Jahrgang 36 Heft 125 März 2016

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **16.05.2016.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Main/Taunus International School** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

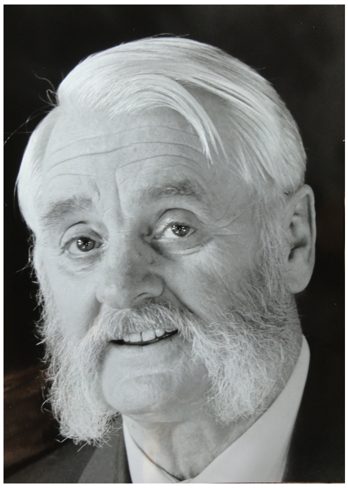
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Martin Mettler
Gründer von Monoid vor 35 Jahren
von Arthur Köpps



Martin Mettler wurde am 24.03.1936 in Gertianosch im rumänischen Banat geboren, wo er seine Kindheit verbrachte. Nach dem Schulbesuch im Jahre 1951 ließ er sich an der Pädagogischen Lehranstalt in Temeswar zum Grundschullehrer ausbilden, danach erfolgte ein Studium der Mathematik und Physik an der Universität Temeswar. Ab 1960 unterrichtete er als ausgebildeter Gymnasiallehrer in den Fächern Mathematik und Physik am Lyzeum in Oberwischau und an der deutschen Abteilung des Brediceanu Lyzeums in Lugosch, Rumänien.

Bereits als Schüler war er Mitarbeiter der rumänischen Mathematik-Zeitschrift für Schüler „Gazeta de Mathematica“ und ein erfolgreicher Teilnehmer an den Mathematik-Olympiaden. Später, als Lehrer, war er Redaktionsmitglied dieser Zeitschrift.

1975 erfolgte die Spätaussiedlung seiner Familie in die Bundesrepublik. Nach Anerkennung seines Studiums durch weitere Prüfungen wurde er zum Studienrat und später zum Oberstudienrat am Karolinen-Gymnasium in Frankenthal/Pfalz ernannt. An dieser Schule gründete er die Mathematik-Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen namens Monoid, die er 20 Jahre herausgab und deren Redaktion er bis zu seinem Tode im Jahre 2005 angehörte. Ab 1983 unterrichtete er am Alzeyer Elisabeth-Langgässer Gymnasium die Fächer Mathematik und Physik, dort war er außerdem in der Ausbildung der Referendare eingesetzt. Von 1990 bis 1993 war er Leiter des Landeswettbewerbs Mathematik in Rheinland-Pfalz, ab 1991 außerdem Mitglied im Aufgabenausschuss der Deutschen Mathematik-Olympiade. 1993 erfolgte ein fünfjähriger Auslandsdienst in Ungarn, danach die Pensionierung. Für seine besonderen Verdienste in der Förderung naturwissenschaftlicher Begabter erhielt er im Jahre 2003 in München den Preis der Helmholtz Gemeinschaft Deutscher Forschungszentren.

Im Rahmen seiner Tätigkeit als Herausgeber des Monoids sind innerhalb der Monoid-Reihe unter seinem Namen folgende Veröffentlichungen erschienen:

1992	Kollektaneen	1995	Perlen
1995	Beweise und theoretische Fragen	1996	Formeln
2000	Vom Charme der „verblassten Geometrie“	2005	Spiel und Spaß mit Mathe

Monoid
Eine einzigartige Mathezeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen

von Arthur Köpps

Titelwahl

Monoid wurde als Ausdruck der Bescheidenheit als Titel gewählt. Der Begriff bezeichnet in der Mathematik eine Halbgruppe mit neutralem Element, eine der einfachsten algebraischen Strukturen. Somit soll der Titel signalisieren, dass man bescheiden in die hohe Mathematik einsteigen wolle.

Entstehungsgeschichte

Als Martin Mettler 1995 aus Rumänien kam, fiel ihm die mangelnde Förderung der mathematisch Begabten in Rheinland-Pfälzischen Schulen auf: Keinerlei mathematischen Aktivitäten außerhalb des Unterrichts, keine Mathe-AG, keine Teilnehmer am Bundeswettbewerb Mathematik, geschweige denn Teilnehmer an der Internationalen Mathematik Olympiade. Überhaupt war Mathematik als Schulfach seiner Meinung nach in der Bundesrepublik unpopulär. Die Unterrichtspraxis schien ihm Recht zu geben. Es gab überwiegend nur einen Leistungskurs Mathematik, dagegen zahlreiche Grundkurse. Auch in der Mittelstufe war die Begeisterung für Mathe aus seiner Sicht nicht besser. Um hier Abhilfe zu schaffen reifte nach kurzer Reflektion über seine Tätigkeit als Redakteur der rumänischen Mathezeitschrift Gazeta de Mathematica die Idee, auch in der Bundesrepublik eine Mathezeitschrift für Schüler/innen zu gründen, denn es gab nichts Vergleichbares. 1980 war es dann soweit. Anlässlich der 200 Jahr-Feier des Karolinen-Gymnasiums in Frankenthal veranstaltete die Mathematik-Fachschaft einen Mathematik-Wettbewerb. Den Abschluss sollte ein Mitteilungsblatt bilden, in dem die schönsten Lösungen mit Angabe der Löser/innen festgehalten wurden. Dies geschah in einer Zeit, in der gerade der „Rubik-Würfel“ durch die Lande zog. Also wurde eine Lösung des Würfelproblems im Mitteilungsblatt präsentiert mit dem Ziel zu vermitteln, dass Mathe auch Spaß machen kann. Aus demselben Grund sollte auch eine Knobelseite nicht fehlen. Selbstverständlich mussten auch NEUE AUFGABEN hinein. So wurde aus dem Blatt ein ansehnliches Heft mit 32 – teils handgeschrieben, teils getippten – Seiten. Am 01.06.1981 erschien die erste Ausgabe des Monoid-Mathematik-Blattes für Schüler/innen und Lehrer/innen. Ab dem Jahr 2001 fungierte der Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz als Herausgeber, später das Institut für Mathematik und ab 2013 aus rechtlichen Gründen die Johannes Gutenberg-Universität Mainz, vertreten durch den Präsidenten, Herrn Professor Dr. Georg Krausch.

Entwicklungsmerkmale

Zurzeit erscheinen vier Ausgaben pro Jahr mit mehr oder weniger 44 Seiten, die Auflagenhöhe beträgt annähernd 800 Exemplare. Die Abonnentenzahl schwankt weltweit zwischen 600 und 800. Ein aus über 20 Personen bestehendes Redaktionsteam aus Schule und Hochschule entscheidet über Inhalt und Aufgabenauswahl pro Ausgabe. Systematisch erscheinen die Rubriken: Neue Aufgaben, Mathespielereien, Gelöste Aufgaben, Mathematische Entdeckungen, Hättest Du es gewusst?, Die Seite für den Computer Fan, Was uns über den Weg gelaufen ist, Rubrik der Löser und viele mehr.

Die L(o)eser können sich in allen Sparten beteiligen, wodurch ein kontinuierlicher Wettbewerb für Schüler/innen aller Klassenstufen von 5 – 13 stattfindet. Die eingereichten Lösungen zu den Aufgaben werden von einem Korrekturteam überprüft und mit Punkten bewertet. Am Jahresende wird vom jedem Löser/jeder Löserin der Punktestand ermittelt. Ende November findet die große MONOID-Preisverleihung in einer mehrstündigen Feierstunde mit festlichen Rahmenprogamm statt, zu der alle Mitarbeiter/innen und Freunde der Mathematik eingeladen werden. Die Veranstaltungsorte wechseln im 4-Jahresrhythmus: Frankenthal, Alzey, Oberursel, Universität Mainz. 30 – 35 der eifrigsten Mitarbeiter/innen erhalten in einer MONOID-Feierstunde Urkunden und Preise. Der wertvollste und begehrenswerteste Preis für die erfolgreichste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten wie z.B. der Teilnahme an Wettbewerben ist „Das Goldene M“, eine Plakette in Gold, die jährlich einmal vergeben wird, verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag. Der Preis wird seit 1993 vergeben.

Ausblick

Mit jeder neuen Ausgabe wird MONOID anspruchsvoller, inhaltsreicher, ja sogar schöner in der Aufmachung. Außerhalb der drei unterstützenden Schulen (Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey und das Gymnasium Oberursel) erstreckt sich der Leser- und Löserkreis auf die gesamte Bundesrepublik. Zur Freude des Redaktionsteams hat MONOID auch im Ausland Verbreitung gefunden. Durch eine langjährige Mitarbeit am MONOID haben die Monoidaner ihre Talente ausbauen können, so dass sie als Preisträger im Bundeswettbewerb Mathematik, bei den Deutschen Olympiaden bis hin zu der Internationalen Mathematik-Olympiade vertreten waren. Interessant ist, dass die Monoidaner mit dem Verlassen der Schule nach dem Abitur nicht aussteigen. Die Palette der Berufsfelder der Ex-Monoidaner ist breit gefächert. Sie reicht u.a. vom Doktor der Mathematik oder Informatik, über den Forscher in Genf am Cern, den Doktor am Max Planck-Institut für medizinische Forschung, Ingenieur, Wirtschaftsinformatiker, Lehrer und Hochschullehrer. Prominentes Beispiel hierfür ist Valentin Blomer. Er erhielt 1996 das Goldene M und lehrt heute an der Universität Göttingen als Professor der Mathematik. Wenn man an alle Monoidaner denkt, die im Laufe des 35jährigen Bestehens am Monoid mitgearbeitet haben, auch wenn der eine oder andere später mit Mathematik nicht mehr viel am Hut hatte, dann fühlt sich das ehrenamtlich arbeitende Redaktionsteam reichlich belohnt für die Mühe und Einsatz, den Monoid zu machen.

Zum Schluss ein Zitat von Martin Mettler:
„Es besteht kein Zweifel, dass der Mathematik die Ehre gebührt, im besonderen Blickfeld der Öffentlichkeit zu stehen. Gilt sie doch als eine der unverzichtbaren Wissenschaften für die hoch technisierte Welt des globalen Wettbewerbs“

In diesem Sinne soll auch die Mathematikzeitschrift Monoid ein bescheidener Beitrag zur Werbung für die Mathematik sein, mathematische Begabungen zu wecken und zu fördern.

Was uns so über den Weg gelaufen ist
Zwangsjacken für Primzahlen und Primzahlen-Zwillinge

von Hartwig Fuchs

Primzahlen sind ziemlich ungezähmte Gesellen – man kennt keine Regel, die eine Aussage über die genaue Verteilung der Primzahlen in der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ der natürlichen Zahlen macht.
Bemerkenswerter Weise aber können diejenigen Elemente in $\mathbb{N}$ benannt werden, die mit Sicherheit keine Primzahlen sind.

Eine Zwangsjacke für Primzahlen

(1) Eine Zahl* $n \geq 5$ kann nur dann eine Primzahl sein, wenn $n = 6k - 1$ oder $n = 6k + 1$ für ein $k \geq 1$ ist.

Für $k = 1, 2, 3, ...$ gilt: Von den sechs Zahlen $6k + i$, $i = 0, 1, \dots, 5$ sind $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$ sowie $6k + 4$ nicht prim, während $6k + 1$ und $6k + 5$ Primzahlen sein können. Mit $6(k - 1) + 5 = 6k - 1$ für $k - 1 = 0, 1, 2, ...$ folgt daher, dass (1) gilt.

Übrigens trifft die Umkehrung von (1) im Allgemeinen nicht zu, wie das Beispiel $k = 20$ zeigt: $6k - 1 = 6 \cdot 20 - 1 = 7 \cdot 17$ und $6k + 1 = 6 \cdot 20 + 1 = 11^2$ sind beide nicht prim.

Eher noch willkürlicher als Primzahlen scheinen Primzahlen-Zwillinge – das sind Primzahlen $n - 1$, $n + 1$ vom Abstand 2 – in der Menge $\mathbb{N}$ verteilt zu sein. Das zeigt sich etwa darin, dass man bis heute nicht weiß, ob es unendlich viele oder nur endlich viele von ihnen gibt.

* Das Wort „Zahl“ bedeutet hier stets natürliche Zahl.

Aber wegen (1) ist zu erwarten, dass man in der Menge $\mathbb{N}$ diejenigen Zahlen vom Abstand 2 angeben kann, die mit Sicherheit keine Primzahlen-Zwillinge sind. Man erhält sie aus dem Satz (2).

Eine Zwangsjacke für Primzahlen-Zwillinge

(2) Die Zahlen $n-1$ und $n+1$ können nur dann Primzahlen-Zwillinge sein, wenn $n = 4, 6, 12, 18$ oder $n = 30k$, $n = 30k + 12$ oder $n = 30k + 18$ mit einem $k \geq 1$ ist.

Für $n = 4, 6, 12$ und 18 sind $n-1$, $n+1$ Primzahlen-Zwillinge; weitere unterhalb von 30 gibt es nicht. Es sei daher nun $n \geq 30$.
Jede Zahl $n \geq 30$ hat die Darstellung $n = 30k + i$, mit $0 \leq i \leq 29$ und $k \geq 1$.

1. Fall: i sei ungerade. Dann sind $n \pm 1 = 30k + i \pm 1$ gerade und daher sind beide Zahlen $n \pm 1$ nicht prim.
2. Fall: i sei gerade, jedoch sei i kein Vielfaches von 3. Dann ist einer der Zahlen $i-1$, $i+1$ ein Vielfaches von 3, sodass eine der Zahlen $n-1$, $n+1$ nicht prim ist.
3. Fall: i sei ein gerades Vielfaches von 3. Ist $i = 6$ oder $i = 24$, dann ist im ersten Fall $n - 1 = 30k + 6 - 1$ und im zweiten Fall $n + 1 = 30k + 24 + 1$ jeweils ein Vielfaches von 5.

Damit ist (2) bewiesen.

Ist $i = 0$ oder 12 oder 18, dann setze man $i = 6j$ mit $j = 0, 2, 3$. Dann ist $n \pm 1 = 30k + 6j \pm 1 = 6(5k + j) \pm 1$. Wegen (1) – mit $5k + j$ an Stelle von k – können beide Zahlen $n-1$ und $n+1$ prim und somit Primzahlen-Zwillinge sein.

Die Umkehrung von (2) trifft im Allgemeinen nicht zu.
Für $n = 30 \cdot 4 = 120$ sind weder 119 noch 121 prim; für $n = 30 \cdot 11 + 12 = 342$ sind 341 und 343 nicht prim; für $n = 30 \cdot 9 + 18 = 288$ sind 287 sowie 289 nicht prim.

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

Es seien D, I, M, N und O beliebige reelle Zahlen.
Dann gilt stets:

$$M + O + N + O + I + D \leq M^2 + O^2 + N^2 + O^2 + I^2 + D^2 + \tfrac{3}{2}.$$

Beweise diese Behauptung!

Lösung

Die Summe reeller Quadratzahlen ist stets ≥ 0. Deshalb gilt:

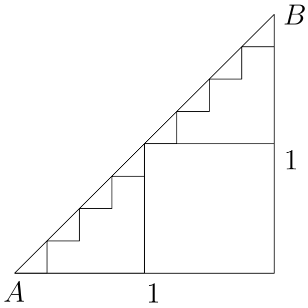
$$0 \le (M-\frac{1}{2})^2+(O-\frac{1}{2})^2+(N-\frac{1}{2})^2+(O-\frac{1}{2})^2+(I-\frac{1}{2})^2+(D-\frac{1}{2})^2$$
$$= M^2+O^2+N^2+O^2+I^2+D^2-2(\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}O+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}O+\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}D)+6\cdot\frac{1}{4}.$$

Bringt man den Klammerterm auf die linke Seite der Ungleichung, so folgt die Behauptung.

Für $D = I = M = N = O = \frac{1}{2}$ gilt in der Behauptung das Gleichheitszeichen.

Trugschluss

von Hartwig Fuchs



Die Anschauung lässt uns behaupten:

> Je mehr Stufen eine Treppe zwischen A und B hat, umso weniger wird sich die Summe S aus den Breiten und Höhen aller Stufen von der Länge der Strecke AB unterscheiden.

Falsch!

Wie klein auch immer die Stufen der Treppe sind, stets gilt: $S = 2$.

Dagegen sagt uns der Satz des Pythagoras, dass im rechtwinkligen Dreieck mit den Katethenlängen 1 die Hypotenuse AB die Länge $|AB| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ ist. Daher gilt $|AB| > S$.

Fazit: Die Anschauung kann uns leicht zu Trugschlüssen verleiten.

Mathematische Entdeckungen

Eine kanadische Knobelei

Betrachte die folgende Addition:

$$\begin{array}{cccccc} & & & T & E & N \\ & & & T & E & N \\ & & N & I & N & E \\ & E & I & G & H & T \\ + & T & H & R & E & E \\ \hline = & F & O & R & T & Y \end{array}$$

Man ersetze jeden Buchstaben so durch eine Ziffer, dass eine korrekte Addition entsteht.

Dabei sollen verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern zugeordnet werden; führende Ziffern seien verschieden von 0.

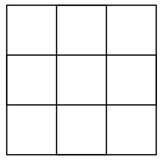
(B. Shawyer, Universität Neu-Fundland, gefunden H.F.)

Hinweis: Ein erfolgreicher Ansatz könnte die Annahme Y=0 sein.

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 16. Mai 2016 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 123

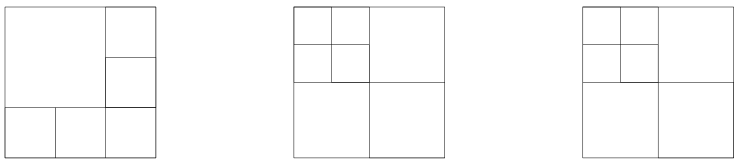
In Heft 123 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Untersuche, in wieviele Quadrate ein gegebenes Quadrat zerlegt werden kann – wobei die Teilquadrate gleich oder verschieden groß sein dürfen.



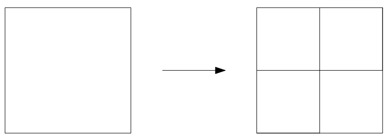
Beispiel: Das nebenstehende Quadrat ist in 9 Quadrate zerlegt. Deshalb kann es auch in 36 Quadrate zerlegt werden.

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe (Zerlegung eines Quadrats in Quadrate) haben sich beschäftigt Maximilian Göbel, Gymnasium Oberursel und Silas Rathke, 11-te Klasse, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium Neumünster.
Maximilian und Silas fanden heraus: Ein Quadrat lässt sich stets in n Quadrate zerlegen für $n \geq 6$. Wir behandeln zunächst die Fälle $n = 6, 7, 8$:



Weiterhin stellen wir fest, dass wir uns jeweils ein beliebiges der Teilquadrate vornehmen und es in 4 kleinere Quadrate zerlegen können:



Dabei vergrößert sich die Anzahl der Teilquadrate um 3.
Aus $n = 6$ gewinnen wir so die Fälle $n = 9, 12, 15, \dots$, aus $n = 7$ die Fälle $n = 10, 13, 16, \dots$ und aus $n = 8$ die Fälle $n = 11, 14, 17, \dots$; insgesamt also alle Fälle $n \geq 6$.

