Gruppen dann ihr jeweiliges Thema. Dafür hatte

jeder der drei Kurse 30 Minuten Zeit. Danach ging es ein letztes Mal zum gemeinsamen Mittagessen, bei dem sich alle noch mal über ihre gemachten Erfahrungen austauschen konnten. Dann war die 6. MMA auch leider vorbei und wir traten allmählich die Heimreise an. Die Mainzer Mathematik-Akademie war wirklich schön und sehr interessant und ist auf jeden Fall weiter zu empfehlen! Ich bedanke mich noch im Namen aller Teilnehmer bei Herrn Mattheis und Herrn Gruner für die tolle Planung der MMA und für die große Mühe, die sie sich gegeben haben!

*Daniel Fink ist Schüler des Rhein-Wied-Gymansiums Neuwied (13. Klasse) und hat dieses Jahr zum zweiten Mal an der MMA teilgenommen.*



## Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 10 € für das Kalenderjahr 2016 auf das MONOID-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).  
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Mal- und Bildwettbewerb:** Zu unserem Jubiläumsjahr 2016 haben wir einen Mal- und Kunstwettbewerb ausgerufen. Unter dem Motto „Mein Bild von Mathematik – Mathematik ist...“ könnt Ihr Bilder, Collagen, Frafiken etc. gestalten und an die Redaktion einsenden. Vielleicht gewinnt Ihr ja auch einen Preis? Einsendeschluss ist der 31. Dezember 2015. Ausführlichere Informationen findet Ihr im MONOID-Heft 122.

- **Mathematik-Ausstellung:** Derzeit ist die mathematische Mitmach-Ausstellung „Eine Reise durch Raum und Zahl“ im Stadt- und Industriemuseum Rüsselsheim zu sehen. Die Ausstellung des Instituts für Mathematik Universität Mainz lädt ein zum Mitmachen, Staunen, Entdecken und Weiterdenken. Die Ausstellung wird aufgrund des großen Zuspruchs verlängert und ist noch bis zum 31. Januar 2016 zu sehen. Gerade die Weihnachtsferien bieten sich doch für einen Besuch an?! Weitere Informationen unter

[www.museum-ruesselsheim.de/103-0-Eine-Reise-durch-Raum-und-Zahl.html](http://www.museum-ruesselsheim.de/103-0-Eine-Reise-durch-Raum-und-Zahl.html)

## Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 4

### Jahreszahlen

Es sei  $10^{2016} = x$  und  $10^{2015} = y$  gesetzt.

$$(x + 25)^2 - (x - 25)^2 = 4 \cdot 25 \cdot x = 100x = 10^{2018}.$$

$$(y + 25)^2 - (y - 25)^2 = 100y = 10^{2017}.$$

Also hat der angegebene Bruchterm den Wert 10.

### Flächeninhalt eines Achtecks

Es sei  $|AF| = a$  gesetzt. Wegen  $|AF| = |AE|$  ist  $|EF| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ . Da  $EF$  und  $FG$  Seiten des regelmäßigen Achtecks sind, gilt  $|FG| = a\sqrt{2}$ . Daher folgt aus  $|AF| + |FG| + |GB| = 2a + a\sqrt{2} + a = s$ , also

$$a = \frac{s}{2 + \sqrt{2}} = \frac{s(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{s(2 - \sqrt{2})}{2}.$$

Die vier Dreiecke haben zusammen den Flächeninhalt

$$4 \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{s^2(2 - \sqrt{2})^2}{2} = s^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

Daher hat das Achteck den Flächeninhalt  $F$  mit

$$F = s^2 - s^2(3 - 2\sqrt{2}) = s^2(1 - (3 - 2\sqrt{2})) = 2s^2(\sqrt{2} - 1).$$

Die Seitenlänge  $s$  des Quadrats  $Q$  ist gegeben, also  $s^2 = 144 \cdot \frac{7}{\sqrt{2}-1}$ . Daraus folgt:  $F = 2016$ .