Den Fall $n = 4$ haben wir implizit mitbehandelt und für $n = 2, 3, 5$ geht es tatsächlich **nicht**.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Eine Verallgemeinerung der kanadischen Knobelei aus den mathematischen Entdeckungen für Computer-Fans

Betrachte wie bei den mathematische Entdeckungen auf Seite 8 die Addition:

$$\begin{array}{rccccc} & & & T & E & N \\ & & & T & E & N \\ & & N & I & N & E \\ & E & I & G & H & T \\ + & T & H & R & E & E \\ \hline = & F & O & R & T & Y \end{array}$$

Schreibe ein Programm, dass jeden Buchstaben so durch eine Ziffer ersetzt, dass eine korrekte Addition entsteht.
Dabei sollen verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern zugeordnet werden; führende Ziffern seien verschieden von 0. Verzichte jedoch auf die Annahme $Y = 0$ (berechne also alle möglichen Lösungen). (W.G. nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2016 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 123

Skytale-Chiffre

Auf der Monoid-Homepage findest Du unter „Aktuelles Heft" (www.mathematik.uni-mainz.de/monoid/aktHeft.php) in der Datei „Chiffre Computerfans M123.txt" einen Chriffretext. Dieser enthält genau 1040 Buchstaben und wurde mit der normalen Skytale-Methode der alten Griechen verschlüsselt; es entfällt also ein Spaltentausch. Schreibe ein Programm, welches dir erlaubt, den ursprünglichen Text zu ermitteln. (WG)

Ergebnisse

Bei der Verschlüsselung mit einer Skytale wird der Klartext zeilenweise in eine rechteckige Form mit z Zeilen und s Spalten geschrieben. Der dabei in einer Programmiersprache benutzte Datentyp ist ein zweidimensionales ARRAY, ähnlich einer EXCEL-Tabelle. Die Chiffre ergibt sich, wenn man den Text spaltenweise ausliest. Um diese zu entschlüsseln, muß umgekehrt die Chiffre spaltenweise in ein Rechteck-Schema geschrieben werden, welches dann beim zeilenweisen Auslesen den Klartext ergibt. Dabei sind allerdings z und s unbekannt. Man muß also alle Möglichkeiten für die beiden Variablen ausprobieren, bei denen $z \cdot s = 1040$ ist. Wegen $1040 = 2^4 \cdot 5 \cdot 13$ gibt es $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ Möglichkeiten für z und s. Nur eine von diesen liefert den verständlichen Klartext:

```
J O H A N N W O L F G A N G V O N G O E T H E E R L K O E N I G W E R R E I T E
T S O S P A E T D U R C H N A C H T U N D W I N D E S I S T D E R V A T E R M I
T S E I N E M K I N D E R H A T D E N K N A B E N W O H L I N D E M A R M E R F
A S S T I H N S I C H E R E R H A E L T I H N W A R M M E I N S O H N W A S B I
R G S T D U S O B A N G D E I N G E S I C H T S I E H S T V A T E R D U D E N E
R L K O E N I G N I C H T D E N E R L E N K O E N I G M I T K R O N U N D S C H
W E I F M E I N S O H N E S I S T E I N N E B E L S T R E I F D U L I E B E S K
I N D K O M M G E H M I T M I R G A R S C H O E N E S P I E L E S P I E L I C H
M I T D I R M A N C H B U N T E B L U M E N S I N D A N D E M S T R A N D M E I
N E M U T T E R H A T M A N C H G U E L D E N G E W A N D M E I N V A T E R M E
I N V A T E R U N D H O E R E S T D U N I C H T W A S E R L E N K O E N I G M I
R L E I S E V E R S P R I C H T S E I R U H I G B L E I B E R U H I G M E I N K
I N D I N D U E R R E N B L A E T T E R N S A E U S E L T D E R W I N D W I L L
S T F E I N E R K N A B E D U M I T M I R G E H N M E I N E T O E C H T E R S O
L L E N D I C H W A R T E N S C H O E N M E I N E T O E C H T E R F U E H R E N
D E N N A E C H T L I C H E N R E I H N U N D W I E G E N U N D T A N Z E N U N
D S I N G E N D I C H E I N M E I N V A T E R M E I N V A T E R U N D S I E H S
T D U N I C H T D O R T E R L K O E N I G S T O E C H T E R A M D U E S T E R N
O R T M E I N S O H N M E I N S O H N I C H S E H E S G E N A U E S S C H E I N
E N D I E A L T E N W E I D E N S O G R A U I C H L I E B E D I C H M I C H R E
I Z T D E I N E S C H O E N E G E S T A L T U N D B I S T D U N I C H T W I L L
I G S O B R A U C H I C H G E W A L T M E I N V A T E R M E I N V A T E R J E T
Z T F A S S T E R M I C H A N E R L K O E N I G H A T M I R E I N L E I D S G E
T A N D E M V A T E R G R A U S E T S E R R E I T E T G E S C H W I N D E R H A
E L T I N A R M E N D A S A E C H Z E N D E K I N D E R R E I C H T D E N H O F
M I T M U E H E U N D N O T I N S E I N E N A R M E N D A S K I N D W A R T O T
```

Also Goethes Erlkönig. Die geschieht bei $z = 26$ und $s = 40$.

Dies haben auch die Schüler Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey und Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal herausgefunden. Maximilian bietet zudem eine Verallgemeinerung an, mit der man jede Skytale-Chiffre entschlüsseln kann. Marcel benutzt bei der Ermittlung des richtigen von 20 entschlüsselten Textes eine Datei „words“ mit den häufigsten deutschen Wörtern. Die ist ein erster Schritt in Richtung automatische Erkennung von Chiffren, wie er auch in der Praxis von Geheimdiensten (z.B. NSA) benutzt wird, da die anfallenden Datenmengen schon bei einer einzigen Chiffre einen solchen Umfang erreichen, daß sie nicht mehr von Menschenhand gesichtet werden können. (W.G.)

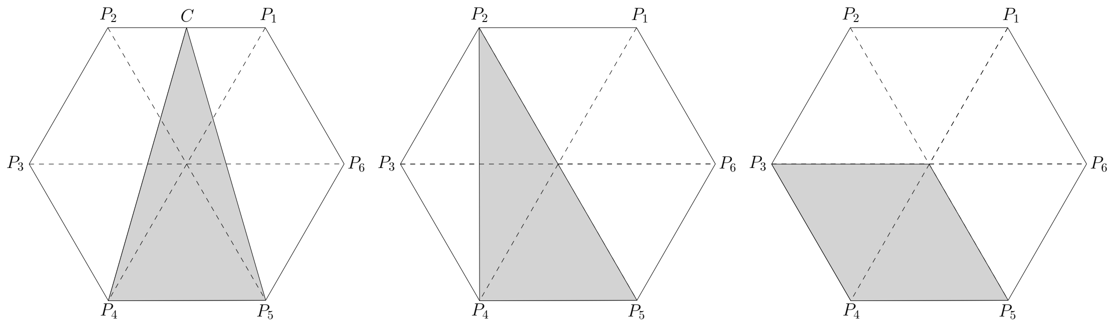
Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

Im regelmäßigen Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ sei C der Mittelpunkt der Seite P_1P_2. Dann gilt für die Fläche S des Sechsecks und die Fläche D des Dreiecks CP_4P_5:

$S = 3D$.

Beweis ohne Worte



Unveränderliche in der Veränderung

von Hartwig Fuchs

Flohsprünge

Ein mathematischer Floh macht eine Reise durch ein Koordinatensystem. Seine Route legt er durch eine Regel fest: Er hüpft vom Punkt (x, y, z) zum nächsten Punkt (x', y', z') nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} x' &= 1 + y - z \\ y' &= 2 + x + y + z \\ z' &= 3 - x - 2y \end{aligned}$$

Bei jeder Landung auf einem Punkt muss er eine Gebühr entrichten, die dem arithmetischen Mittel aus den Koordinaten des Landepunkts entspricht. Wie teuer wird seine Tour, wenn er 100 Punkte – den Endpunkt mitgezählt – besucht?

Wenn der Floh von einem beliebigen Punkt (x, y, z) zum Punkt (x', y', z') springt, dann berechnet sich die Landegebühr so:

$$\frac{1}{3}(x' + y' + z') = \frac{1}{3}(1 + y - z + 2 + x + y + z + 3 - x - 2y) = 2$$

Für jeden Punkt, den er besucht, bezahlt er danach stets den gleichen Betrag – also kostet ihn die Reise den Betrag von 200.

In diesem Beispiel kommt eine Größe vor, die Landegebühr, die von den Veränderungen des mathematischen Zusammenhangs, in dem sie steht, völlig unberührt bleibt - ein solches Objekt heißt eine **Invariante**.

§1 Invarianten in der Mathematik

Schon seit ihren Anfängen kennt die Mathematik Invarianten und arbeitet mit ihnen. So hatten bereits die frühen Geometer entdeckt:

> Bei jedem Kreis ist das Verhältnis von Umfang und Durchmesser stets die gleiche Zahl - eine Invariante also.

Allerdings wurde in den alten Zivilisationen dieser als invariant erkannten Zahl – die man später als π bezeichnete – jeweils ein anderer Wert zugeordnet: Für die Babylonier um 2000 *v.Chr.* hatte π den Wert $3\frac{1}{8}$; die Ägypter um 1700 *v.Chr.* rechneten mit $\pi = (\frac{16}{9})^2$ und in der Bibel ist $\pi = 3$.

Eine andere, diesmal exakt bestimmte Invariante, entdeckte vermutlich Thales von Milet (um $625 - 547$ *v.Chr.*), dem man die Erkenntnis verdankt, dass das Beweisen die notwendige Methode zur sicheren Begründung mathematischer Zusammenhänge ist – zumindest sagt das die Überlieferung. Er konnte zeigen:

> Die Winkelsumme beträgt in jedem Dreieck $180°$.

Mit fortschreitender Entwicklung der Mathematik fand man nach und nach immer mehr neue und wichtige Invarianten. So wurde die Suche nach solchen Unveränderlichen zum mathematischen Dauerbrenner. Als man im 19.Jahrhundert erkannte, dass Invarianten ein unentbehrliches Werkzeug für die Untersuchung verwandter Strukturen sind, rückten sie sogar ins Zentrum der Forschung. Mitverantwortlich dafür war Paul A. Gordan (1837-1912) mit einer bahnbrechenden Arbeit (1864), die man für die Krönung der Invariantentheorie hielt – weshalb ihn seine Kollegen fortan den „König der Invariantentheorie“ nannten. Einen weiteren wichtigen Beitrag lieferte Felix Klein (1849-1925), der in seinem berühmten „Erlanger Programm“ von 1874 alle damals bekannten Geometrien durch Invarianten charakterisieren konnte. Und noch für den jungen David Hilbert (1862-1943) war die Invariantentheorie die vordringlichste Forschungsaufgabe.

Die Frage nach Invarianten entsteht fast zwangsläufig dann, wenn man eine mathematische Konfiguration K_0 - etwa die Koordianten eines Punktes, ein Kreis, ein Dreieck...- durch Operationen „fächerartig“ wie in (1) oder „kettenartig“ wie in (2) transformiert.

(1) Fächer
$$\begin{tikzcd} & K_1 \\ K_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & K_2 \\ \vdots & K_3 \end{tikzcd}$$

(2) Kette $K_0 \to K_1 \to K_2 \to ...$

Falls dann K_0 eine Eigenschaft aufweist, die nach Transformationen des Typs (1) oder (2) auch die Konfigurationen $K_1, K_2, K_3, \ldots$ besitzen, dann spricht man von einer **invarianten Eigenschaft** – kurz: von einer **Invarianten**.

Invarianten treten in einer unüberschaubaren Vielfalt mathematischer Zusammenhänge und damit in den verschiedensten Gestalten auf; zugleich gibt es keine methodische Regel zu ihrer Bestimmung – jeder Fall verlangt seine eigene Vorgehensweise.
Daher bedarf es schon einiger Übung um bei einem Problem mögliche Invarianten zu entdecken. Und nur durch die Bearbeitung von Beispielen und die Lösung von Problemen erlangt man die Erfahrung, die für einen Erfolg bei der Suche nach Invarianten unabdingbar ist.

§2 Invarianten - von welcher Art sie sind und wie man sie findet

B_1: Invarianten bei geometrischen Transformationen

Eine Gerade g wird durch eine Folge paarweise verschiedener Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ nach und nach in immer mehr Teile zerlegt. Gibt es bei dieser schrittweisen Transformation von g eine Invariante?
Die Gerade g wird durch n Punkte in k Teile zerlegt, nämlich in $n-1$ Strecken und in 2 Halbgeraden. Deshalb ist $k = (n-1) + 2$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Mithin gilt vor der Zerlegung und danach für jeden Zerlegungsschritt: Obgleich sich n und damit auch k fortlaufend ändern, bleibt dabei ihre Differenz unverändert, also

(1) $k - n = 1$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ – also ist $k - n$ eine Invariante bei der Transformation der Gerade g.

B_2: Invarianten bei algebraischen Transformationen

Das Polynom $p(x) = x^2 - x - 1$ sei die Startkonfiguration für den in der Figur angegebenen Fächer von n Transformationen, $n \geq 1$.

$$\begin{array}{lll} & \nearrow & p(x-1) \\ p(x) & \longrightarrow & p(x-2) \\ & & \vdots \\ & \searrow & p(x-n) \end{array}$$

Eine leicht erkennbare Invariante bei diesen Transformationen ist der Grad 2 der Polynome $p(x-i)$ mit $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, denn es gilt:

(1) $$\begin{aligned} p(x-i) &= (x-i)^2 - (x-i) - 1 \\ &= x^2 - (2i+1)x + (i^2 + i - 1), \\ & i = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Eine etwas verborgenere Invariante findet man, wenn man nach den Lösungen der Gleichungen $p(x-i) = 0$ fragt. Dabei kommen Diskriminantenins Spiel. Nach (1) sind diese Diskriminanten:

(2) $D_i = \sqrt{(2i+1)^2 - 4(i^2 + i - 1)} = \sqrt{5},\ i = 0, 1, 2, \ldots n.$

Sämtliche Polynome $p(x-i)$ haben die gleiche Diskriminante. Wegen $D_i = D_0$, also ist D_0 eine Invariante bei den Transformationen von $p(x)$.

B_3: Invarianten bei arithmetischen Transformationen

Es sei m eine natürliche Zahl mit der Einerziffer 7 - kurz $E(m) = 7$. Eine beliebige Zahl m_0 aus der Menge $\{7, 17, 27, ...\}$ sei nun die Startzahl für die folgende Kette von Transformationen von m_0:

$$m_0 \to m_1 = m_0^5 \to m_2 = m_0^{5+4} \to ... \to m_n = m_0^{5+4\cdot(n-1)},\ n \leq 1.$$

(1) Es gilt: Die Einerziffer 7 von m_0 ist eine Invariante bei den Transformationen von m_0 – also $E(m_i) = 7$ für $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Zum Nachweis von (1) zeigen wir vorweg:
Es seien a, b natürliche Zahlen mit $E(a) = x,\ 0 \leq x \leq 9$ und $E(b) = y,\ 0 \leq y \leq 9$. Dann gilt $E(a \cdot b) = E(x \cdot y)$.
Setzt man nämlich $a = r \cdot 10 + x,\ b = s \cdot 10 + y$, so ist

$$a \cdot b = (rs \cdot 10 + ry + sx) \cdot 10 + xy,$$

woraus die Behauptung folgt.

Nun zu (1):
Für m_0 ist $E(m_0) = 7$. Dann ist $E(m_0^4) = E(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 1$ und $E(m_0^5) = E(m_0^4 \cdot m_0) = E(m_0) = 7$. Daraus erhält man (1) für $n \geq 1$ so:

$$\begin{aligned} E(m_0^{5+4(n-1)}) &= E(m_0^{5+4(n-2)} \cdot m_0^4) = E(m_0^{5+4(n-2)}) = ... \\ &= E(m_0^{5+4}) = E(m_0^5 \cdot m_0^4) = E(m_0^5) = 7 \end{aligned}$$

B_4: Invariante eines algorithmischen Prozesses

Auf einem Zettel seien 20 positive und 15 negative Zahlen notiert. Diese Konfiguration K_0 wird nun transformiert, indem man zwei beliebige Zahlen z_1, z_2 aus K_0 durch ihr Produkt $z_1 \cdot z_2$ ersetzt.
Die so entstandene Konfiguration K_1 wird dann auf die gleiche Weise in eine Konfiguration K_2 transformiert und so weiter, bis man zur Konfiguration K_{34} aus nur noch einer Zahl z gelangt. Welches Vorzeichen hat z?

Das Produkt aller Zahlen aus K_0 sei P. Dann ist auch das Produkt aller Zahlen aus $K_1, K_2, ...$ und schließlich aus K_{34} jeweils P - das bedeutet: P ist eine Invariante „längs" der Kette $K_0 \to K_1 \to K_2 \to \cdots \to K_{34}$, und es gilt $P = z$. Wegen $P < 0$ ist daher z eine negative Zahl.

B_5: Fixpunkte - Invarianten bei nur einer Transformation

Es sei M eine nichtleere Menge und f sei eine Vorschrift, mit der M in die Menge $f(M)$ transformiert wird.
Wenn es dann in M ein Element a gibt, das bei der Transformation von M invariant ist – für das also $f(a) = a$ ist, dann heißt a ein **Fixpunkt**.

Beispiel:

Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und durch f mit $x \to f(x) = x^3 + x - 8$ werde $\mathbb{R}$ in $f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \text{ reell}\}$ transformiert. Für einen eventuellen Fixpunkt bei dieser Transformation folgt aus der Bedingung $f(a) = a$, dass dann für a gilt:

$a^3 + a - 8 = a$ und daher ist $a^3 = 8$.

Somit ist die Zahl 2 mit $f(2) = 2$ der einzige Fixpunkt bei der von f bewirkten Transformation $\mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$.

Mit B_1 bis B_5 ist beispielhaft veranschaulicht, wie man Invarianten erkennt und bestimmt. Damit ist ein erster Schritt in die Welt der Invarianten getan. Aber es bleibt die entscheidende Frage: Welchen mathematischen Nutzen haben sie?
Invarianten stellen eine Möglichkeit dar, um Antworten auf grundlegende Fragen zu finden wie diese:

- Gehört ein Objekt zu einer gegebenen Menge oder nicht?
- Wie lassen sich Objekte einer Menge charakterisieren?
- Ist in einer Transformationskette - etwa in einem Algorithmus oder einem Spiel ein bestimmtes Objekt, ein bestimmter Zustand erreichbar oder nicht?

Mindestens aber ebenso bedeutsam ist:

- Invarianten führen hin zur Definition von Halbinvarianten, die Grundlage einiger wichtiger Beweistypen bilden. In §4 werden wir darauf eingehen.

§3 Invarianten als Problemlöser

B_2 (Fortsetzung): Zugehörigkeit zu einer Menge

Es sei P die Menge der oben in B2 definierten Polynome $p(x-i)$, $i = 0, ..., n$ und Q sei die Menge der Polynome $q_a(x) = x^2 - ax + 1$ mit reellen $a \geq 0$. Gibt es Polynome $q_a(x)$, die auch in der Menge P enthalten sind?

Nach B2 (2) hat jedes Polynom aus P die Diskriminante $\sqrt{5}$. Damit also ein Polynom $q_a(x)$ zu P gehört, muss seine Diskriminante D_a die notwendige Bedingung $D_a = \sqrt{a^2 - 4} = \sqrt{5}$ erfüllen. Das ist der Fall für $a = \pm 3$. Da $a \geq 0$ vorausgesetzt ist, sei also $a = 3$.
Setzen wir versuchsweise $q_3(x) = p(x - i)$, so gilt nach B2 (1)

$$x^2 - 3x + 1 = x^2 - (2i + 1)x + (i^2 + i - 1)$$

und daraus folgt wegen $-3 = -2i - 1$ und $1 = i^2 + i - 1$, dass $i = 1$ ist. Es gibt also in Q nur ein Polynom, nämlich $q_3(x)$, das zugleich in der Menge P ist.

B_6: Charakterisierung einer Punktfolge

In der Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...$ eine Punktfolge, die für ein relles $a \neq 0$ und ein reelles $b \neq 0$ so definiert ist:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{ax_n - by_n}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bx_n + ay_n}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \text{ mit } (x_1, y_1) = (1, 1),$$

Es sei d_{n+1} der Abstand des Punktes (x_{n+1}, y_{n+1}) vom Punkt $(0, 0)$. Nach Pythagoras gilt dann:

(1) Für $n = 1, 2, 3, \dots$ ist

$$d_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \frac{(ax_n - by_n)^2 + (bx_n + ay_n)^2}{a^2 + b^2}$$
$$= \frac{(a^2 + b^2)x_n^2 + (a^2 + b^2)y_n^2}{a^2 + b^2} = x_n^2 + y_n^2 = d_n^2.$$

Da (1) für jedes $n \geq 1$ gilt und $d_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ist, ergibt sich aus (1): Jeder Punkt der Folge hat den Abstand $\sqrt{2}$ von $(0, 0)$. Durch diesen invarianten Abstand sind alle Punkte der Folge geometrisch so charakterisierbar: Wie auch immer $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gewählt sind, die Punkte der Folge liegen alle auf dem Kreis, dessen Mittelpunkt $(0, 0)$ und dessen Radius $\sqrt{2}$ ist und der daher die Koordinatengleichung $x^2 + y^2 = 2$ besitzt.

B_7: Unerreichbarer Endzustand eines Prozesses

Herakles, der berühmte Held der griechischen Sage, erhielt den Auftrag, die 100-köpfige Schlange Hydra zu töten. Dazu musster er ihr sämtliche Köpfe abschlagen. Aber[1]:

(1) Herakles kann dem Monster mit einem Schwerthieb nur entweder 4 oder 10 oder 12 Köpfe abschlagen. Dann aber wachsen der Schlange entsprechend dem Verlust entweder 11 oder 3 oder 5 neue Köpfe.
Kann Herakles die Schlange Hydra töten?

Es sei k_{n-1} die Anzahl von Hydras Köpfen unmittelbar vor der n-ten Aktion H_n des Herakles, $n \geq 1$. Als Folge der Aktion H_n gilt dann unmittelbar vor der Aktion H_{n+1}:

$$k_n = k_{n-1} + i, \text{ wobei } i = -4 + 11 \text{ oder } i = -10 + 3 \text{ oder } i = -12 + 5 \text{ ist .}$$

Das bedeutet:
In der Kette $k_0 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots$ ändern sich die Zahlen k_i, $i \geq 1$, um ± 7 – also invarianter Weise um ein Vielfaches von 7. Deshalb gilt:

(2) Für $n = 1, 2, 3, \dots$ ist $k_n = 100 + 7m$ mit $m \neq 0$.

Weil nun $100 + m \cdot 7 = 2 + 14 \cdot 7 + m \cdot 7 = 2 + (14 + m) \cdot 7$ ist, gibt es kein m und damit auch kein n, so dass $k_n = 0$ ist.
Daher kann Herakles die Schlange Hydra nicht töten.

§4 Halbinvarianten als Gerüst von Beweis-Methoden

Es sei $K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots$ eine Transformationskette, bei der sich eine bestimmte Eigenschaft der Startkonfiguration K_0 „längs" der Kette schrittweise verändert, diese Veränderungen jedoch stets nach dem gleichen (invarianten) Muster erfolgen. Eine solche Eigenschaft heißt eine **Halbinvariante**. Auf ihre Rolle als struktureller Bestandteil wichtiger Beweistypen wollen wir nun mit drei Beispielen eingehen.

[1] (1) ist ein moderner – nämlich unser – Zusatz zu der alten Sage.

B_8: Halbinvarianten in der vollständigen Induktion

Ausgehend von der leeren Menge $M_0 = \{\}$ sei eine Kette aus Mengen so konstruiert: Für irgendwelche Dinge a_1, a_2, a_3, … sei

$$M_0 = \{\} \to M_1 = \{a_1\} \to M_2 = \{a_1, a_2\} \to ... \to M_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \to ...$$

Man bestimme für $n = 0, 1, 2, ...$ die Anzahl der Teilmengen von M_n, wenn je zwei Elemente a_i und a_j mit $i \neq j$ verschieden sind.

Die Teilmengen von M_k seien $T_1, T_2, ..., T_m$. Dann hat M_{k+1} die Teilmengen $T_1, T_2, ..., T_m, T_1 \cup \{a_{k+1}\}, T_2 \cup \{a_{k+1}\}, ..., T_m \cup \{a_{k+1}\}$. Daraus folgt:

(1) M_{k+1} hat doppelt so viele Teilmengen wie M_k

Es sei $A(M_k)$ die Anzahl der Teilmengen von M_k.
Da die leere Menge $M_0 = \{\}$ nur sich selbst als Teilmenge besitzt, gilt $A(M_0) = 1$.
Diese numerische Eigenschaft von M_0 ist nun eine Halbinvariante, die sich nach dem invarianten Muster (1) verändert. Denn wenn für M_k gilt, dass $A(M_k) = A(M_0) \cdot 2^k = 2^k$ ist – was wegen (1) naheliegt, dann gilt wieder mit (1): Für M_{k+1} ist $A(M_{k+1}) = 2^{k+1}$.
Damit ist bewiesen:
Eine Menge mit n Elementen besitzt 2^n Teilmengen, $n = 0, 1, 2, ...$

B_9: Halbinvarianten in Regress-Beweisen[2]

(1) Die Gleichung $x_0^2 + y_0^2 = 3(x_1^2 + y_1^2)$ hat keine Lösung mit von 0 verschiedenen ganzen Zahlen x_0, y_0, x_1, y_1.

Vorweg:

(2) Aus $3 \mid (a^2 + b^2)$ folgt $9 \mid a^2$ und $9 \mid b^2$ für positive ganze Zahlen a^2 und b^2.

Es sei $a^2 = 3c + r$ mit $r = 0, 1$ oder -1 und $b = 3d + s$ mit $s = 0, 1$ oder -1.
Dann ist $a^2 + b^2 = 3(3c^2 + 2cr + 3d^2 + 2ds) + r^2 + s^2$ mit $r^2 + s^2 = 0, 1$ oder 2.
Wegen $3 \mid (a^2 + b^2)$ ist $r^2 + s^2 = 0$, was nur für $r = s = 0$ der Fall ist.
Damit gilt: Aus $a = 3c$ und $b = 3d \Rightarrow 3 \mid a$ und $3 \mid b \Rightarrow 9 \mid a^2$ und $9 \mid b^2$.

(3) Aus $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ folgt $c^2 + d^2 = 3(e^2 + f^2)$, für positive ganze Zahlen $a^2, b^2, ...,$

Wegen $3 \mid (a^2 + b^2)$ gilt (2). Dann gibt es ganze Zahlen $e^2 \neq 0$ und $f^2 \neq 0$, so dass $a^2 = 9e^2$ und $b^2 = 9f^2$ sowie $a^2 + b^2 = 9(e^2 + f^2) = 3(c^2 + d^2)$. Also ist $c^2 + d^2 = 3(e^2 + f^2)$.
Nun zu Behauptung (1):
Annahme: Es gibt eine Lösung von (1) mit von 0 verschiedenen ganzzahligen x_0, y_0, x_1, y_1. Mit Hilfe von (3) kann man dann die folgende Kette (4) aus Gleichungen konstruieren:

(4) $x_0^2 + y_0^2 = 3(x_1^2 + y_1^2) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 3(x_2^2 + y_2^2) \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 = 3(x_3^2 + y_3^2) \Rightarrow ...$

Es sei nun $x_k^2 + y_k^2 = S_k$ gesetzt. Aus (4) folgt dann

[2] Man sagt auch: Beweis durch unendlichen Abstieg

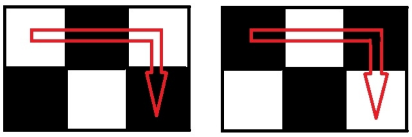
(5) $S_0 > S_1 > S_2 > \ldots$

S_0 ist eine Halbinvariante, deren Veränderung längs der Kette (4) vom Muster (5) beschrieben wird. Dieses Muster muss mit einem kleinsten S_m abbrechen, weil jedes S_k, $k = 0, 1, \ldots, m$ eine positive ganze Zahl ist. Für S_m gilt: $S_{m-1} = 3S_m$ und wegen (3) ist dann $S_{m+1} = 3S_m$, so dass $S_m > S_{m+1}$ ist- im Widerspruch zur Minimalität von S_m. Daher ist die Annahme falsch und es gilt (1).

B_{10}: Halbinvarianten in Unmöglichkeitsbeweisen

Auf dem weißen Eckfeld F_1 eines Schachbretts befindet sich ein Springer. Kann man diesen mit erlaubten Spielzügen auf das dem Feld F_1 diagonal gegenüber liegende Eckfeld so bewegen, dass jedes der 63 von F_1 verschiedenen Felder genau ein Mal besucht wird?

Angenommen, es gibt eine solche Zugfolge $F_1, F_2, \ldots, F_{64}$, die von F_1 aus in der angegebenen Felderfolge zu F_{64} führt. Für diese Zugfolge gilt dann:



(1) Startfeld und Endfeld sind bei jedem Zug des Springers von verschiedener Farbe.

Die Farbe des Feldes F_1 ist eine Halbinvariante, die sich nach dem Muster (1) von Zug zu Zug ändert.
Da F_1 weiß ist, sind auch die Felder $F_3, F_5, \ldots F_{63}$ weiß und folglich ist F_{64} schwarz. Nun liegen aber F_1 und F_{64} auf derselben Diagonale, so dass F_{64} weiß sein muss. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist. Es gilt daher: Eine Zugfolge $F_1, F_2, \ldots, F_{64}$ mit paarweise verschiedenen Feldern ist nicht möglich, wenn F_1 und F_{64} Eckfelder der gleichen Diagonale sind.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Gleiche Abstände

Annie schaut sich während der großen Pause auf dem Schulhof um. Dann sagt sie zu Betty: „Du stehst genauso weit von mir entfernt wie Connie, Daria und Elsa. Denselben Abstand voneinander wie zu mir hast du auch zu Daria, denselben Abstand haben Connie und Elsa, Franzi und Connie, Franzi und Elsa, Gigi und Daria, Gigi und Franzi sowie Gigi und du.“
Betty runzelt die Stirn. „Wir stehen alle auf dem ebenen Hof und keine zwei von uns stehen auf demselben Fleck. Das kann doch gar nicht sein“, entgegnet sie.

Gibt es eine Anordnung mit den von Annie genannten Eigenschaften?

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 16. Mai 2016 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 123

In Heft 123 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Rote und grüne Äpfel

Nachdenklich kommt Herr Pommer aus seinem Keller zurück. „Die Apfelernte vom letzten Herbst ist doch schon weit aufgebraucht. Es sind nur noch etwas mehr rote als grüne Äpfel übrig, und zusammen sind es nun weniger als 50“, brummelt er. „Dann kannst du uns ja noch zwei Äpfel heraufholen“, entgegenet seine Frau. „Ich mag jetzt nicht mehr hinuntergehen“, sagt Herr Pommer und fährt fort: „Wenn du nachher sowieso unten bist, greife doch einfach blind in den Korb und nimm zwei Äpfel zufällig heraus. Ich weiß, dass du mit derselben Wahrscheinlichkeit zwei verschiedenfarbene Äpfel mitbringst wie zwei gleichfarbige.“

Wie viele rote und wie viele grüne Äpfel sind in dem Korb?

Ergebnisse

Es sei r die Anzahl der roten und g die Anzahl der grünen Äpfel. Laut Aufgabenstellung gilt dann $g < r$ und $g + r < 50$. Wegen des blinden Ziehens können wir die Wahrscheinlichkeiten durch Abzählen der günstigen und möglichen Fälle bestimmen und erhalten nach Herrn Pommers Behauptung:

$$\frac{r}{r+g} \cdot \frac{r-1}{r+g-1} + \frac{g}{r+g} \cdot \frac{g-1}{r+g-1} = \frac{r}{r+g} \cdot \frac{g}{r+g-1} + \frac{g}{r+g} \cdot \frac{r}{r+g-1}.$$

Dabei steht links die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei gleichfarbige Äpfel zu ziehen; rechts die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Äpfel. Multiplizieren mit dem Hauptnenner und Multiplizieren der Zähler liefert $r^2 - r + g^2 - g = 2rg$, woraus durch Umstellen und Anwenden der binomischen Formel $(r-g)^2 = r+g$ folgt. Somit muss $r+g$ eine Quadratzahl sein kleiner 50 sein. Dies können nur die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36 und 49 sein, wobei 1 nicht in Frage kommt, weil dann keine grünen Äpfel mehr da wären. Sucht man in jedem möglichen Fall nach den zwei Zahlen, deren Summe das Quadrat ihrer Differenz ist, findet man die Paare $(r, g) = (3, 1)$, $(6, 3)$, $(10, 6)$, $(15, 10)$, $(21, 15)$, $(28, 21)$, die tatsächlich alle die Bedingung erfüllen.

Vollständig richtige Lösungen wurden von den Schülern Maximilian Göbel, Silas Rathke und Theresa Schöche eingeschickt.

Bemerkungen: Wer Herrn Pommer so versteht, dass die Anzahl 50 möglichst knapp unterschritten sein soll, wird sich auf das Lösungspaar $(28, 21)$ beschränken. Im Übrigen bestehen die Paare aus aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen. Dies ist leicht zu zeigen; aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe!

Mathematik in der Natur

von Theresa Schöche

Inspiriert zu diesem Artikel hat mich die diesjährige Mainzer Mathe-Akademie. Einer der drei Arbeitskreise beschäftigte sich mit dem „Goldenen Schnitt“ und wurde von Frau Dr. Hog-Angeloni, Herrn Prof. Dr. Schuh und Laura Biroth geleitet.

Der Goldene Schnitt als ein bestimmtes Verhältnis zweier Seitenlängen zueinander ist ganz gewiss jedem schon einmal begegnet. Auch Leonardo da Vinci arbeitete sehr gerne mit diesem Seitenver-hältnis, unter anderem in seinem berühmten Werk des vitruvianischen Menschen. Im Zusammen-hang mit dem Goldenen Schnitt wird oft die Fibonacci-Folge erwähnt. Sowohl über den Zusammenhang zwischen dem Goldenen Schnitt und den Fibonacci-Zahlen als auch über deren Vorkommen in der Natur werde ich im Folgenden einen kurzen Überblick geben.

Der Goldene Schnitt ist definiert als: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ und wird mit dem griechischen Buchstaben Φ bezeichnet.

Setzt man für $\frac{a}{b} = \Phi$ und formt die Gleichung um, bekommt man folgendes quadratisches Gleichungssystem $0 = \Phi^2 - \Phi - 1$. Die Lösungen, die sich ergeben, sind $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $-\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, wobei $\varphi := \frac{1}{\Phi}$.
Betrachtet man den Anfang der Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... fällt schnell auf, dass man zwei nebeneinanderliegende Folgeglieder addieren muss, um so das darauffolgende Folgeglied zu erhalten. Somit lässt sich die Folge leicht rekursiv definieren:

$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ mit $F_1 = F_2 = 1$ für alle $k \geq 1$.

Nun besteht aber ein enger Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt. Dividiert man nämlich zwei direkt aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen miteinander, so nähert man sich dem Goldenen Schnitt an. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

Andersherum gesehen kann man mit Hilfe des Goldenen Schnitts eine explizite Darstellung der Fibonacci-Folge angeben.

$$F_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k \cdot \sqrt{5}} = \frac{(\Phi)^k - (-\frac{1}{\Phi})^k}{\sqrt{5}}.$$

Den goldenen Schnitt findet man in der Natur z.B. bei der Sonnenblume, dem Tannenzapfen und der Ananas. Sie haben gemeinsam, dass bei Ihnen viele Spiralen erkennbar sind. Im Inneren der Sonnenblume beispielsweise bilden die einzelnen

Samen Spiralen. Im Folgenden stellt sich die Frage, warum die Samen so wachsen, dass sie Spiralen bilden.

In unserem Kurs wurde uns dazu ein mathematisches Modell vorgestellt: Die Punkte s_0, s_1, s_2, ... stellen die Samen der Sonnenblume dar. s_0 bezeichnet nun den Samen, der dem Zentrum am nächsten ist. Der nächste Samen wächst um einen bestimmten Winkel gedreht und um einen gewissen Abstand nach hinten versetzt. Was uns interessiert, ist nicht der Abstand nach hinten, sondern der Drehwinkel ω der Samen. Dafür gibt es nämlich zwei Möglichkeiten. Entweder ist $\omega \in \mathbb{Q}$, also eine rationale Zahl, oder $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und damit eine irrationale Zahl.
Betrachten wir den ersten Fall, kann der Winkel $\omega = 2\pi \cdot \frac{p}{q}$ mit einem gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ ausgedrückt werden. Wir nehmen als Beispiel den Winkel $\omega = 2\pi \cdot \frac{2}{3}$. Zu beachten ist, dass die Winkel im Bogenmaß angegeben sind. Außerdem ist auch die Anzahl der Umrundungen der Samen nicht wichtig (Vielfache von 2π können vernachlässigt werden) und daher wird nachfolgend mit Hilfe der Modulorechnung nur der eigentliche Winkel zwischen s_0 und einem weiteren Samen in einer einzigen Kreisumdrehung betrachtet.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \sphericalangle(s_0, s_0) = 0 \\
\alpha_1 &= \sphericalangle(s_1, s_0) = \omega = 2\varphi \cdot \frac{2}{3} \\
\alpha_2 &= 2\omega = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \mod 2\pi \\
\alpha_3 &= 3\omega = 2\pi \cdot 2 = 4\pi = 0 = \alpha_0 \mod 2\pi \\
\alpha_4 &= 4\omega = 2\pi \cdot \frac{8}{3} = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \alpha_1 \mod 2\pi \\
\alpha_5 &= 5\omega = 2\pi \cdot \frac{10}{3} = 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \alpha_2 \mod 2\pi \\
\alpha_6 &= \alpha_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Würde man dies weiterführen, so würden sich bei den Pflanzen Samenstränge ausbilden, was natürlich in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Daher muss der Winkel irrationalen Ursprungs sein. Wenn dies so ist, bilden sich, egal wie viele Samen betrachtet werden, keine Stränge aus. In der Natur entspricht der Winkel genau unserem Goldenen Schnitt und ist sozusagen der Goldene Winkel. Neuste Forschungen haben ergeben, dass zum einen alle Blätter einer Pflanze am besten belichtet werden und es für die Pflanzen platzsparend ist, in diesem Goldenen Winkel zu wachsen. Färbt man nun jeden n-ten Samen an – dabei ist n eine Fibonacci-Zahl –, erhält man die Spiralen. Die An-zahl dieser Spiralen entspricht somit auch einer der Fibonacci-Zahlen. Interessant ist, dass keine schönen Spiralen entstehen, wenn n keine Fibonacci-Zahl ist.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 124

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Wahr oder falsch?

Es seien n_1, n_2, n_3, n_4 unmittelbar aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen. Dann ist $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 + 1$ stets eine Quadratzahl. Trifft das zu? (H.F.)

Lösung:

Es seien $n_1 = n - 1$, $n_2 = n$, $n_3 = n + 1$, $n_4 = n + 2$ für eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} &(n-1)n(n+1)(n+2)+1 = (n^2+n)(n^2+n-2)+1 \\ =\ &[(n^2+n-1)+1][(n^2+n-1)-1]+1 \\ =\ &(n^2+n-1)^2-1+1 = (n^2+n-1)^2 \end{aligned}$$

Die Aussage trifft also zu.