### Flächenvergleich

Die Länge der Strecke  $AB$  sei mit  $|AB|$ , der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$  sei mit  $|ABC|$  bezeichnet.

Es gilt: Die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle ADC$  haben die gleiche Höhe  $h_1$  aus  $C$ . Also ist

$$(1) \quad |ABC| = \frac{1}{2} |AB| h_1 \text{ und } |ADC| = \frac{1}{2} |AD| h_1.$$

Da auch die Dreiecke  $\triangle ADC$  und  $\triangle ADE$  eine gleich lange Höhe  $h_2$  aus  $D$  besitzen, ist

$$(2) \quad |ADC| = \frac{1}{2} |AC| h_2 \text{ und } |ADE| = \frac{1}{2} |AE| h_2.$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{|ABC|}{|ADE|} &= \frac{|ABC| \cdot |ADC|}{|ADC| \cdot |ADE|} = \frac{\frac{1}{2} |AB| h_1 \cdot \frac{1}{2} |AC| h_2}{\frac{1}{2} |AD| h_1 \cdot \frac{1}{2} |AE| h_2} \\ &= \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AD| \cdot |AE|} = \frac{(2015 + 2017) \cdot 2017}{2017 \cdot 2016} = 2. \end{aligned}$$

Also ist  $|ABC| = 2 \cdot |ADE|$ .

## 2016 Lösungen

Für ein ganzzahliges Paar  $(x, y)$  gelte (1).

Dann sind  $(x+y)(x-y)$  und  $(x-y)^2$  ganzzahlig und Teiler von  $p^{2015}$ . Ein Teiler von  $p^{2015}$  ist von der Form  $\pm p^k$  für ein ganzzahliges  $k$ . Daher ist  $(x-y)^2 = p^{2n}$  für  $2n$  mit  $0 \leq 2n < 2015$ , also  $0 \leq n \leq 1007$ . Damit gelten:

$$(2) \quad x - y = \pm p^n \text{ und } x + y = p^{2015-2n}.$$

Durch Addition beziehungsweise Subtraktion der Gleichung (2) ergibt sich:

$$(3) \quad x = \frac{1}{2}(\pm p^n + p^{2015-2n}) \text{ und } y = \frac{1}{2}(\mp p^n + p^{2015-2n}).$$

Da  $p$  ungerade ist, sind die Klammern in (3) geradzahlig, sodass  $x$  und  $y$  in (3) ganzzahlig sind.

Für verschiedene Exponenten  $n$  in (2) sind die Zahlenpaare  $(x-y, x+y)$  jeweils verschieden.

Dann aber sind die aus diesen Zahlenpaaren  $(x-y, x+y)$  abgeleiteten Paare  $(x, y)$  ebenfalls verschieden.

In (2) sind nun 1008 verschiedene Werte für  $n$  wegen  $0 \leq n \leq 1007$  möglich.

Daher hat die Gleichung (1) insgesamt  $2 \cdot 1008 = 2016$  ganzzahlige Lösungen.

# Die MONOID-Preisträger 2015

**Das Goldene M:** Heiko Kötzsche (Gymnasium Oberursel).

**MONOID-Fuchs:** Maximilian Hauck (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey).

**Sonderpreis:** Matthias Bergen (Rhein-Wied-Gynasium, Neuwied).

**Forscherpreise:** Silas Rathke (Alexander-von-Humboldt-Gymnasium, Neumünster) und Marcel Wittmann (Karolinen-Gymnasium, Frankenthal).

### **1. Preise:**

Matthias Bergen, Jan-Philipp Bullenkamp, Daniel Fink, Miriam Gerharz, Maximilian Göbel, Tobias Jedich, Sarah Kästner, Markus Kötzsche, Fabian Liepach, Silas Rathke, Sönke Schneider, Melanie Schuy, David Storzer.