II. Buchstabensuppe

Wie geht es weiter? Und warum?

a)

A				E	F		H
	B	C	D			G	

b)

A					F		H
	B	C	D	E		G	

Gib jeweils die drei nächsten Buchstaben an. (WJB)

Lösung:

a) Oben stehen die Buchstaben, die man nur mit geraden Linien schreibt.

A				E	F		H	I		K
	B	C	D			G			J	

b) Unten stehen die Buchstaben, bei denen man ein „ee“ spricht.

A					F		H	I	J	K
	B	C	D	E		G				

III. Eine geometrische Knobelei

Kannst Du in der Ebene acht Geraden so zeichnen, dass gilt:

a) Die acht Geraden schneiden sich in genau neun Punkten?

b) Sie schneiden sich in genau zehn Punkten?

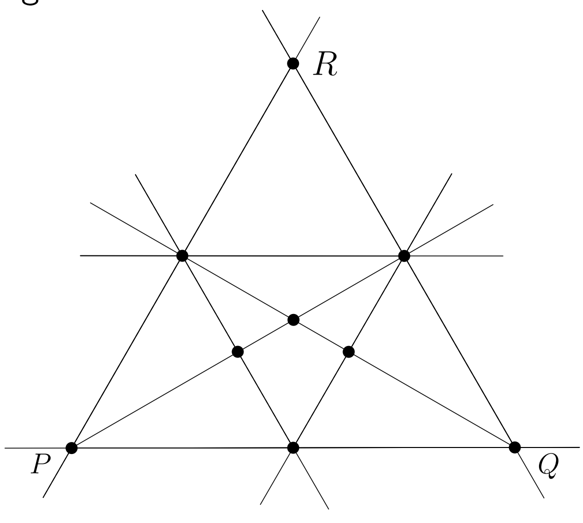
c) Sie schneiden sich in genau elf Punkten?

d) Beantworte die Fragen b) und c) auch für neun Geraden! (H.F.)

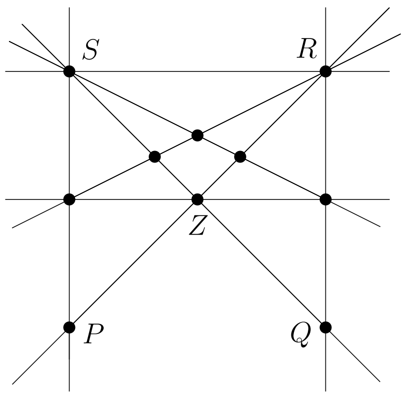
Hinweis: Eine korrekte Zeichnung genügt als Lösung.

Lösung:

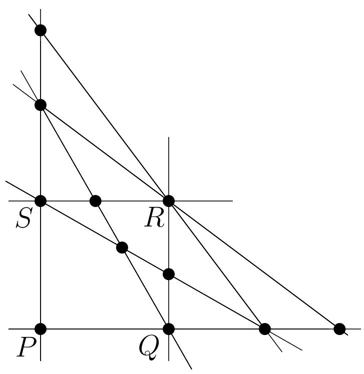
a) *PQR* sei ein gleichseitiges Dreieck.



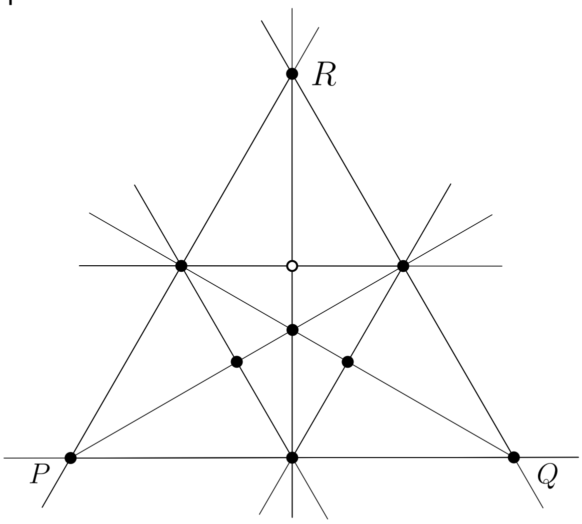
b) *PQRS* sei ein Quadrat.

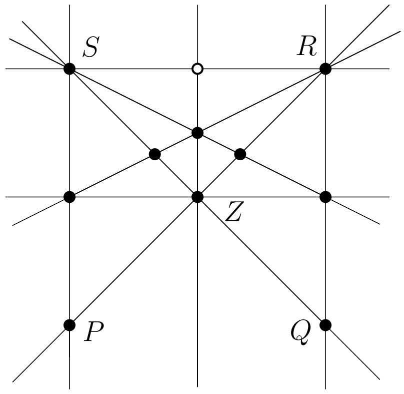


c) *PQRS* sei ein Quadrat.



d) Wenn man in der Figur a) die Höhe durch R im Dreieck PQR zeichnet, dann hat man eine Lösung für den Fall „neun Geraden, zehn Schnittpunkte“. Zeichnet man in der Figur b) die Gerade durch das Zentrum Z des Quadrats $PQRS$ und parallel zu PS, dann hat man eine Lösung für den Fall „neun Geraden, elf Schnittpunkte“.





IV. Aufregung im Märchenwald

Im Märchenwald ist die Aufregung groß: Die goldene Kugel des Froschkönigs wurde gestohlen. Der König möchte, dass der Dieb schnellst möglich überführt wird und beauftragt seinen Hofmarschall, Ermittlungen durchzuführen. Dieser befragt nun mögliche Zeugen.
Schneewittchen sagt: „Schau Aschenputtel nicht so böse an. Sie war es nicht!“
Aschenputtel schreit: „Ich weiß genau, dass es Pinocchio war!“
Der gestiefelte Kater meint: „Pinocchio war es nicht!“
Pinocchio ruft: „Es war Schneewittchen! Ich schwör's!“
Als der Hofmarschall wieder in seinem Büro sitzt und ratlos über die vier Aussagen nachdenkt, kommen Hänsel und Gretel herein: „Als wir gestern auf dem Heimweg durch den Wald waren, haben wir etwas beobachtet. Na ja... wir möchten ja niemanden verraten, aber wir können so viel sagen: Nur drei von ihnen sagen die Wahrheit...“

a) Der Hofmarschall kann nun den Fall lösen und weiß, wer gelogen und wer gestohlen hat. Zu welchem Ergebnis ist er gekommen?
b) Um wie viele Zentimeter ist Pinocchios Nase gewachsen? (MG)

Lösung:

a) Aufgrund der Aussage von Hänsel und Gretel weiß der Hofmarschall, dass drei der vorherigen Zeugenaussagen wahr sind und nur eine gelogen ist.
Die Aussagen von Aschenputtel und dem gestiefelte Kater widersprechen einander direkt, also muss eine von beiden gelogen sein.
Angenommen, die Aussage von Aschenputtel wäre wahr. Dann wäre die Aussa-

ge des gestiefelten Katers gelogen und deshalb wäre doch Pinocchio der Dieb. Dies wäre aber ein Widerspruch zur ebenfalls wahren Aussage von Pinocchio, dass Schneewittchen die Diebin sei.
Folglich muss die Aussage von Aschenputtel gelogen sein und Pinocchio ist unschuldig. Dies deckt sich mit der wahren Aussage des gestiefelten Katers. Auch Schneewittchens und insbesondere Pinocchios Aussagen sind wahr, wobei letzterer aussagt, dass Schneewittchen die Diebin ist – aber sie hat ja auch schon bei den sieben Zwergen Mundraub begannen.
Also hat Aschenputtel gelogen und Schneewittchen die goldene Kugel geklaut.

b) Da Pinocchio die Wahrheit gesagt hat, ist seine Nase gar nicht gewachsen.

V. Einerziffer einer Summe mit 2016 Summanden

Welches ist die Einerziffer der Summe $9^1 + 9^2 + 9^3 + ... + 9^{2016}$? (H.F.)

Lösung:

Die Folge der Einerziffern der Zahlen $9^1, 9^2, 9^3, 9^4, \dots, 9^{2015}, 9^{2016}$ ist 9, 1, 9, 1, ..., 9, 1. Daher besitzt die Summe $9^1 + 9^2 + 9^3 + ... + 9^{2016}$ die Einerziffer 0.

VI. Nichtnegatives Produkt

Für welche negativen Zahlen n ist das Produkt $P = n(n + 3)(n + 7)$ nicht negativ? (WJB)

Lösung:

Der Faktor n ist negativ. Soll P nicht negativ sein, so muss $(n + 3)(n + 7) \geq 0$ sein. Dies ist der Fall, wenn $n + 3 \leq 0$ und $n + 7 \geq 0$ ist, also für $n \in \{-7, -6, -5, -4, -3\}$.

VII. Quersummen und Querprodukte

Die Quersumme (Ziffernsumme) einer Zahl ist die Summe aller ihrer Ziffern, das Querprodukt (Ziffernprodukt) entsprechend das Produkt aller Ziffern der Zahl, zum Beispiel hat 125 die Quersumme $1+2+5 = 8$ und das Querprodukt $1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$. – Gib begründet

a) die kleinste Zahl mit Quersumme 2016,
b) die kleinste Zahl mit Querprodukt 2016 sowie
c) jeweils die größte Zahl mit Quersumme beziehungsweise Querprodukt 2016 an.

(MG)

Lösung:

a) Es ist $2016 = 224 \cdot 9$. Die kleinste Zahl mit Quersumme 2016 ist also die Zahl, die aus 224 Neunen besteht: $\underbrace{999...9}_{224 \text{ Stellen}} = 10^{224} - 1$.

b) Wegen $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 7$ besteht die gesuchte Zahl aus den Ziffern 4, 8, 9 und 7. Die kleinste Zahl mit diesen

Ziffern ist 4789.

Bemerkung: Andere Kombinationen der Primfaktoren zu Ziffern der gesuchten Zahl führen zu einer größeren Zahl (etwa 6687).

c) Die Zahl mit 2016 Einsen ist schon sehr groß und hat die geforderte Quersumme, allerdings lassen sich beliebig viele Nullen ergänzen, ohne dass sich die Quersumme ändert – und somit lässt sich zu jeder Zahl mit Quersumme 2016 eine noch größere Zahl finden (hänge beispielsweise hinten eine 0 an).
Analog hat die Zahl 73 322 222 das Querprodukt 2016, die Zahl lässt sich aber diesmals mittels Ergänzen von Einsen beliebig vergrößern, ohne dass sich das Querprodukt ändert. Es lässt sich also zu jeder Zahl mit Quersumme 2016 eine noch größere Zahl finden (hänge beispielweise hinten eine 1 an).
Es gibt also *keine* größten Zahlen mit Quersumme oder -produkt 2016.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

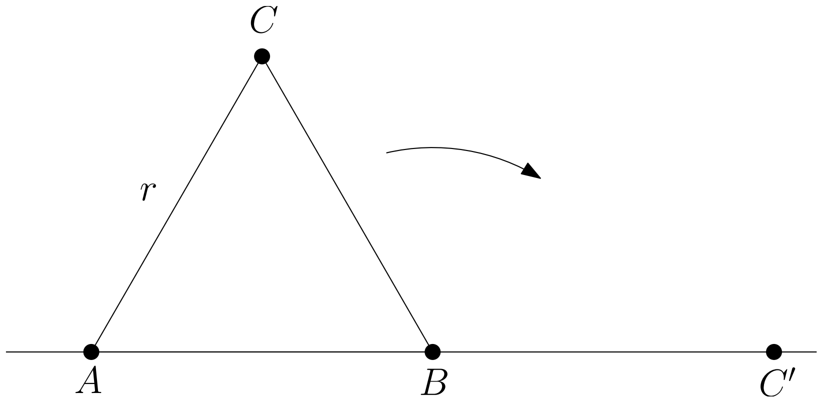
I. Nur die Ziffer 1

Zeige: Es gibt eine ganze Zahl n, mit $0 < n < 10$, deren Produkt mit 12345679 nur die Ziffer 1 enthält. (WJB)

II. Dreiecke mit Umfang 20

Wie viele gleichschenklige Dreiecke mit Umfang 20 und ganzzahligen Seitenlängen gibt es? Nenne die verschiedenen Möglichkeiten! (WJB)

III. Drehung eines Dreiecks



Ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge r wird zunächst so um den Punkt B gedreht, dass der Punkt C in den Punkt C' auf der Verlängerung von AB überführt wird. Dann drehe man das Dreieck um den Punkt C' und so weiter, bis die Strecke AB wieder in der Verlängerung von AB liegt. Wie lang ist dabei der vom Punkt A zurückgelegte Weg? (H.F.)

IV. Buchstaben – oder doch Zahlen?

Wie geht es weiter bei

a) ZDFSED...?

b) EVNSFS...?

Gib jeweils drei weitere Folgenglieder an und begründe Deine Antwort. (WJB)

V. Zufällige Zahlenwahl

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Menge der Zahlen $\{10, 11, 12, \dots, 999\}$ zufällig eine Zahl herauszunehmen mit

a) lauter verschiedenen Ziffern?

b) mit lauter gleichen Ziffern?

c) mit genau zwei verschiedenen Ziffern? (H.F.)

VI. Geschwindigkeiten

Die Städte Mainz und Frankfurt sind $45\mathrm{km}$ voneinander entfernt. Zwei Radfahrer, einer in Mainz, der andere in Frankfurt, starten gleichzeitig. Die beiden treffen sich $24\mathrm{km}$ von Mainz entfernt. Wenn der Radfahrer aus Mainz $4\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ schneller als der aus Frankfurt fährt, mit welcher Geschwindigkeit fährt dann jeder? (H.F.)

VII. Wie viele Verbindungsgeraden?

a) Wie viele Verbindungsgeraden gibt es zwischen sechs Punkten in der Ebene mindestens, wie viele höchstens?

b) Welche andere Möglichkeiten für die Anzahl der Verbindungsgeraden gibt es noch? (WJB)

Hinweis: Es ist kein Beweis nötig, dass manche Anzahlen nicht auftreten können.

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

Aufgabe 1148: Größenvergleiche
Welche Zahl ist größer?

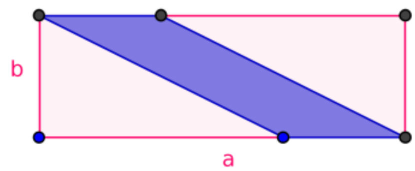
a) $(2015!)^{2016}$ oder $(2016!)^{2015}$?

b) $\sqrt[2015]{2015!}$ oder $\sqrt[2016]{2016!}$? (H.F.)

Hinweis: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ mit $1! = 1$; die Zahl 2015! ist von der Größenordnung 10^{5783}.

Aufgabe 1149: Die Summe 2016
Man addiere die aufeinander folgenden Zahlen 1, 2, 3, ... n.
Wie groß ist n zu wählen, damit die Summe dieser Zahlen ≥ 2016 ist? (H.F.)

Aufgabe 1150: Abstand zweier Parallelen
Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b wird wie nebenstehend durch zwei Parallenen in drei flächengleiche Teiler zerlegt. Welchen Abstand haben die beiden Parallelen voneinander? (H.F.)



Aufgabe 1151: Pythagoreisches Dreieck
In einem rechtwinkligen Dreieck seien die Katheten von ganzzahliger Länge und die Länge seines Umfangs und der Inhalt seiner Fläche seien gleich groß. Wie lang sind dann die Seiten des Dreiecks? (H.F.)

Aufgabe 1152: Zahlenspiel
Während einer langen Bahnfahrt vertreibt sich Mathis die Zeit mit einem Zahlenspiel. Er wählt eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ und verändert sie nach der folgenden Regel:

> Streiche die Einerziffer e von n_0 und addiere $3e$ zu der verkürzten Zahl – das Ergebnis sei die Zahl n_1. Verändere dann n_1 nach der gleichen Regel zu n_2 und so weiter, solange bis zwei übereinstimmende Zahlen n_i, n_{i+1} aufeinander folgen. Damit ist das Spiel zu Ende.
> Beispiel: $n_0 = 21 \to n_1 = 2 + 3 \cdot 1 = 5 \to n_2 = 0 + 3 \cdot 5 = 15 \to \ldots$

Nach einigen Spielen bemerkt Mathis, dass die meisten Spiele nicht enden.

a) Zeige, dass es Spiele gibt, die enden. Gib die möglichen Endzahlen an!

b) Zeige, dass die Spiele, die nicht enden, in einen Zyklus führen, das heißt in eine sich periodische wiederholende Folge. Was kannst Du über die möglichen Zyklen aussagen! (H.F.)

Aufgabe 1153: Würfeln

a) Nach wie vielen Würfen mit einem sechsseitigen Spielwürfel kann man sicher sein, dass sich eine Zahl mindestens einmal wiederholt hat?

Wirf einen Würfel n-mal, wobei n die Zahl ist, die Du in a) bestimmt hast.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint beim letzten Wurf zum ersten mal die Sechs?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiederholt sich beim letzten Wurf zum ersten Mal eine der vorher geworfenen Zahlen? (WJB)

Aufgabe 1154: Durch 2016 teilbar?

Trifft es zu, dass für jedes n, $n = 1, 2, 3, ...$, $S_n = 12127^n - 2345^n + 329^n - 31^n$ ohne Rest durch 2016 teilbar ist? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 124

Klassen 9–13

Aufgabe 1141: Ist 2025 wirklich eine besondere Zahl?

In dem Science-Fiction-Roman „Jenseits des blauen Horizonts“ von Frederik Pohl wird behauptet, die Zahl 2025 sei eine ganz besondere Zahl, weil sie gleichzeitig die Summe

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3$$

und das Quadrat der Summe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9$$

ist. Was ist davon zu halten?

Hier eine Vorgehensweise, um diese Frage zu klären:

a) Berechne die Summe

$$T_n := 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

sowie das Quadrat der Summe

$$S_n := 1 + 2 + \cdots + n$$

nicht nur für $n = 9$, sondern auch für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ usw. (solange es halt Spaß macht). Welche Vermutung drängt sich auf?

b) Beweise Deine Vermutung. (Hans-Peter Heinz, Universität Mainz)

Hinweis: Dabei kann man die bekannte Tatsache benutzen, dass $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ist.

Lösung:

Die Rechenergebnisse aus Teil a) legen die Vermutung nahe, dass immer $T_n = S_n^2$ ist. Insbesondere stimmt das für $n = 1$, denn $T_1 = S_1 = 1$. Für den Induktionsschritt von n auf $n+1$ nehmen wir an, dass $T_n = S_n^2$ schon erwiesen ist, und rechnen:

$$\begin{aligned} S_{n+1}^2 &= (S_n + (n+1))^2 = S_n^2 + 2S_n(n+1) + (n+1)^2 \\ &= T_n + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n+1) + (n+1)^2 = T_n + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ &= T_n + (n+1) \cdot (n+1)^2 = T_n + (n+1)^3 = T_{n+1} \,. \end{aligned}$$

Also gilt auch $T_{n+1} = S_{n+1}^2$, und unsere Vermutung ist durch Induktion bewiesen. Die Zahl $2025 = T_9$ teilt also ihre besondere Eigenschaft mit allen Zahlen der Form T_n. Beachten wir nochmals, dass $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ist, so bekommen wir auch die explizite Formel

$$T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \,.$$

Aufgabe 1142: Eine Summe

Berechne die Summe

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}.$$

(H.F.)

Lösung:

Mit $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ ergibt sich:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2016}.$$

Also ist $S_1 = \frac{2015}{2016}$.

Aufgabe 1143: Polygone der Oberfläche eines Polyeders

Jedes konvexe Polyeder – dessen Oberfläche also aus Polygonen zusammengesetzt ist – hat mindestens zwei Seitenflächen mit der gleichen Kantenzahl. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Unter den Seitenflächen des Polyeders gibt es mindestens eine Fläche F_0, die die maximale Kantenzahl m unter allen Seitenflächen besitzt.

Dann hat F_0 mit m Nachbarflächen F_1, F_2, ..., F_m eine Kante gemeinsam. Für diese $m+1$ Flächen kommen nur die $m-2$ Zahlen 3, 4, ..., m als Kantenzahlen in Frage. Mindestens zwei der $m+1$ Seitenflächen F_0, F_1, ..., F_m müssen also die gleiche Kantenzahl aufweisen.

Aufgabe 1144: Zahlen mit Ziffern 1

Wie viele natürliche Zahlen $< 1\,000\,000$ gibt es, welche die Ziffer 1 mindestens ein Mal besitzen? (H.F.)

Lösung:

Eine nichtnegative ganze Zahl $n < 1000000$ sei mit sechs Ziffern geschrieben, also $n = z_1z_2z_3z_4z_5z_6$, sodass zum Beispiel 0 als 000000 und 5678 als 005678 geschrieben wird.
Wir zählen die Zahlen n, bei denen keine Ziffer 1 vorkommt. Für jede Ziffer von n gibt es neun mögliche Werte, nämlich 0, 2, 3, ..., 9. Somit gibt es $9{\cdot}9{\cdot}9{\cdot}9{\cdot}9{\cdot}9 = 9^6$ verschiedene Zahlen $n < 1000000$ ohne die Ziffer 1.
Dann aber gibt es $1000000 - 9^6 = 468559$ Zahlen n, die mindestens eine Ziffer 1 besitzen.

Aufgabe 1145: Drei mal drei macht... – Teil 3 von 3

Stelle die Zahlen 9 bis 12 mit genau drei Dreien dar.
Du darfst dazu alle beliebigen aus der Schulmathematik bekannten mathematischen Zeichen verwenden, aber keine weiteren Zahlen.
Beispiel: $0 = (3-3)\cdot 3$ (MG)

Lösung:

a) $9 = 3\cdot(3!-3) = \frac{3^3}{3}$
b) $10 = 3\cdot 3{,}\overline{3}$
c) $11 = \frac{33}{3}$
d) $12 = 3\cdot 3+3 = 3!+3+3$

Aufgabe 1146: Wahrscheinlichkeit einer Einerziffer

Es sei $S_n = 1^n + 3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ für jedes $n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$
Man bestimme die Wahrscheinlichkeit P, dass für ein beliebig gewähltes n die Zahl S_n die vorgegebene Einerziffer z, mit $z \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, hat. (H.F.)

Lösung:

Mit $E(a)$ bezeichnen wir die Einerziffer einer ganzen Zahl a.
Die Zahl n durchlaufe die Folge $1, 2, 3, 4, \ldots.$ Dann bilden die Einerziffern von 1^n und von 5^n die konstanten Folgen 1, 1, ... und 5, 5, ... während die Einerziffern von 3^n, 7^n und 9^n Folgen aus den sich periodisch wiederholenden Quadrupeln 3, 9, 7, 1 beziehungsweise 7, 9, 3, 1 beziehungsweise 9, 1, 9, 1 bilden (überprüfe das selbst!).
Kennt man daher $E(S_n) = E(1^n + 3^n + 5^n + 7^n + 9^n)$ für jedes $n = 1, 2, 3, 4$, so kennt man auch $E(S_n)$ für jedes $n \geq 1$.

	$E(1^n)$	$E(3^n)$	$E(5^n)$	$E(7^n)$	$E(9^n)$	$E(S_n)$
$n=1$	1	3	5	7	9	5
$n=2$	1	9	5	9	1	5
$n=3$	1	7	5	3	9	5
$n=4$	1	1	5	1	1	9

Aus der letzten Spalte der Tabelle ergibt sich: Für $z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ist $P(E(S_n) = z) = 0$, für $z = 5$ ist $P(E(S_n) = 5) = \frac{3}{4}$ und für $z = 9$ ist $P(E(S_n) = 9) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 1147: Überschwemmung?

Bei einer maximalen Tiefe von circa 250m hat der Bodensee eine Oberfläche von circa 540km^2. In Deutschland leben zur Zeit circa 80 Millionen Menschen.
Um wieviel stiege der Wasserspiegel des Bodensees, wenn alle 80 Millionen Menschen gleichzeitig im Wasser untertauchen.
Schätze zuerst und lasse Dich dann von Deiner Berechnung überraschen. (WJB)

Hinweis: Nimm der Einfachheit halber an, das Durchschnittsgewicht der Menschen in Deutschland sei 50kg. Da die Dichte des Menschen etwa der Dichte von Wasser entspricht, hat ein Mensch ungefähr ein Volumen von 50l.

Lösung:
80 Millionen Menschen je 50kg wiegen insgesamt $80 \cdot 10^6 \cdot 50\text{kg} = 4 \cdot 10^9\text{kg}$, verdrängen also $4 \cdot 10^9$ Liter Wasser. Dies entspricht einem Anstieg um $\frac{4 \cdot 10^9 \text{dm}^3}{540\text{km}^2} = \frac{4 \cdot 10^9}{540 \cdot 10^8}\text{dm} = \frac{4}{54}\text{dm} = 7{,}4\text{mm}$.

Symmetrisch ist optimal – Optimal ist symmetrisch

von Hans-Peter Heinz

In Natur und Technik findet man häufig, dass eine optimale Gestaltung besonders schön wirkt, weil sie ausgesprochen symmetrisch ist. In dieser Allgemeinheit ist das sicher nur eine Erfahrungstatsache und hat vielleicht nicht sehr viel mit Mathematik zu tun, aber in vielen speziellen Fällen hängt diese Tatsache mit ganz konkreten mathematischen Erkenntnissen zusammen, und das wollen wir hier an einem Beispiel näher beleuchten. Dazu versuchen wir, den Flächeninhalt einer geometrischen Figur in der Ebene möglichst groß zu machen, ohne den Umfang der Figur zu erhöhen. (Ohne die Bedingung über den Umfang wäre die Aufgabenstellung ja witzlos – man könnte einfach irgendeine Figur nehmen und durch Streckung ihren Flächeninhalt beliebig groß machen.) Man nennt das das „isoperimetrische Problem“, denn „isoperimetrisch“ heißt etwa „von gleichem Umfang“, und die Lösung ist seit langem bekannt, nämlich der Kreis, also gerade die Figur mit der

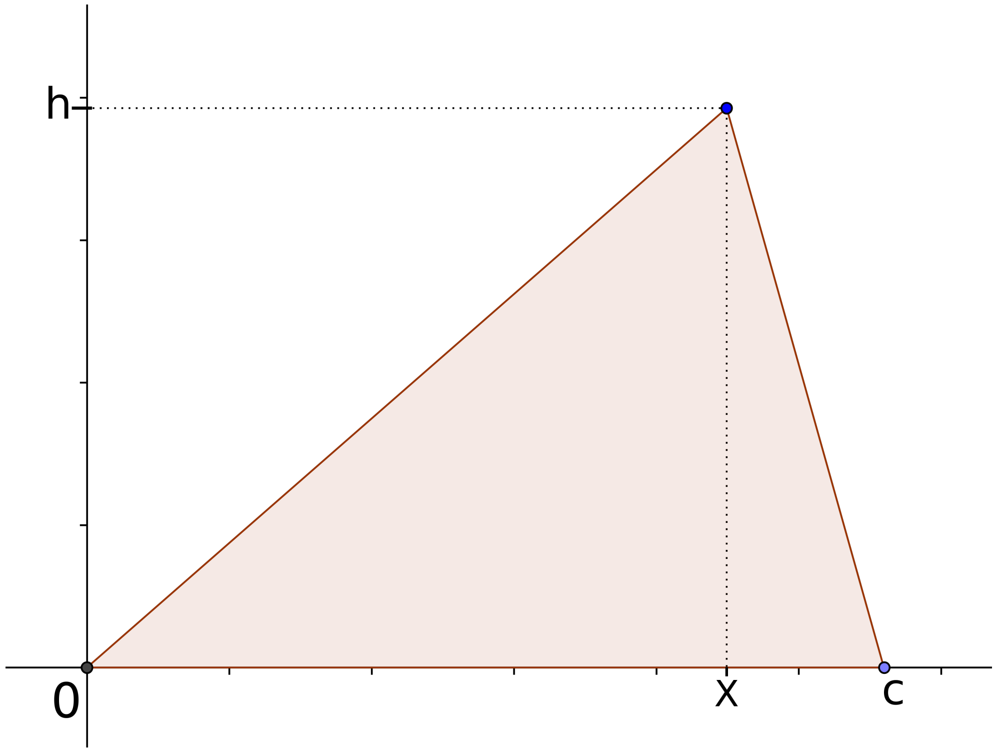


Abbildung 1: Dreieck mit Grundseite c in geschickt gewählter Position

maximalen Symmetrie. Leider kann ich das hier nicht beweisen, denn man braucht dafür eine Menge höherer Mathematik, konkret etwa den Stoff der ersten drei oder vier Semester eines gängigen deutschen Mathematikstudiums. Das leuchtet auch ein, wenn man bedenkt, dass man ja sehr viele ganz verschiedenartige Figuren in der Ebene zeichnen kann, und alle diese Figuren müssen irgendwie in Bezug auf Flächeninhalt und Umfang (d.h. Länge der Randkurve) miteinander verglichen werden. Wenn man aber nur bestimmte, möglichst einfache, Typen von Figuren miteinander vergleicht, wird das Problem viel zugänglicher, und man kommt mit etwas Differentialrechnung aus, wie man sie ab der 11. Klasse lernt.

Daher betrachten wir das isoperimetrische Problem hier nur unter Dreiecken. Das Dreieck mit der maximalen Symmetrie ist natürlich das gleichseitige, und wir werden in den nächsten drei Abschnitten beweisen, dass unter allen Dreiecken von einem gegebenen festen Umfang das gleichseitige tatsächlich den größten Flächeninhalt hat.

1 Gleichschenklige Dreiecke

In einem ersten Schritt schränken wir die Menge der zu vergleichenden Dreiecke noch weiter ein, indem wir die Grundseite des Dreiecks vorschreiben. Wir erwarten, dass das optimale Dreieck mit der Grundseite c und dem Umfang U dann das *gleichschenklige* ist, denn dieses hat die maximal erreichbare Symmetrie.

Weder Umfang noch Flächeninhalt ändern sich, wenn man ein Dreieck verschiebt, dreht oder umklappt (bzw. spiegelt, was auf dasselbe hinausläuft). Deshalb können wir unsere Dreiecke von vornherein so in der xy-Ebene positionieren, wie wir es am praktischsten finden (vgl. Abb. 1). Wir legen die Grundseite auf die x-Achse, etwa von $x = 0$ bis $x = c > 0$, und um nun ein bestimmtes Dreieck über dieser Grundseite mit dem Umfang U festzulegen, bezeichnen wir mit x die Abszisse seiner Spitze. Die Ordinate der Spitze ist dann gerade die Höhe $h > 0$, und die beiden Schenkel haben (nach Pythagoras!) die Längen

$$a = \sqrt{h^2 + (c-x)^2}\,, \qquad b = \sqrt{h^2 + x^2}\,,$$

und daher gilt die Gleichung

$$c + \sqrt{h^2 + (c-x)^2} + \sqrt{h^2 + x^2} = U\,. \tag{1}$$

Der Flächeninhalt hingegen ist einfach $F = \frac{1}{2}ch$. Nach der gewählten Positionierung ist die ganze Schar der zu vergleichenden Dreiecke also durch die möglichen Werte von x gegeben, und zu jedem x muss man die Höhe $h = h(x)$ so bestimmen, dass Gl. (1) gilt. Den Flächeninhalt möglichst groß zu machen, heißt also einfach, die Variable x so zu wählen, dass die entsprechende Höhe $h(x)$ maximal wird. Das sollte möglich sein, indem man für $y = h(x)$ Kurvendiskussion betreibt. Allerdings kennen wir diese Funktion nicht. Man müsste sie bestimmen, indem man Gl. (1) nach h auflöst, und das ist offenbar nicht ohne weiteres möglich.

Was nun? Unser ehrgeiziges Projekt scheint schon in diesem frühen Stadium zu scheitern. Aber so schnell geben wir natürlich nicht auf, sondern greifen zu einem Trick: Statt bei gegebenem Umfang die Fläche zu maximieren, könnten wir doch auch bei gegebener Fläche den Umfang minimieren. Da man ja sowohl Umfang als auch Fläche durch geeignete Streckungen immer anpassen kann, sollte das auf dasselbe hinauslaufen.[1] Wir betrachten also Dreiecke mit dem fest vorgegebenen Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}ch$, also mit der festen Höhe $h = 2F/c$, und wir versuchen, den Umfang $U = u(x)$ in Abhängigkeit von x zu minimieren. Diese Funktion ist explizit bekannt, gegeben nämlich durch die linke Seite von (1). Diese Funktion lässt sich mit Hilfe der Kettenregel ohne weiteres differenzieren, und man erhält

$$u'(x) = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{h^2 + (c-x)^2}}\,. \tag{2}$$

Um die Extremwerte von $y = u(x)$ zu bestimmen, müssen wir die Gleichung $u'(x) = 0$ lösen. Diese ist offenbar gleichbedeutend mit

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{h^2 + (c-x)^2}}\,,$$

[1] Ähnliches macht man in der Optimierungstheorie häufig, und man bezeichnet es als Dualisieren des Problems. Dabei vertauschen die Zielfunktion (bei uns der Flächeninhalt) und die Nebenbedingung (bei uns der fest vorgeschriebene Umfang) ihre Rollen, und Maximieren wird durch Minimieren ersetzt und umgekehrt.

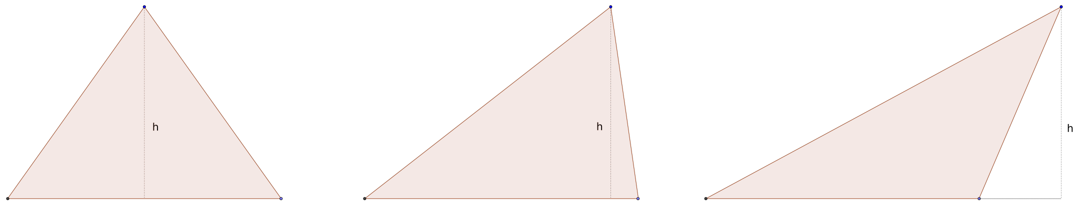


Abbildung 2: $u(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

und nach Multiplikation mit beiden Nennern und anschließendem Quadrieren ergibt das

$$x^2\Big(h^2 + (c-x)^2\Big) = (c-x)^2\Big(h^2 + x^2\Big) \ .$$

Nach Ausmultiplizieren der großen Klammern taucht rechts und links der Term $x^2(c-x)^2$ auf, so dass man diesen wegstreichen kann. Dann dividiert man noch durch h^2 und erhält schließlich:

$$x^2 = (c-x)^2 \ ,$$

d.h. $\pm x = c - x$. Aber $-x = c - x$ ist unmöglich, da $c > 0$ ist, und somit ist $x = c/2$ die einzig mögliche Extremstelle. Diese entspricht offenbar dem gleichschenkligen Dreieck mit den vorgeschriebenen Werten von Grundseite und Höhe. Allerdings können wir jetzt noch nicht völlig sicher sein, dass die Funktion $y = u(x)$ wirklich bei $x = c/2$ den kleinsten aller ihrer Werte annimmt. Das übliche Rezept der Kurvendiskussion empfiehlt uns, das Vorzeichen von $u''(c/2)$ zu bestimmen, aber erstens ist das rechnerisch aufwendig, und zweitens sagt dieses Vorzeichen nur etwas über den Verlauf der Funktion nahe bei $x = c/2$, aber nichts über den Gesamtverlauf. Deswegen lassen wir diese Rechnerei bleiben und beachten einfach, dass

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x) = +\infty \ ,$$

was nach der Definition von $u(x)$ durch die Gl. (1) klar ist (vgl. Abb. 2). Andererseits sind alle Werte von $u(x) > 0$. Deshalb (vgl. den Schluss von Abschn. 4) muss unsere Funktion irgendwo ihr absolutes Minimum (d.h. den kleinsten Wert von allen) annehmen, und hierfür kommt nur eine Extremstelle in Frage. Aber die Funktion hat nur eine einzige Extremstelle, nämlich $x = c/2$, also ist diese wirklich das gesuchte absolute Minimum.

2 Gleichseitige Dreiecke

Wir wissen jetzt: Unter allen Dreiecken mit der Grundseite c und dem Umfang U hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt. Beim Vergleich von Dreiecken mit *verschiedenen* Grundseiten können wir uns daher auf die gleichschenkligen

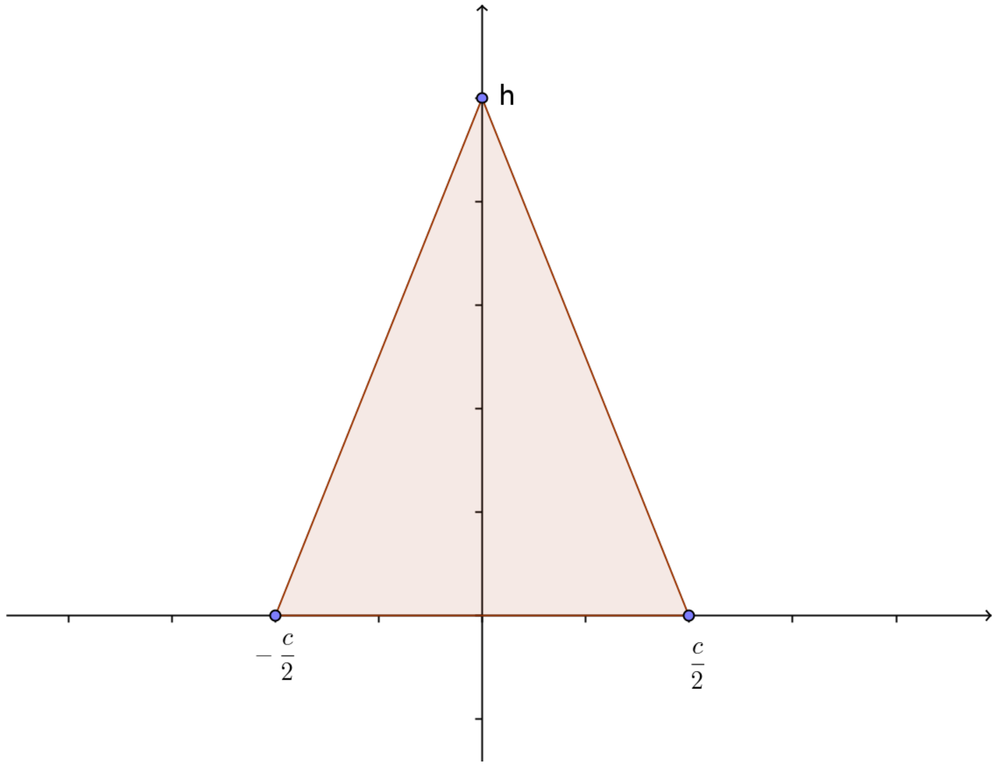


Abbildung 3: Gleichschenkliges Dreieck, symmetrisch zum Nullpunkt positioniert

beschränken. Der Bequemlichkeit halber positionieren wir diese jetzt symmetrisch zum Nullpunkt auf der x-Achse (vgl. Abb. 3), d.h. wir setzen $x = c/2$ und legen das gleichschenklige Dreieck vom Umfang U und der Grundseite $c = 2x$ so in die Ebene, dass die Grundlinie auf der x-Achse von $-c/2$ bis $+c/2$ reicht. (Die Wahl $x = c/2$ dient nur dazu, uns in den nächsten Formeln eine Menge Brüche zu ersparen.)
Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist dann

$$F(x) = xh(x) \, , \tag{3}$$

wobei $h(x)$ wieder die Höhe bezeichnet. Diese ist wieder durch Gl. (1) bestimmt, aber für unsere gleichschenkligen und neu positionierten Dreiecke nimmt (1) die einfachere Form

$$U = 2x + 2\sqrt{h(x)^2 + x^2}$$

an, aus der sich $h(x)$ nun bequem ausrechnen lässt: Wir schieben den Term $2x$ auf die linke Seite und quadrieren. Das ergibt

$$4h(x)^2 + 4x^2 = (U - 2x)^2 = U^2 - 4Ux + 4x^2 \, ,$$

also $h(x)^2 = U^2/4 - Ux$. Nach Einsetzen in (3) finden wir

$$F(x) = x\sqrt{\frac{U^2}{4} - Ux} \, .$$

Damit könnte man nun schon Kurvendiskussion machen, aber ich möchte noch einen kleinen Trick vorführen, der den Rechenaufwand deutlich vermindert: Statt