### **2. Preise:**

Jonas Ahlfeld, Miriam Büttner, Virginia Fox, Philipp Karn, Sonja Kowallek, Jara Müller-Kästner, Helen Richter, Patrick Riebe, Marcel Wittmann.

### **3. Preise:**

Torben Bürger, Aleksandra Herbst, Denis Mayle, Kevin Mours, Verena Rüsing, Theresa Schöche, Kristin Teichert, Robin Thiel.

### **MONOID-Jahresabonnements 2016:**

Saskia Aierstock, Darleen Baum, Daniela Bergen, Lea Daum, Jonas Glückmann, Jasmin Hallyburton, Josefine Kaßner, Annika Koch, Katharina Kiefer, Amelie Mahler, Lorena May, Katharina Rößler, Jamico Schade, Jonas Schneider, Sina Schneider, Adriana Stenger, Frauke Stoll, Julia Theis, Melanie Weibrich, Sandra Winger, Rabea Zimmermann.

Die MONOID-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2014/2015 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet, die Forscherpreise von Herrn Dr. Genannt, der Sonderpreis von Casio. Der Preis für den Träger des MONOID-Fuchs von Herrn Mattheis und Herrn Dr. Genannt. Der Preis für den Träger des Goldenen M wurde gestiftet vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und dem Institut für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Die MONOID-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

## **Rubrik der Löser und Löserinnen**

Stand nach Heft 122

**Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 8:** Luca Bühler 24.

**Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg: Kl. 10:** Frauke Stoll 35.

**Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium** (Betr. Lehrerin: Frau Lüning):

**Kl. 5:** Hannah Acker 12, Lukas Born 25, Lea Daum 34, Emilia Dreyer 1, Sophie Huber 5, Alina Jeuck 12, Amelie Mahler 30, Lorena May 33, Jonas Schneider 34, Victoria Strunck 12;

**Kl. 7:** Torben Bürger 62, Virginia Fox 74, Maximilian Hauck 162, Sarah Kästner 80, Eileen Kirchner 6, Mareen Ohrt 23, Pia Richter 9, Manuel Wolf 15, Rabea Zimmermann 36;

**Kl. 8:** Fiona Schobel 1;

**Kl. 9:** Melanie Werner 16;

**Kl. 10:** Victoria Fox 20;

**Kl. 11:** Katharina Rößler 42.

**Bad Ems, Goethe-Gymnasium: Kl. 12:** Miriam Gerharz 81.

**Bad Neuenahr-Ahrweiler, Are-Gymnasium:**

**Kl. 5:** Imer Ademi 3, Kaltrina Hasani 2, Caricia Janoschka 7, Lasse Neukirchen 2, Fannie Siebenhüner 3, Annik Theisen 1.

**Bommersheim, Burgwiesenschule: Kl. 4:** Sina Schneider 29.

**Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:**

**Kl. 5:** Darico Schade 10;

**Kl. 12:** Jamico Schade 43.

**Frankenthal, Karolinen-Gymnasium** (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

**Kl. 5:** Felix Kummermehr 7, Jasmin Nerenberg 4, Lilli Storck 3;

**Kl. 6:** Tim Rinhard 13;

**Kl. 7:** Annika Koch 30;

**Kl. 10:** Christoph Hemmer 22, Franz Matejcek 18;

**Kl. 11:** Kevin Mours 49, Adriana Stenger 45, Marcel Wittmann 78.

**Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 9:** Patrick Riebe 60.

**Friedberg, Augustinerschule:**

**Kl. 5:** Aleksandra Herbst 60;

**Kl. 7:** Tobias Jedich 121;

**Kl. 9:** Simon Gröger 17, Ben Mayer 23.

**Friedrichsdorf, Life School Frankfurt** (Betreuende Lehrerin: Frau Elze):

**Kl. 2:** Jule Beinker 13;

**Kl. 3:** Lena Decker 4, Mateo Alexander Dorsch 6, Ana Flores 13, Marina Knoblauch 17, Sofia Somma 6, Vivienne Van't Hof 15, Sunny Sue Zwermann 15;

**Kl. 4:** Adrien Burgmann 15, Nea Gerlach 12, Mia Großkreutz 6, Olivia Kern 17, Elisabeth Korzilius 15, Arthur Krewinkel 17;

**Kl. 12:** Luca Gladiator 16.

**Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule** (Betreuender Lehrer: Herr Grasse):

**Kl. 5:** Sebastian Braun 26, Kai-Dominik Hoppe 2, Emre Sadic 9,

**Kl. 6:** Tobias Streichhardt 13, Noah Tritschler 8;

**Kl. 7:** Burak Sadic 12;

**Kl. 8:** Melanie Schuy 89;

**Kl. 9:** David Storzer 121, Lorenz Wagner 11;

**Kl. 10:** Marvin Weisbender 19.

**Höhr-Grenzhausen, Gymnasium im Kannenbäckerland:**

**Kl. 12:** Farah Breiden 21.

**Kelkheim, Eichendorffschule:**

**Kl. 5:** Dilara Kösgen 3;

**Kl. 6:** Jens Hein 4;

**Kl. 7:** Denis Mayle 58.

**Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:**

**Kl. 5:** Linus Rabeneck 8;

**Kl. 6:** Beatrice Popescu 25;

**Kl. 7:** Malte Rehm 23.

**Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):**

**Kl. 8:** Laura Baumir 2;

**Kl. 9:** Jana Eichhorn 10;

**Kl. 10:** Melanie Weibrich 37;

**Kl. 12:** Theresa Schöche 56.

**Marienstatt, Privates Gymnasium Marienstatt:**

**Kl. 8:** Florian Enders 7, Janik Seiler 5, Nils Siefert 5;

**Kl. 12:** Robin Thiel 54, Anna-Lena Schneider 17.

**Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:**

**Kl. 10:** Silas Rathke 86.

**Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):**

**Kl. 5:** Nils Müller 8, Elicia Rotarius 13;

**Kl. 6:** Marius Ahlfeld 14, Fiona Ruschke 17;

**Kl. 7:** Jannis Thron 12

**Kl. 9:** Jonas Ahlfeld 77, Darleen Baum 36, Moira Gier 14, Myrta Knauf 8, Sophie Schellhaas 9, Anja Wingender 17;

**Kl. 10:** Daniela Bergen 26, Matthias Bergen 94, Jasmin Hallyburton 45, Denise Kadri 9, Vinh-An Pham 20, Verena Rüsing 56;

**Kl. 11:** Rebecca Dattko 21;

**Kl. 12:** Mirjam Bourgett 9, Daniel Fink 80, Alexander Göbel 21, Sandra Wingender 30;

**Kl. 13:** Janina Vogl 23.

**Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium: Kl. 7:** Sonja Kowallek 74.**Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):**

**Kl. 5:** Josefine Kaßner 40, Oliver Stork 18;

**Kl. 6:** Sönke Schneider 123;

**Kl. 7:** Jonas Blumenroth 15, Jonas Glückmann 32, Fabian Liepach 118, Sibylla Ribka 15;

**Kl. 8:** Saskia Aierstock 43, Maximilian Göbel 151, Julian Ingrisich 9, Philipp Karn 75, Maximilian Kraffzick 11, Jara Müller-Kästner 70, Helen Richter 73, Kristin

Teichert 59;

**Kl. 10:** Eric Bossert 12, Julia Theis 39;

**Kl. 11:** Katharina Kiefer 32, Annika Teichert 16, Jiyune Whang 14;

**Kl. 12:** Jan-Philipp Bullenkamp 85, Heiko Kötzsche 90, Markus Kötzsche 90.

**Regensburg, Albertus Magnus Gymnasium: Kl. 6:** Johannes Plöbl 4.

**Remagen, Gymnasium Nonnenwerth** (betr. Lehrer: Herr Meixner):

**Kl. 5:** Niko Gersthahn 6, Justin Haubrichs 6, Greta Kluge 14, Joshua Knöpfel 7, Jordan Plümper 9;

**Kl. 6:** Kira Giebels 3 Carina Heinemann 5, Jacqueline Hermann 8, Marie Jaeschock 5, Nico Kamp 3, Lena Kreienberg 5 Ruben Rohn 8, Julia Schriek 8, Johanna Schwarz 7, Naomi Smeets 11, Madita Spies 7, Tim Springer 7, Felix Stoffel 5, Lotte Tillmann 7, Antonio Ziesche 5;

**Kl. 9:** Friedrich Holtorf 3;

**Kl. 10:** Fabian Paul 3;

**Kl. 11:** Malte Bayer 3;

**Kl. 12:** Janine Röper 11.

**Sankt Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:**

**Kl. 5:** Benedikt Erdsach 10, Vincent Keppel 14, Leonie Tannebaum 7.

**Schwäbisch Gmünd, Landesgymnasium für Hochbegabung:**

**Kl. 8:** Clara Deifel 18.

**Tangermünde, Diesterweggymnasium: Kl. 5:** Miriam Büttner 70.

**Villingen-Schwenningen Kl. 6:** Felix Zechner 6.

**Wiesbaden, Leibnizschule: Kl. 9:** Andreas Dernier 11;

**Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium: Kl. 5:** Raphael Gaedtker 15.

## Die Redaktion

**Leitung:** Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

**Mitglieder:** Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Verena Lucas, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

**Weitere Mitarbeiter:** Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

**Zusammenstellung und Satz:** Maximilian Preisinger

**Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen:** Bettina Wiebe

**Betreuung der Abonnements und Versand:** Anita Pfeffer-Kohl

## Inhalt

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| H. Fuchs: Ein Euler-Quadrat für das Jahr 2016 . . . . .                     | 3  |
| Aufgaben zum Neuen Jahr . . . . .                                           | 4  |
| H. Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen . . . . .                           | 5  |
| H. Fuchs: Der Satz von Thales und seine Verwandten . . . . .                | 6  |
| Mathematische Entdeckungen . . . . .                                        | 8  |
| Die Aufgabe für den Computer-Fan . . . . .                                  | 9  |
| H. Fuchs: Was uns so über den Weg gelaufen ist . . . . .                    | 11 |
| H. Fuchs: Trugschluss – Die Schnecke im Brunnen . . . . .                   | 11 |
| H. Fuchs: Durch Widersprüche zur Erkenntnis . . . . .                       | 12 |
| Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 123 . . . . .                      | 16 |
| Neue Mathespielereien . . . . .                                             | 19 |
| Neue Aufgaben . . . . .                                                     | 21 |
| Gelöste Aufgaben aus MONOID 123 . . . . .                                   | 22 |
| M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik . . . . .   | 26 |
| D. van Straten: Eine geometrische Konstruktion von $\pi$ (Teil 2) . . . . . | 27 |
| W. J. Bühler: Die besondere Aufgabe – Pythagoreische Tripel . . . . .       | 30 |
| D. Fink: Bericht zur Mainzer Mathematik-Akademie 2015 . . . . .             | 32 |
| Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr . . . . .                           | 34 |
| Die MONOID-Preisträger 2015 . . . . .                                       | 35 |
| Rubrik der Löser und Löserinnen . . . . .                                   | 36 |
| Redaktion . . . . .                                                         | 39 |
| Impressum . . . . .                                                         | 40 |

**Abonnementbestellungen** per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

**Herausgeber:** Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,  
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,  
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

## Impressum

**Anschrift:** Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,  
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz  
**Telefon:** 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295  
**E-Mail:** monoid@mathematik.uni-mainz.de  
**Homepage:** <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>