F betrachten wir $G(x) := F(x)^2 = x^2(U^2/4 - Ux)$. Es ist klar, dass die Funktion $G(x)$ ihren maximalen Wert an derselben Stelle erreicht wie $F(x)$, denn Quadrieren und Wurzelziehen lassen ja die Größenbeziehungen zwischen positiven Zahlen unverändert. Die Kurvendiskussion für $G(x)$ ist aber ganz leicht, denn

$$G(x) = \frac{U^2}{4}x^2 - Ux^3$$

ergibt

$$G'(x) = \frac{1}{2}U^2x - 3Ux^2 ,$$

und wir müssen die Zahlen x suchen, wo $G'(x) = 0$ ist. Dabei ist die offensichtliche Lösung $x = 0$ uninteressant, denn $F(0) = 0$, also wird für diesen x-Wert der maximale Flächeninhalt garantiert nicht erreicht. Ist aber $x \neq 0$, so können wir durch x dividieren und erhalten die Gleichung $\frac{1}{2}U^2 = 3Ux$, also $x = U/6$. Die Grundseite des entsprechenden Dreiecks ist dann $c = 2x = U/3$, und wenn wir die Länge der beiden gleich langen Schenkel mit b bezeichnen, haben wir

$$U = c + 2b = \frac{1}{3}U + 2b ,$$

also auch $b = \frac{1}{3}U$, und unser optimales Dreieck ist gleichseitig.
Auch diesmal müssen wir uns aber davon überzeugen, dass der gefundene Punkt $x = U/6$ wirklich den maximalen Wert (egal, ob für $F(x)$ oder $G(x)$) liefert. Dabei kommen nur x-Werte zwischen 0 und $U/4$ in Betracht, denn für unsere Dreiecke ist ja $x = c/2 \geq 0$, und andererseits ist

$$U = 2x + 2\sqrt{h^2 + x^2} \geq 2x + 2\sqrt{x^2} = 4x$$

und somit $x \leq U/4$. Aber $G(0) = G(U/4) = 0$, also muss $G(x)$ irgendwo zwischen 0 und $U/4$ maximal werden (vgl. wieder Abschnitt 4). Für diese Extremstelle kommt aber nur ein Punkt x mit $G'(x) = 0$ in Frage, und solch ein Punkt kommt nur ein einziges Mal vor, nämlich bei $x = U/6$, wie wir ausgerechnet haben. Daher nehmen $G(x)$ und der Flächeninhalt $F(x)$ tatsächlich an dieser Stelle ihr absolutes Maximum an.

3 Ganz rigoros

Wer es ganz genau nimmt, wird bei den Überlegungen der letzten beiden Abschnitte vielleicht einwenden, an manchen Stellen sei eher Überredungskunst ins Feld geführt worden als strenge mathematische Logik. Um diesem Einwand zu begegnen – und auch, um vorzuführen, wie so etwas geht – rollen wir die Argumentation jetzt noch einmal in etwas formalerer Sprache auf:
Für Dreiecke $\triangle$ bezeichnen wir mit $u(\triangle)$ den Umfang, mit $F(\triangle)$ den Flächeninhalt. Wir betrachten eine feste positive Zahl U und wählen ein gleichseitiges

Dreieck $\triangle_{symm}$ mit $u(\triangle_{symm}) = U$, also eines mit der Seitenlänge $U/3$. Da alle gleichseitigen Dreiecke mit dieser Seitenlänge kongruent sind, haben sie alle denselben Flächeninhalt, also spielt es keine Rolle, welches unser $\triangle_{symm}$ ist. Die folgende Aussage ist nun zu beweisen:

Für jedes Dreieck $\triangle$ mit dem Umfang $u(\triangle) = U$ gilt

$$F(\triangle) \leq F(\triangle_{symm}) . \tag{4}$$

Wir müssen also ein beliebiges Dreieck $\triangle$ vom Umfang U betrachten. Zunächst wählen wir eine Seite von $\triangle$ und nennen ihre Länge c. Durch Verschieben und Drehen machen wir aus $\triangle$ ein neues Dreieck $\triangle_1$, das so positioniert ist wie in Abschnitt beschrieben, und zwar mit der gewählten Seite als Grundseite. Dann ist

$$u(\triangle_1) = U \qquad \text{und} \qquad F(\triangle_1) = F(\triangle) .$$

Sei $\triangle_2$ das gleichschenklige Dreieck mit derselben Grundseite und demselben Flächeninhalt wie $\triangle_1$. Nach dem Ergebnis von Abschn. 1 hat dieses den minimalen Umfang, und daher ist

$$u(\triangle_2) \leq u(\triangle_1) = U . \tag{5}$$

Wenn man ein Dreieck (etwa vom Ursprung aus) um den Faktor $t > 0$ streckt, so multipliziert sich sein Umfang mit t, sein Flächeninhalt mit t^2, wie man aus der Geometrie weiß. Durch solch eine Streckung verwandeln wir $\triangle_2$ in ein neues Dreieck $\triangle_3$, das wieder den Umfang U haben soll. Dazu brauchen wir den Streckfaktor $t = U/u(\triangle_2)$, und der ist ≥ 1 wegen der Beziehung (5). Dann ist aber auch $t^2 \geq 1$ und folglich

$$F(\triangle_3) = t^2 F(\triangle_2) \geq F(\triangle_2) = F(\triangle) .$$

Natürlich ist $\triangle_3$ wieder gleichschenklig, denn es ist ja durch Streckung aus dem gleichschenkligen Dreieck $\triangle_2$ hervorgegangen. Das Resultat von Abschn. 2 sagt uns daher, dass $F(\triangle_{symm}) \geq F(\triangle_3)$, und insgesamt folgt die behauptete Beziehung (4).

4 Wird der optimale Wert wirklich immer erreicht?

Am Ende von Abschnitt 2 wurde argumentiert, dass die dort betrachtete Funktion $G(x)$ doch irgendwo zwischen $x = 0$ und $x = U/4$ ihr Maximum annehmen müsse. Das ist anschaulich ausgesprochen plausibel, und es stimmt auch. Aber grundsätzlich gesehen, ist es nicht selbstverständlich, und wenn die Situation ein wenig anders liegt als hier, kann solch ein Argument auch schiefgehen. Wir wollen das an einigen Beispielen demonstrieren. Dabei soll es uns nicht darauf ankommen, ob wir ein Maximum oder ein Minimum betrachten, denn ein Maximum für $f(x)$ entspricht ja einem Minimum für $-f(x)$ und umgekehrt.

Beispiel 1: Die Funktion $f(x) := 1/x$ nimmt auf dem Definitionsbereich $x > 0$ beliebig kleine positive Werte und keinen einzigen negativen Wert an, also müßte ihr minimaler Wert die Null sein. Diesen Wert nimmt sie aber nicht an. Manche werden natürlich sagen, der Wert 0 würde bei $x = +\infty$ angenommen, aber $+\infty$ ist keine reelle Zahl, sondern ein künstlich hinzugefügtes Symbol, und auch die Setzung $1/\infty = 0$ ist nicht zwingend, sondern nur irgendwie einleuchtend. Genau genommen, hat man durch das Hinzufügen der Stelle $x = +\infty$ und dem Funktionswert $f(\infty) = 0$ eine neue Funktion erzeugt, und diese ist zwar für manche Zwecke durchaus nützlich, ändert aber nichts an der Tatsache, dass unsere gegebene Funktion ihren optimalen Wert eben nicht annimmt.

Man sollte also auf jeden Fall nur Definitionsbereiche betrachten, auf denen x weder beliebig groß noch beliebig klein werden kann, also Definitionsbereiche der Form $a \leq x \leq b$ mit gegebenen reellen Zahlen $a < b$. Die Randpunkte a, b können dabei gerade die Stellen sein, wo Extremalwerte angenommen werden, wie schon bei $f(x) = x$, also darf man sie auf keinen Fall aus dem Definitionsbereich weglassen. Es ist aber auch wichtig, dass dazwischen nichts weggelassen wird, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2: Für $-2 \leq x \leq 2$ betrachten wir die Funktion

$$f(x) := (x^2 - 2)^2 \, .$$

Ihr minimaler Wert ist offensichtlich $y = 0$, und er wird auch angenommen, und zwar genau für $x = \pm\sqrt{2}$ (Abb. 4).
Nun könnte man doch auf die Idee kommen, in einer „realistischen“ Mathematik dürften für x nur Bruchzahlen (oder sogar nur abbrechende Dezimalbrüche) zugelassen werden, denn nur diese kann man wirklich aufschreiben, abspeichern, messen oder mit einem Computer berechnen. Alle physikalischen oder technischen Messgrößen, alle Kontostände, Aktienkurse oder Posten in einer Buchführung, alle absoluten oder relativen Häufigkeiten aus irgendwelchen Statistiken und alles andere, was an Zahlenmaterial je konkret in der Praxis vorkommt, ist von diesem Typ. Folgen wir aber diesem Gedankengang und lassen für die Argumente x wirklich nur rationale Zahlen zu, so nimmt die so eingeschränkte Funktion $(x^2 - 2)^2$ ihren minimalen Wert nicht an, denn $\sqrt{2}$ ist ja bekanntlich irrational.

Der Definitionsbereich darf also auch keine „Lücken“ haben, sondern muss alle Grenzwerte enthalten, die sich mit Folgen aus dem Definitionsbereich bilden lassen, wie etwa bei einer Strecke auf der Zahlengeraden. Aber auch dann kann noch etwas schiefgehen:

Beispiel 3: Auf dem durch $-1 \leq x \leq 1$ gegebenen Bereich definieren wir eine

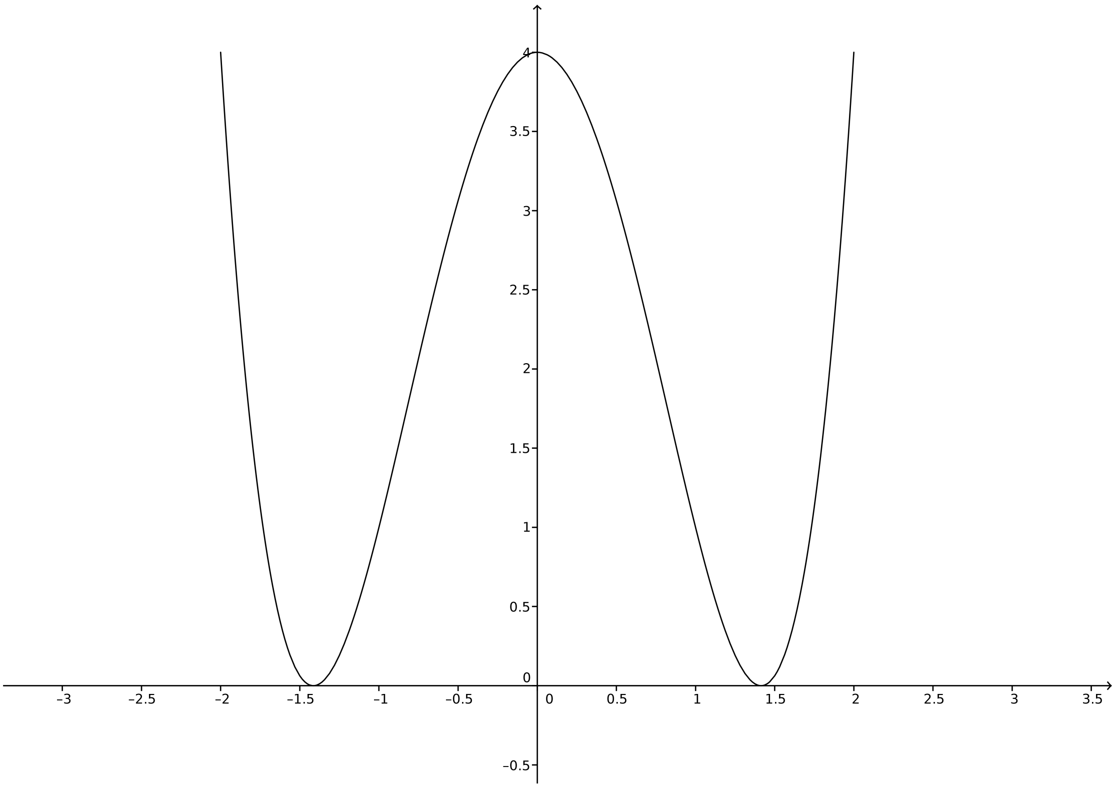


Abbildung 4: Kurvenverlauf von $y = (x^2 - 2)^2$ für $-2 \le x \le 2$

Funktion durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2\,, & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 1\,, & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Der Wertebereich dieser Funktion besteht offenbar aus den Zahlen y mit $0 < y \le 1$, und der minimale Wert müsste also $y = 0$ sein. Dieser wird aber nicht angenommen, weil wir die Funktion gerade dort, wo er angenommen werden müsste, hinterhältigerweise abgeändert haben: $f(0) = 1$, nicht $= 0$ (Abb. 5).

Die mathematischen Eigenschaften einer Funktion werden aber sicher nicht davon beeinflusst werden, ob ihre Definition hinterhältig oder moralisch einwandfrei ist. Was also befähigt diese Funktion, ihrem Minimalwert auszuweichen? Es kann auch nicht daran liegen, dass wir zur Definition zwei Fälle unterschieden haben, denn z.B. die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,, & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

verhält sich ganz normal und nimmt insbesondere ihren Minimalwert $y = 0$ in $x = 0$ an.

Die Antwort liegt darin, dass die Funktion $f(x)$ an der entscheidenden Stelle einen „Sprung“ macht, d.h. ihr Funktionswert $f(0) = 1$ stimmt nicht mit den

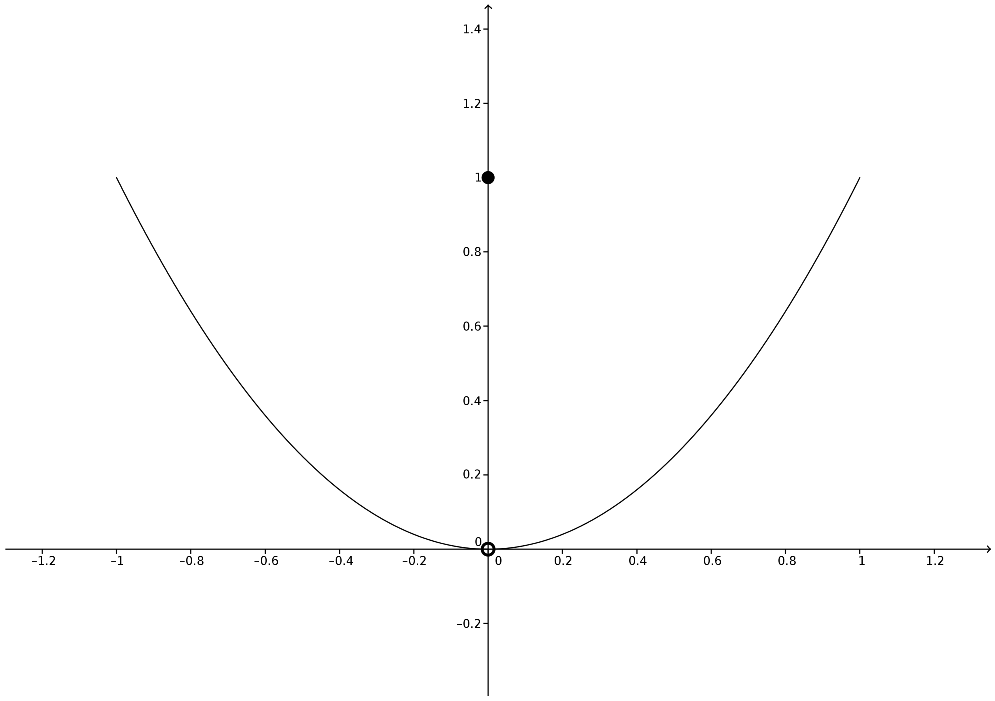


Abbildung 5: Normalparabel mit Abänderung bei $x = 0$

Grenzwerten

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$$

überein. Funktionen, deren Werte überall mit den entsprechenden Grenzwerten übereinstimmen, nennt man *stetig*, und diese nehmen tatsächlich auf Definitionsbereichen, die die gerade beschriebenen Bedingungen erfüllen, immer ihr Maximum und ihr Minimum an. Genaue Formulierungen oder gar Beweise würden hier zu weit führen, aber wer Mathematik studiert, lernt die entsprechenden Details schon im ersten Semester.
Allerdings ist das eigentliche isoperimetrische Problem, wie es in der Einleitung beschrieben wurde, noch wesentlich tückischer, denn zur Beschreibung aller möglichen Figuren, die da zu vergleichen sind, reicht eine Variable x nicht aus, und es reichen auch zwei, drei oder ein paar tausend Variable nicht aus. Vielmehr braucht man unendlich viele. Aber keine Angst – das lässt sich beim heutigen Stand der Mathematik alles beherrschen.

Die Definitionsbereiche, die wir für Funktionen einer reellen Variablen x als unbedenklich erkannt haben, sorgen also dafür, dass x nicht nach $\pm\infty$ weglaufen kann und dass alle Grenzwerte, die man innerhalb des Definitionsbereichs bilden kann, auch dazugehören. Aber die Funktion

$$u(x) := c + \sqrt{h^2 + (c - x)^2} + \sqrt{h^2 + x^2}\ ,$$

die wir im Abschnitt betrachtet haben, ist auf der gesamten Zahlengeraden definiert, so dass x durchaus ins Unendliche weglaufen kann. Hier hilft uns jedoch die schon erwähnte Beziehung

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x) = +\infty \;.$$

Sie sagt uns insbesondere, dass für eine genügend große Zahl $M > 0$ der Wert $u(x) > u(c/2) + 1$ ist, sobald $x > M$ oder $x < -M$ ist. Aber auf dem Definitionsbereich $-M \leq x \leq M$ muss $u(x)$ wirklich sein Minimum annehmen, und das muss bei $x = c/2$ passieren, weil dieser Punkt der einzige mit verschwindender Ableitung ist. Aber außerhalb dieses Definitionsbereichs sind die Funktionswerte ja sowieso schon $> u(c/2) + 1 > u(c/2)$ (so haben wir M ja gewählt!), also wird bei $x = c/2$ wirklich das absolute Minimum der Funktion angenommen.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Ian Stewart: „Die letzten Rätsel der Mathematik"

Wieder einmal hat Ian Stewart einen neuen populärwissenschaftlichen Band mit spannenden mathematischen Inhalten vorgelegt (siehe die Rezensionen in Monoid 100 und 115). Dieses Mal hat sich der Professor für Mathematik an der Universität im englischen Warwick berühmte mathematische Probleme vorgenommen, deren Lösung – sofern sie bereits gelöst wurden – sich zum Teil über Jahrhunderte hingestreckt hat. Nach einem Einführungskapitel, in dem anknüpfend an der Fermatschen Vermutung analysiert wird, was ein mathematisches Problem ausmacht und warum und wie sich Mathematiker solchen Problemen nähern folgen dann 14 Kapitel, deren Überschriften sich wie das who-is-who der mathematischen Fragestellungen lesen: von der Goldbach-Hypothese, der als feststehendem Ausdruck oft in Zeitungsüberschriften zu lesenden Quadratur des Kreises über das Drei-Körper-Problem, die Riemannschen Vermutung und das P/NP-Problem bis hin zur Hodge-Vermutung reicht dabei der Bogen.

Die einzelnen Kapitel sind dabei unabhängig voneinander zu lesen, was auch empfehlenswert ist. hat man sich gedanklich voll und ganz auf eines der beschriebenen großen Probleme eingelassen, dann hat man kaum mehr Kapazität sich direkt dem nächsten zu widmen. Auch die benötigten mathematischen Vorkenntnisse differieren bei den unterschiedlichen Kapiteln, so dass es insbesondere für jüngere Leser auch sinnvoll sein kann einzelne zunächst zu überblättern und in ein oder zwei Jahren darauf zurück zu kommen.

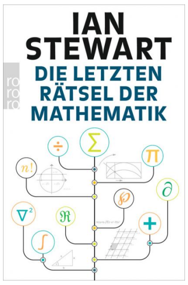
Abgerundet wird das Buch durch zwei Kapitel mit einem Ausblick für die Zukunft in dem zwölf weitere leicht verständliche aber ungelöste Probleme aufgeführt werden, ein Glossar wichtiger Begriffe, Anmerkungen und ein Namensverzeichnis.

Stewarts aktuelles Buch weist im Wesentlichen nur zwei Schönheitsfehler auf:

Zum ersten ist es leider nur als Taschenbuch verfügbar, wodurch es aber preislich erschwinglicher ist. Zum zweiten stellt die Übersetzung des Titels aus Sicht des Rezensenten einen Fauxpas dar, wird doch mit „Die letzten Rätsel der Mathematik“ implizit suggeriert, dass – sobald diese gelöst sind – nichts mehr kommt. Dass es zwar um berühmte mathematische Probleme geht, aber, dass auch nach deren Lösung die Mathematik noch lange nicht abgeschlossen ist kommt im englischen Orginaltitel „The Great Mathematical Problems“ deutlich besser zur Geltung.

Fazit: Auch wenn es nicht wirklich die *letzten* Rätsel der Mathematik sind, so gehört es doch zu einer guten mathematischen Allgemeinbildung wenigstens grob zu wissen, worum es bei den von Stewart vorgestellten mathematischen Problemen geht.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:
Stewart, Ian: Die letzten Rätsel der Mathematik, rororo 2015, ISBN 978-3-499-61694-5, Taschenbuch 521 Seiten, 10,99 €

Art des Buches:	Diverses aus und über Mathematik
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 15 Jahren

Mitteilungen

- Wegen eines krankheitsbedingten Ausfalls in unserem Sekretariat kann es beim letzten Heft zu Lieferschwierigkeiten gekommen sein. Wir bitten, dies zu entschuldigen. Solltet Ihr Heft 124 oder andere Hefte im Rahmen einer Nachbestellung nicht erhalten haben, schreibt uns bitte eine kurze Mail, wir werden dann versuchen, das Problem schnellstmöglich zu lösen und ggf. fehlende Hefte nachzusenden.
- Die nächste Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) findet vom 5. bis 9. Oktober 2016 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  `www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie.`

Bundeswettbewerb Mathematik 2016

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Gegeben ist die mit 2016 Nullen geschriebene Zahl $101010\dots0101$, in der sich die Ziffern 1 und 0 abwechseln. Beweise, dass diese Zahl keine Primzahl ist.

Vorbemerkung: Wir bezeichnen für jede natürliche Zahl n, $n \geq 1$, mit Z_n die mit n Nullen geschriebene Zahl $101010\dots0101$, in der sich die Ziffern 1 und 0 abwechseln. Wir beweisen, dass für jede Zahl $n \geq 2$ keine der Zahlen Z_n prim ist. Für $n = 2016$ beweist dies die Aufgabe. Die Zahl $Z_1 = 101$ ist hingegen eine Primzahl.

1. Lösung: Wir weisen zunächst für gerade $n = 2k$, $k \geq 1$, induktiv nach, dass Z_n sich als Produkt zweier natürlicher Zahlen, beide größer als 1, schreiben lässt, nämlich

$$Z_n = Z_{2k} = \left(\underbrace{9090\dots90}_{k\text{-mal Ziffern } 90} + 1\right) \cdot \underbrace{1111\dots11}_{(2k+1)\text{-mal Ziffer } 1}. \tag{1.1}$$

Als Induktionsverankerung ($k = 1$) rechnen wir nach, dass $Z_2 = 10101 = 91 \cdot 111$. Für den Induktionsschluss ($k \to k+1$) nutzen wir, dass $Z_{2(k+1)} = Z_{2k} \cdot 10000 + 101$. Mit der Zerlegung für Z_{2k} wie in (1.1) (Induktionsvoraussetzung) folgt hieraus

$$\begin{aligned}
Z_{2(k+1)} &= \left(100 \cdot \underbrace{9090\dots90}_{k\text{-mal Ziffern } 90} + 90 + 10\right) \cdot 100 \cdot \underbrace{1111\dots11}_{(2k+1)\text{-mal Ziffer } 1} + 101 \\
&= \left(\underbrace{9090\dots9090}_{(k+1)\text{-mal Ziffern } 90} + 1 + 9\right) \cdot \left(\underbrace{1111\dots11}_{(2k+3)\text{-mal Ziffer } 1} - 11\right) + 101 \\
&= \left(\underbrace{9090\dots9090}_{(k+1)\text{-mal Ziffern } 90} + 1\right) \cdot \underbrace{1111\dots11}_{(2k+3)\text{-mal Ziffer } 1} + R_{k+1}
\end{aligned}$$

mit R_{k+1} als zusammenfassende Abkürzung aller restlichen Terme, also

$$R_{k+1} = \underbrace{9999\dots9999}_{(2k+3)\text{-mal Ziffern } 9} - 11 \cdot \left(\underbrace{9090\dots9090}_{(k+1)\text{-mal Ziffern } 90} + 1\right) - 99 + 101.$$

Der Termin R_{k+1} verschwindet, das heißt $R_{k+1} = 0$, denn

$$11 \cdot \Bigg(\underbrace{9090 \ldots 9090}_{(k+1)\text{-mal Ziffern } 90} + 1 \Bigg) = 10 \cdot \underbrace{9999 \ldots 9999}_{(2k+2)\text{-mal Ziffern } 9} + 11 = \underbrace{9999 \ldots 9999}_{(2k+3)\text{-mal Ziffern } 9} + 2$$

und damit $R_{k+1} = -2 - 99 + 101 = 0$.

Die Zerlegung für ungerade $n = 2k+1$, $k \geq 1$, folgt sofort aus $Z_1 = 101$ und der Rekursion $Z_{2k+1} = Z_{2k-1} \cdot 10000 + 101$; alle Z_{2k+1}, $k \geq 1$, sind demnach durch 101 teilbar, und die Rekursion lässt sich zu

$$Z_{2k+1} = 101 \cdot \sum_{j=0}^{k} 10^{4j}$$

ausschreiben. □

2. Lösung:

Die Zahl der Aufgabenstellung hat insgesamt 4033 Ziffern, nämlich 2016 Nullen und 2017 Einsen. Multiplizieren wir die Zahl der Aufgabenstellung mit 11, so erhalten wir eine Zahl, die aus der geraden Anzahl 4034 von Einsen besteht und die sich leicht in das Produkt zweier natürlicher Zahlen zerlegen lässt, genauer:

$$\underbrace{101010 \ldots 0101}_{4033 \text{ Ziffern}} = \underbrace{111111 \ldots 1111}_{4034 \text{ Ziffern}} \cdot \frac{1}{11} = \underbrace{1111 \ldots 111}_{2017 \text{ Ziffern}} \cdot \frac{10^{2017}+1}{11}. \tag{1.2}$$

Der Bruch auf der rechten Seite von (1.2) ist selbst eine natürliche Zahl wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} \cdot \left(10^{2017} + 1\right) &= \frac{1}{11} \cdot \Bigg(\underbrace{9999 \ldots 99}_{2016\text{-mal Ziffer } 9} \cdot 10 + 11 \Bigg) \\ &= \underbrace{0909 \ldots 90}_{1008\text{-mal Ziffern } 09} \cdot 10 + 1 = \underbrace{9090 \ldots 90}_{1008\text{-mal Ziffern } 90} + 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Kombinieren wir (1.2) und (1.3), so haben wir die Zahl der Aufgabenstellung als Produkt zweier natürlicher Zahlen größer 1 dargestellt. □

3. Lösung:

Es sei $n \geq 2$ beliebig, im Folgenden aber fest. Die Zahl Z_n enthält $(n+1)$-mal die Ziffer 1. Multiplizieren wir Z_n mit 99, so ergibt sich als Produkt eine Zahl, die $2(n+1)$-mal die Ziffer 9 und keine andere Ziffer enthält, das heißt unter Verwendung der dritten binomischen Formel

$$99 \cdot Z_n = \underbrace{9999999 \ldots 9999}_{2(n+1)\text{-mal Ziffer } 9} = 10^{2(n+1)} - 1 = \left(10^{n+1} + 1\right) \cdot \left(10^{n+1} - 1\right). \tag{1.4}$$

Wir teilen beide Seiten dieser Gleichung durch 99, um Z_n als Produkt zweier natürlicher Zahlen (beide ungleich 1!) darzustellen. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Ist n gerade, also $n = 2k$, $k \geq 1$, so entspricht der Term $10^{n+1} - 1$ der Zahl mit der ungeraden Anzahl $n + 1 = 2k + 1$ von Ziffern 9, ist demnach durch 9 teilbar mit Ergebnis $1111\ldots11$, das heißt $(2k+1)$-mal Ziffern 1. Für den Term $10^{n+1} + 1 = 10^{2k+1} + 1$ auf der rechten Seite von (1.4) gilt:

$$10^{2k+1} + 1 - 11 + 11 = 10 \cdot \left(10^{2k} - 1\right) + 11 = 10 \cdot \underbrace{9999\ldots99}_{2k\text{-mal Ziffer } 9} + 11$$
$$= 11 \cdot \left(\underbrace{9090\ldots90}_{k\text{-mal Ziffern } 90} + 1 \right),$$

der Term $10^{n+1} + 1$ ist also durch 11 teilbar. Es ist damit in diesem Fall

$$Z_n = Z_{2k} = \left(\underbrace{9090\ldots90}_{k\text{-mal Ziffern } 90} + 1 \right) \cdot \underbrace{1111\ldots11}_{(2k+1)\text{-mal Ziffer } 1}. \tag{1.5}$$

2. Fall: Ist n ungerade, also $n = 2k + 1$, $k \geq 1$, so besteht $10^{n+1} - 1$ aus der geraden Anzahl $n+1 = 2(k+1)$ der Ziffer 9, ist also durch 99 teilbar mit Ergebnis Z_k; es ist in diesem Fall

$$Z_n = Z_{2k+1} = 1\underbrace{00000\ldots00}_{(2k+1)\text{-mal}}1 \cdot Z_k. \tag{1.6}$$

Das ist auch direkt einsichtig, weil sich Z_{2k+1} als Aneinanderfügung von Z_k, einer mittleren Ziffer 0 und wiederum Z_k auffassen lässt. Die Faktoren auf der rechten Seite von (1.5) beziehungsweise (1.6) sind in allen Fällen natürliche Zahlen ungleich 1.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Flächeninhalt 1. Anja und Bernd spielen das folgende Spiel: Anja wählt einen Punkt X auf der Seite BC, dann wählt Bernd einen Punkt Y auf der Seite CA und schließlich Anja einen Punkt Z auf der Seite AB; dabei dürfen X, Y und Z keine Eckpunkte des Dreiecks $\triangle ABC$ sein. Anja versucht hierbei, den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ möglichst groß zu machen, Bernd dagegen möchte diesen Flächeninhalt möglichst klein halten.

Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck $\triangle XYZ$ am Ende des Spiels, wenn beide optimal spielen?

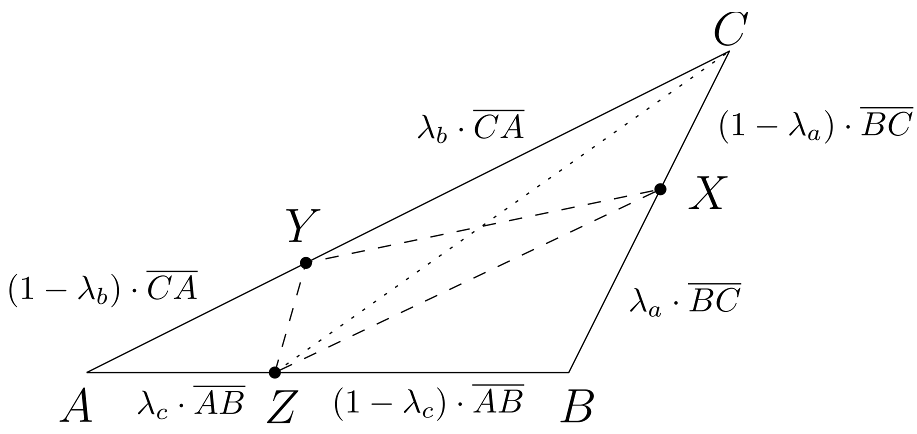
Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung: Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist $\frac{1}{4}$, wenn Anja und Bernd optimal spielen.

1. Beweis: Wir führen für Punkte X, Y und Z wie in der Aufgabenstellung die Bezeichnungen λ_a, λ_b, λ_c über

$$\overline{BX} =: \lambda_a \cdot \overline{BC}, \overline{CY} =: \lambda_b \cdot \overline{CA}, \overline{AZ} =: \lambda_c \cdot \overline{AB} \tag{2.1}$$

ein; siehe auch nachfolgende Skizze. Nach Aufgabenstellung sind die Parameter λ_a, λ_b, λ_c alle positiv und echt kleiner als 1. Den Flächeninhalt eines Dreiecks $\triangle UVW$ mit Eckpunkten U, V, W kürzen wir mit $|\triangle UVW|$ ab.



Skizze 2.1

Wir bestimmen zunächst $|\triangle XYZ|$ in Abhängigkeit der im Laufe des Spiels festgelegten Parameter λ_a, λ_b, λ_c. Es ist $|\triangle AZC| = \lambda_c \cdot |\triangle ABC| = \lambda_c$, weil die Dreiecke $\triangle AZC$ und $\triangle ABC$ dieselbe Höhe (durch den Punkt C) haben und ihre Grundflächen AZ und AB nach (2.1) im Verhältnis λ_c stehen. Durch den Vergleich der Dreieck $\triangle YAZ$ und $\triangle CAZ$ schließen wir analog

$$|\triangle YAZ| = (1-\lambda_b) \cdot |\triangle CAZ| = (1-\lambda_b) \cdot |\triangle AZC| = (1-\lambda_b)\lambda_c, \tag{2.2}$$

und ebenso lässt sich argumentieren, dass

$$|\triangle ZBX| = \lambda_a(1-\lambda_c), \tag{2.3}$$

$$|\triangle XCY| = (1-\lambda_a)\lambda_b. \tag{2.4}$$

Mit (2.2) bis (2.4) folgt

$$\begin{aligned} |\triangle XYZ| &= |\triangle ABC| - |\triangle YAZ| - |\triangle ZBX| - |\triangle XCY| \\ &= 1 - \lambda_a - \lambda_b - \lambda_c + \lambda_a\lambda_b + \lambda_a\lambda_c + \lambda_b\lambda_c \\ &= (1-\lambda_a)(1-\lambda_b)(1-\lambda_c) + \lambda_a\lambda_b\lambda_c \\ &= \lambda_a(1-\lambda_a) + (1-\lambda_a-\lambda_b)(1-\lambda_a-\lambda_c). \end{aligned} \tag{2.5}$$

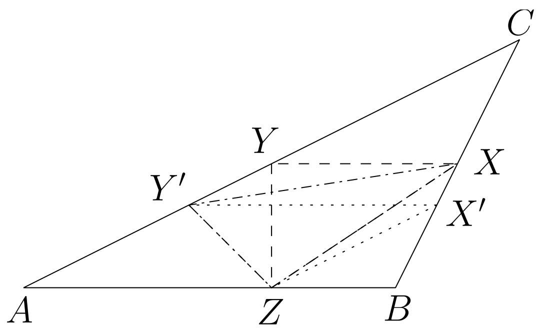
Wir betrachten jetzt den Zeitpunkt im Spiel, wenn Anja einen Punkt X und damit den Parameter λ_a gewählt hat. Nun ist Bernd an der Reihe. Er schließt aus (2.5) für den Flächeninhalt des Dreieck $\triangle XYZ$:

- Wählt er einen Punkt Y mit $\lambda_b \neq 1-\lambda_a$, also $1-\lambda_a-\lambda_b \neq 0$, so kann Anja mit ihrer anschließenden Wahl beispielsweise des Punktes Z mit dem Parameter $\lambda_c = \lambda_b$ erreichen, dass $|\triangle XYZ| = \lambda_a(1-\lambda_a)+(1-\lambda_a-\lambda_b)^2 > \lambda_a(1-\lambda_a)$.

- Wählt er den Punkt Y mit $\lambda_b = 1 - \lambda_a$, also $1 - \lambda_a - \lambda_b = 0$, dann ist $|\triangle XYZ| = \lambda_a(1 - \lambda_a)$, unabhängig von Anjas anschließender Wahl eines Punktes Z! Das ist also der optimale Spielzug von Bernd, um $|\triangle XYZ|$ möglichst klein zu halten.

Wir haben eben gezeigt, dass für Anjas optimale Spielstrategie nur ihre erste Wahl des Punktes X entscheidend ist. Wie sollte sie ihn wählen?
Weil der quadratische Term $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = -\lambda(1 - \lambda) + \frac{1}{4}$ für $\lambda \neq \frac{1}{2}$ stets positiv ist, in diesen Fällen also $\lambda(1 - \lambda) < \frac{1}{4}$ gilt, spielt Anja optimal, wenn sie $\lambda_a = \frac{1}{2}$ wählt: Dann wird nach dem folgenden optimalen Spielzug von Bernd und einem abschließenden Spielzug von Anja $|\triangle XYZ| = \frac{1}{4}$ sein. □

Beispiel: Spielen Anja und Bernd optimal, so ist $|\triangle XYZ| = \frac{1}{4}$, wobei in der nebenstehenden Skizze $\lambda_c = \frac{2}{3}$ angenommen wurde. Spielt Bernd mit der Wahl von $\lambda_b = \frac{2}{3}$ nicht optimal, so kann Anja $|\triangle XY'Z| = \frac{10}{36} > \frac{1}{4}$ erreichen. Spielt Anja mit der Wahl von $\lambda_a = \frac{1}{3}$ nicht optimal, so kann Bernd $|\triangle X'Y'Z| = \frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ erreichen.



Skizze 2.2

2. Beweis: Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: *In einem Dreieck $\triangle UVW$ seien Punkte R auf VW und S auf WU gewählt.*

a) RS ist parallel zu UV genau dann, wenn $\overline{RW} : \overline{VW} = \overline{WS} : \overline{WU}$.

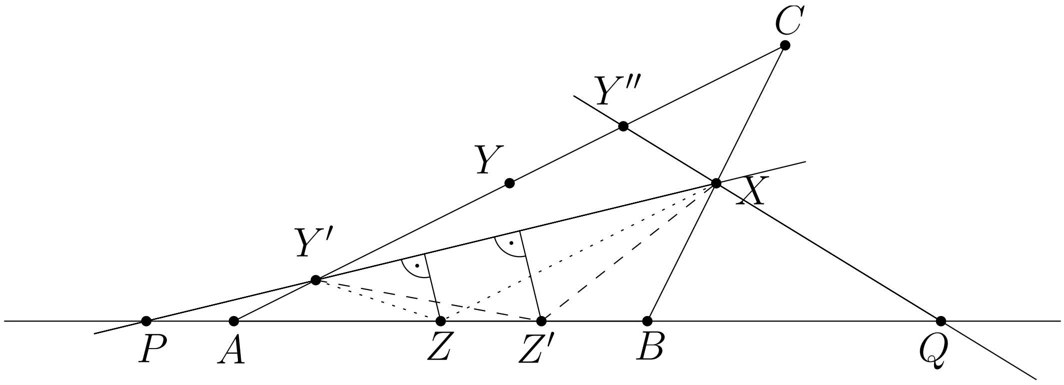
b) Ist RS parallel zu UV, so ist $|\triangle RST| = \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot |\triangle UVW|$ für jede Wahl eines Punktes T auf UV, wobei $\lambda := \overline{RW} : \overline{VW}$.

Teil a) ist gerade der erste Strahlensatz (mit Scheitel W) und seine Umkehrung. Nach dem zweiten Strahlensatz ist $\overline{RS} = \lambda \cdot \overline{UV}$, und nach dem ersten Strahlensatz lässt sich der Abstand von RS zu UV als $(1 - \lambda) \cdot h_W$ beschreiben, wobei h_W die Höhe durch W auf UV abkürzt. Hieraus folgt die Formel für $|\triangle RST|$ in Teil b). ◇

Wegen $\lambda \cdot (1 - \lambda) = \frac{1}{4} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$ und $|\triangle ABC| = 1$ folgt: Wählt Anja den Punkt X als den Mittelpunkt der Seite BC und Bernd den Punkt Y als den Mittelpunkt der Seite CA, so ist $|\triangle XYZ| = \frac{1}{4}$ für jede Wahl des Punktes Z auf AB (folgt aus $A = U$, $B = V$, $C = W$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ im Hilfssatz). Wählt Anja einen Punkt X' ungleich dem Mittelpunkt der Seite BC, so kann Bernd durch die Wahl des Punktes Y' auf CA, für den $X'Y'$ parallel zu AB ist, erreichen, dass $|\triangle X'Y'Z| < \frac{1}{4}$ für jede Wahl des Punktes Z auf AB (folgt aus $A = U$, $B = V$, $C = W$ und $\lambda \neq \frac{1}{2}$ im Hilfssatz).

Anja wird in ihrer optimalen Spielstrategie also stets den Punkt X als den Mittelpunkt von BC wählen. Auch Bernds Wahl des Punktes Y als Mittelpunkt von CA

ist optimal, um $|\triangle XYZ|$ möglichst klein zu halten. Denn wählt Bernd einen Punkt ungleich dem Mittelpunkt Y von CA, so kann Anja mit dem abschließenden Spielzug einen Flächeninhalt erzwingen, der größer als $\frac{1}{4}$ ist. Zum Beweis unterscheiden wir zwei Fälle (siehe Skizze 2.3):



Skizze 2.3

Liegt der von Bernd gewählte Punkt Y' im Inneren von YA, dann schneidet die Gerade $Y'X$ die Gerade AB so in einem Punkte $P \neq A$, dass die Punkte P, A, B auf der Geraden AB in dieser Reihenfolge liegen. Für das Dreieck $\triangle XY'Z$, wobei Z den Mittelpunkt der Seite AB bezeichne, folgt aus dem Hilfssatz (mit $C = U$, $A = V$, $B = W$ und $\lambda = \frac{1}{2}$), dass $|\triangle XY'Z| = \frac{1}{4}$ ist. Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt Z' im Inneren von ZB. Nach dem zweiten Strahlensatz (mit Scheitel P) ist die Senkrechte durch Z' auf XY' größer als die parallele Senkrechte durch Z auf XY', weil $\overline{PZ'} : \overline{PZ} > 1$. Mit der Wahl des Punktes Z' kann Anja also $|\triangle XY'Z'| > |\triangle XY'Z| = \frac{1}{4}$ erreichen. Analog lässt sich argumentieren: Liegt der von Bernd gewählte Punkt Y'' im Inneren von CY, so kann Anja mit der Wahl eines beliebigen Punktes Z'' im Inneren von AZ erreichen, dass $|\triangle XY''Z''| > \frac{1}{4}$.□

Aufgabe 3

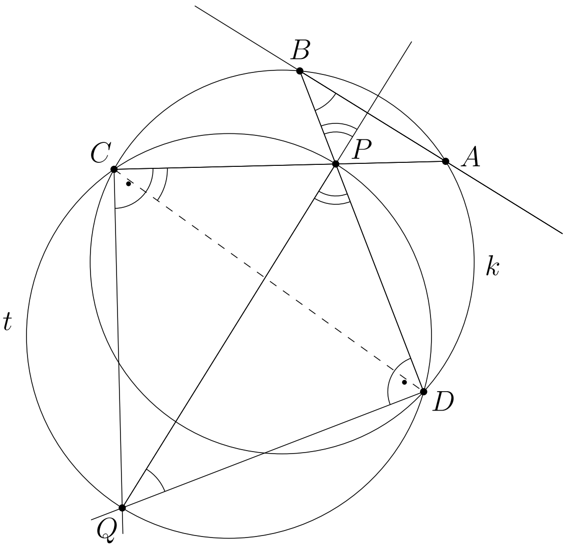
Auf einem Kreis liegen die Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge. Die Sehnen AC und BD schneiden sich im Punkt P, die Senkrechten auf AC im Punkt C beziehungsweise auf BD im Punkt D schneiden sich im Punkt Q.

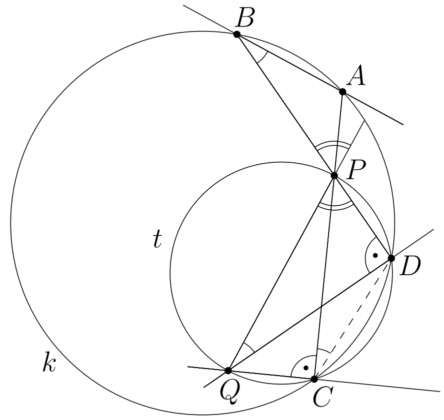
Beweise, dass die Geraden AB und PQ senkrecht aufeinander stehen.

Beweis:

Mit k sei der Kreis bezeichnet, auf dem nach Aufgabenstellung die Punkte A, B, C und D liegen. Die Aufgabenstellung setzt (implizit) voraus, dass $A \neq B$, weil andernfalls die Gerade AB nicht definiert ist. Wir setzen zunächst weitergehend voraus, dass die Punkte A, B, C und D paarweise verschieden sind. (Wir werden am Ende untersuchen, ob die Aufgabenstellung sinnvoll und zutreffend ist, wenn einzelne Punkte A, B, C und D zusammenfallen.) Damit schneiden sich die Sehnen AC und BD im Punkt P im Inneren des Kreises k. Die beiden Senkrechten auf den sich schneidenden Sehnen AC und BD können nicht parallel sein, sie schneiden sich also im Punkt Q.

Es ist unter anderem zu beweisen, dass sich die Geraden PQ und AB in einem Punkt S schneiden; das setzen wir im Folgenden noch nicht voraus. Zudem müssen wir die möglichen Lagen des Punktes Q in mehreren Fällen betrachten, von denen keiner durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen wird; siehe auch nachfolgende Skizzen: Die Punkte P und Q können bezüglich der Geraden CD in unterschiedlichen Halbebenen liegen (1. Fall, linke Skizze), oder in derselben Halbebene (2. Fall, rechte Skizze). Außerdem kann der Punkt Q auf der Geraden CD liegen, er fällt dann mit einem der Punkte C oder D zusammen (3. Fall, siehe Skizze weiter unten).





Skizze 3.1: Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts)

Wir betrachten zunächst die Fälle 1 und 2, in denen der Punkt Q weder mit dem Punkt C noch mit dem Punkt D zusammenfällt. Nach Konstruktion sind $\sphericalangle QCP = \sphericalangle PDQ = 90°$ (1. Fall) beziehungsweise $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PDQ = 90°$ (2. Fall), nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegen damit beide Punkte C, D auf dem Kreis t mit Durchmesser PQ. Es gilt in beiden Fällen

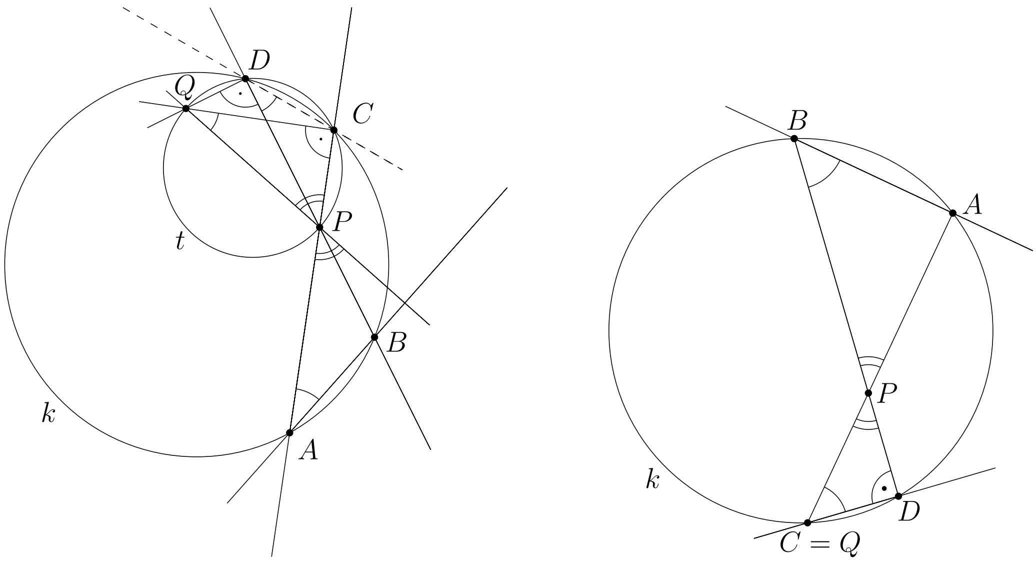
$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DCP = \sphericalangle DQP; \tag{3.1}$$

die Gleichungen folgen hierbei wesentlich aus dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunkswinkel: Denn $\sphericalangle DBA$ und $\sphericalangle DCA$ sind Umfangswinkel über demselben Kreisbogen k_{DA} von k, sind also gleich. Die beiden Winkel $\sphericalangle DCP$ und $\sphericalangle DQP$ sind gleich, weil sie beide Umfangswinkel über demselben Kreisbogen t_{DP} von t sind. Die erste und die dritte Gleichung in (3.1) gelten, weil der Punkt P sowohl auf BD als auch auf AC liegt. Im Dreieck $\triangle PQD$ ist nach Konstruktion

$$\sphericalangle QPD + \sphericalangle DQP = 180° - \sphericalangle PDQ = 90°, \tag{3.2}$$

und weil PQ und BD in P als Scheitelwinkel auch den Winkel $\sphericalangle QPD$ einschließen, folgt mit $\sphericalangle PBA = \sphericalangle DQP$ aus (3.1) und (3.2), dass sich PQ und AB tatsächlich

in einem Punkt S schneiden und senkrecht aufeinander stehen (Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle PQD$ und $\triangle BPS$).
In Skizze 3.1 liegt im Fall 1 der Punkt S zwischen den Punkten A und B beziehungsweise im Fall 2 A zwischen B und S. Tatsächlich kann auch der Fall eintreten, dass B zwischen S und A liegt; siehe Skizze 3.2 (links). Wir können in diesem Fall mit Argumenten wie oben die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle QPC$ und $\triangle PAS$ nachweisen; die Geraden AB und PQ stehen also auch in diesem Fall senkrecht aufeinander.



Skizze 3.2: Variante von Fall 2 (links) und Fall 3 (rechts)

Wir betrachten abschließend den Fall 3, dass der Punkt Q mit dem Punkt C zusammenfällt; die Argumentation vereinfacht sich dann (und im Fall $Q = D$ kann analog argumentiert werden). Es sind in diesem Fall nämlich

$$\sphericalangle DCP = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle PBA,$$

weil sowohl $\sphericalangle DCA$ als auch $\sphericalangle DBA$ Umfangswinkel über dem Kreisbogen k_{DA} von k sind. Außerdem sind $\sphericalangle CPD = \sphericalangle APB$ (Scheitelwinkel). Also sind die Dreiecke $\triangle PCD$ und $\triangle BPA$ ähnlich mit rechtem Winkel in D und A, das heißt $PQ = AC$ steht senkrecht auf AB. □

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist sogar noch sinnvoll und zutreffend, wenn $C = B$ — dann fällt der Schnittpunkt P von AC und BD mit dem Punkt $B = C$ zusammen, und PQ ist nach Konstruktion die Senkrechte auf $AC = AB$ im Punkt $C = B = P$. Analog kann argumentiert werden, wenn $A = D$.

Aufgabe 4

In einer Klasse sind 33 Kinder. Jedes Kind schreibt an die Tafel, wie viele andere Kinder in der Klasse den gleichen Vornamen tragen wie es selbst. Danach schreibt jedes Kind an die Tafel, wie viele andere Kinder in der Klasse den gleichen Nachnamen haben wie es selbst. Als sie fertig sind, kommt unter den 66 Zahlen an der Tafel jede der Zahlen 0, 1, 2, ..., 10 mindestens einmal vor.

Beweise, dass in der Klasse mindestens zwei Kinder den gleichen Vor- und Nachnamen tragen.

Anmerkung: In dieser Klasse hat jedes Kind genau einen Vornamen und genau einen Nachnamen.

Beweis: Aus der Aufgabenstellung lässt sich durch die folgende Beobachtung genauer ableiten, welche 66 Zahlen an der Tafel stehen: Denn gibt ein Kind durch Anschreiben einer natürlichen Zahl k, $k \geq 0$, an der Tafel an, dass k andere Kinder in der Klasse denselben Namen (Vor- oder Nachnamen) haben wie es selbst, so zählt es sich selbst nicht mit. Es existiert dann in der Klasse eine Gruppe von $k+1$ Kindern, die alle denselben Namen haben. Das heißt, wenn die Zahl k überhaupt an die Tafel geschrieben wird, so wird sie mindestens $(k+1)$-mal an der Tafel notiert, je einmal von jedem Kind dieser Gruppe. Nach Aufgabenstellung kommt unter den 66 Zahlen an der Tafel jede der Zahlen k, $0 \leq k \leq 10$, mindestens einmal, nach unserer Beobachtung sogar mindestens $(k+1)$-mal, vor. Weil bereits $\sum_{k=0}^{10}(k+1) = 1+2+3+...+11 = 66$, über die Mindestanzahl also die Gesamtzahl aller notierten Zahlen erreicht wird, steht jede der Zahlen $k \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$ genau $(k+1)$-mal an der Tafel.

Eine Gruppe von $k+1$ Kindern, die denselben Namen (Vor- oder Nachnamen) tragen, nennen wir *Clique* der Größe $k+1$. Wir haben gerade gesehen, dass die Klasse in genau 11 Cliquen, nämlich je eine der Größe $k+1$, $0 \leq k \leq 10$, zerfällt. Jede dieser Cliquen fasst eine Gruppe von Kindern zusammen, die entweder denselben Vornamen (V-Clique) oder denselben Nachnamen (N-Clique) tragen.

Wir betrachten die Clique der Größe 11, die in der Klasse existiert; ohne Einschränkung können wir annehmen, dass es eine N-Clique ist (sonst vertauschen wir im Folgenden die Rolle von Vor- und Nachnamen). Jedes Kind dieser N-Clique hat auch einen Vornamen und gehört daher noch zu einer der höchstens 10 V-Cliquen. Nach dem Schubfachprinzip müssen damit 2 der 11 Kinder aus der betrachteten N-Clique in derselben V-Clique sein.

Diese beiden Kinder tragen denselben Vor- und Nachnamen. $\square$

Wir danken Herrn Prof. Quaisser und Herrn StD Fegert für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 123

Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg: Kl. 11: Frauke Stoll 6.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Hannah Acker 12, Lukas Born 8, Lea Daum 13, Jonas Schneider 13, Chiara Zimmermann 4;
Kl. 8: Torben Bürger 23, Virginia Fox 20, Maximilian Hauck 42, Sarah Kästner 14, Marcel Schneider 4, Rabea Zimmermann 9;
Kl. 12: Katharina Rößler 14.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Are-Gymnasium:
Kl. 5: Leonie Fischbach 2, Tobit Roth 7;
Kl. 11: Sven Pleger 6.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 6: Olivia Stachow 4;
Kl. 12: Adriana Stenger 13, Marcel Wittmann 23.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 10: Patrick Riebe 18.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 5: Aleksandra Herbst 18.

Friedrichsdorf, Maint/Taunus International School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**: Kl. 3:** Ben Bergmann 8, Mateo Dorsch 8, Frida Lunau 8, Keito Ogino 8, Tim Pilger 8, Sosan Rahman 8, Hannah Schnee 8;
Kl. 4: Atreyee Choudhury 8, Lina Decker 8, Ana Flores 8, Aditi Girish 8, Sven Reß 8;
Kl. 5: Mia Großkreutz 13, Jacob Huck 11;
Kl. 6: Aleksandra Burchala 11, Henri Lunau 13.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuender Lehrer: Herr Grasse):
Kl. 6: Sbeastian Braun 19;
Kl. 9: Melanie Schuy 16;
Kl. 10: David Storzer 34;

Kelkheim, Eichendorffschule: Kl. 8: Denis Mayle 28.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach: Kl. 8: Beatrice Popescu 10.

Linz, MartinusGymnasium: Kl. 5: Simon Waldek 5.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Lukas Bergholz 2, Vienna März 1, Sina Katharina Sturm 2, Ezgi Ugurlu 2, Koray Tasaroglu 2;

Kl. 11: Melanie Weibrich 10;
Kl. 13: Theresa Schöche 18.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:
Kl. 11: Silas Rathke 21.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium: Kl. 8: Sonja Kowallek 14.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 7: Sönke Schneider 28.
Kl. 9: Lara Braun 17, Maximilian Göbel 34, Philipp Karn 14, Fabian Leipach 21, Jara Müller-Kästner 13, Kristin Teichert 15;
Kl. 12: Yvonne Selig 17, Annika Teichert 19, Julia Theis 16;

Tangermünde, Diesterweggymanisum: Kl. 6: Miriam Büttner 21.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Lara Wilbert 2;
Kl. 6: Raphael Gaedtke 6.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Verena Lucas, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Emily Searle-White, Bettina Wiebe
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Wir trauern um

Anita Peffer-Kohl.

Frau Peffer-Kohl hat seit 2012 die Abonnements betreut und somit die Arbeit der Monoid-Redaktion entscheidend unterstützt.
Unser Mitgefühl gilt ihrer Familie und ihren Freunden.

Jahrgang 36	Heft 125	März 2016

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid