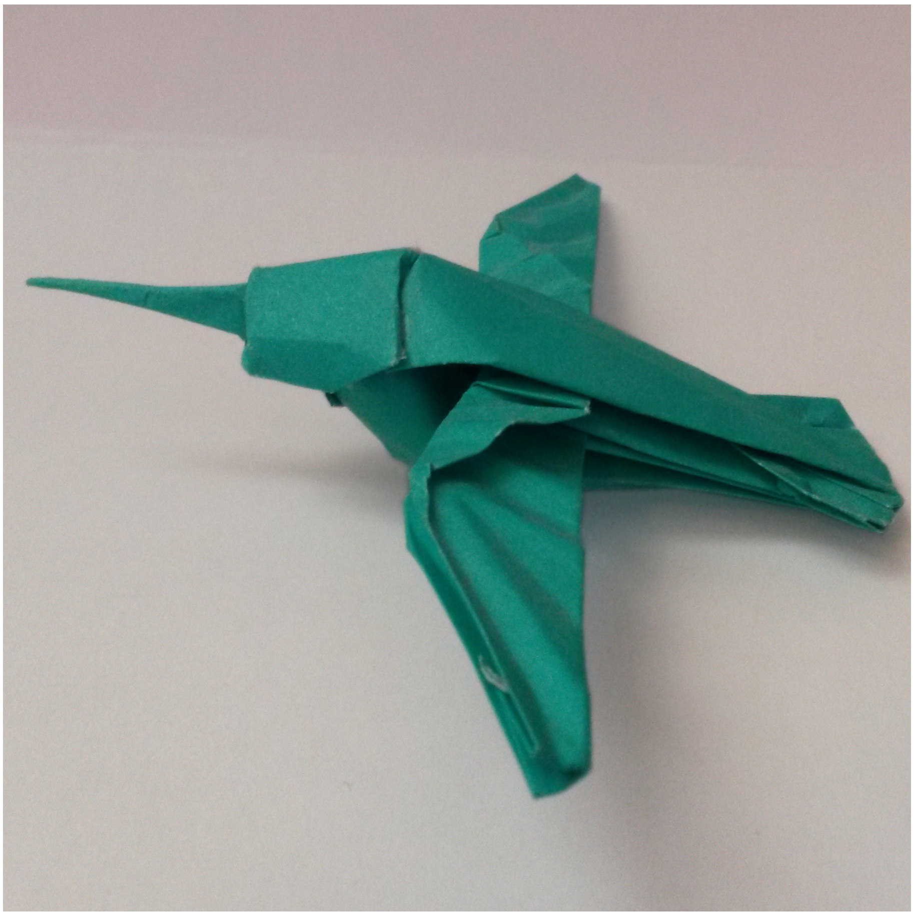
Jahrgang 36 Heft 126 Juni 2016

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **31.08.2016.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

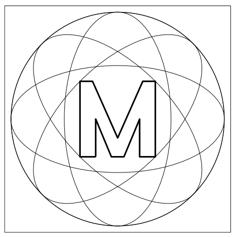
Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Main/Taunus International School** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Für die jüngeren Löserinnen und Löser gibt es den Monoid-Fuchs, der ebenfalls mit einem Geldbetrag verbunden ist.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Origami-Geometrie

von Laura Biroth

Geometrie mit Zirkel und Lineal

Schon die alten Griechen haben sich damit beschäftigt, welche geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und einem (unmarkierten) Lineal möglich sind. Dabei sind nur die folgenden grundlegenden Schritte erlaubt:

(Z1) Man kann eine Gerade g durch zwei verschiedene Punkte P und Q zeichnen.

(Z2) Man kann einen Kreis um einen Punkt P durch einen anderen Punkt Q zeichnen.

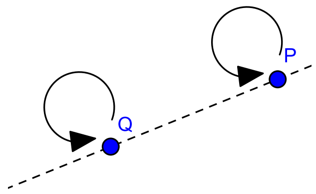
Dabei dürfen stets Punkte, die sich als Schnittpunkte so konstruierter Geraden und Kreise ergeben, für die weitere Konstruktion verwendet werden.
Allerdings konnten sie einige der untersuchten Probleme mit diesen Methoden nicht lösen, zum Beispiel die Dreiteilung des Winkels (Zerlege einen gegebenen Winkel in drei gleich große Teile) oder die Verdopplung des Würfels (Konstruiere zu einer gegebenen Strecke s eine Strecke t, sodass $t^3 = 2s^3$). Tatsächlich ist das keine Frage davon, wie geschickt man sich anstellt, sondern man hat bewiesen, dass es unmöglich ist, diese Probleme mit Zirkel und Lineal im obigen Sinne zu lösen. Jeder der behauptet, eines dieser Probleme gelöst zu habe, muss einen Fehler gemacht, oder sich nicht auf die oben genannten Schritte beschränkt haben.

Origami-Geometrie

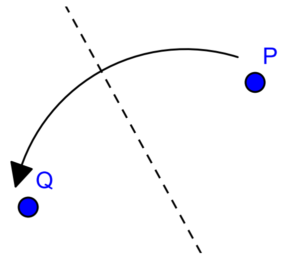
Man kann jedoch andere Hilfsmittel und Konstruktionsschritte erlauben, und damit möglicherweise mehr oder andere Probleme lösen.
In diesem Artikel betrachten wir Origami, die aus Japan stammende Kunst des Papierfaltens. Um zu untersuchen, welche Konstruktionen hiermit möglich sind beschrieben Jacques Justin sowie später Humiaki Huzita und Koshiro Hatori die grundlegenden Axiome der „Origami-Geometrie“:

Man startet (wie übrigens auch bei der Konstruktion mit Zirkel und Lineal) mit einem unendlich großen Blatt Papier, auf dem zwei Punkte markiert sind. Den Abstand dieser Punkte bezeichnen wir als 1 (eine Längeneinheit). Alternativ kann man auch mit einem Quadrat der Kantenlänge 1 starten, dieses lässt sich aber mit den folgenden Axiomen auch leicht aus den beiden Punkten konstruieren (überlege dir wie). Bei manchen Konstruktionen werden wir der Übersichtlichkeit halber nur dieses Quadrat darstellen, wir können aber auf das unendlich große Papier zurückgreifen, wann immer uns das hilft.

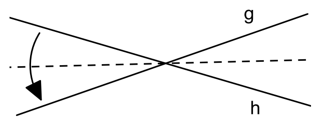
(O1) Man kann zwei verschiedene Punkte P und Q durch eine Falte verbinden.



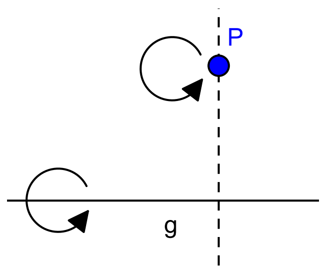
(O2) Man kann einen Punkt P auf einen anderen Punkt Q falten.



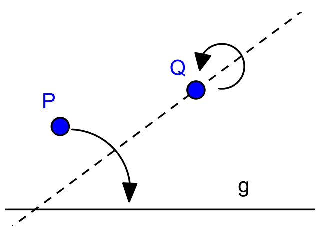
(O3) Man kann eine Gerade g auf eine Gerade h falten.



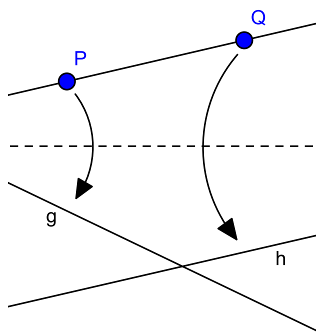
(O4) Man kann eine Falte durch einen Punkt P legen, die senkrecht auf einer Geraden g steht.



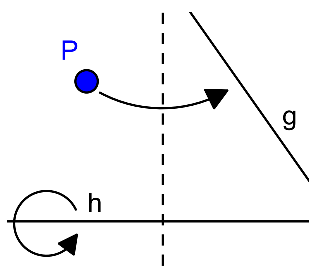
(O5) Man kann einen Punkt P so auf die Gerade g falten, dass die Falte durch einen Punkt Q geht (vorausgesetzt, dass der Punkt Q nicht weiter von der Gerade g entfernt ist, als von P).



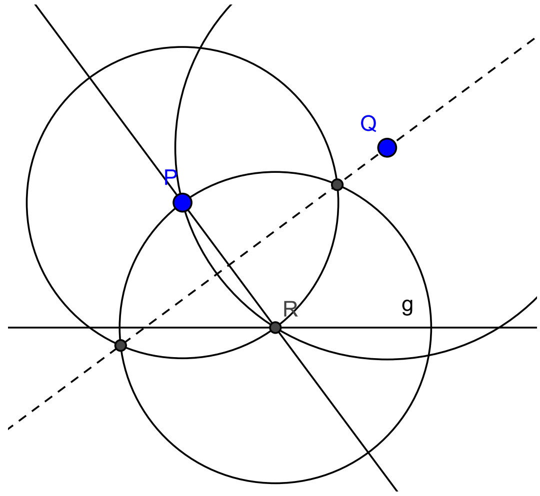
(O6) Man kann die Punkte P und Q auf die Geraden g und h falten.



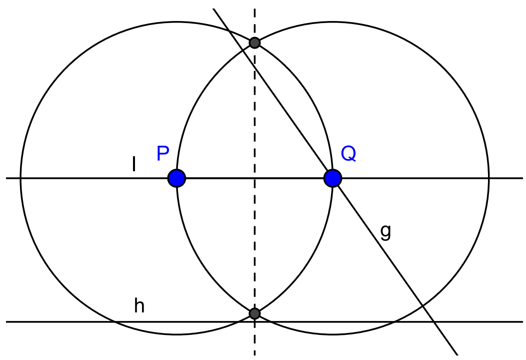
(O7) Man kann einen Punkt P so auf die Gerade g falten, dass die Falte senkrecht zu einer Geraden h steht.



Geraden können hierbei entweder Falten oder aber die Ränder des oben beschriebenen Quadrates sein. Auch hier dürfen wieder Punkte, die sich als Schnittpunkte bereits konstruierter Geraden ergeben, für weitere Konstruktionsschritte verwendet werden.
Das Axiom (O1) der Origami-Geometrie entspricht dem Axiom (Z1) der Zirkel-und-Lineal-Geometrie, und auch die Konstruktionen zu (O2) (Mittelsenkrechte auf PQ), (O3) (Winkelhalbierende) und (O4) (Lot zu g durch P) sind leicht mit Zirkel und Lineal möglich.
Um die Gerade aus (O5) zu konstruieren, zeichnet man einen Kreis um Q durch P. Sei R ein Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden g (wenn kein solcher Schnittpunkt existiert, existiert auch die gesuchte Gerade nicht). Anschließend konstruiert man die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PR}$. Diese ist die gesuchte Gerade.



Konstruktion zu Axiom (O5)



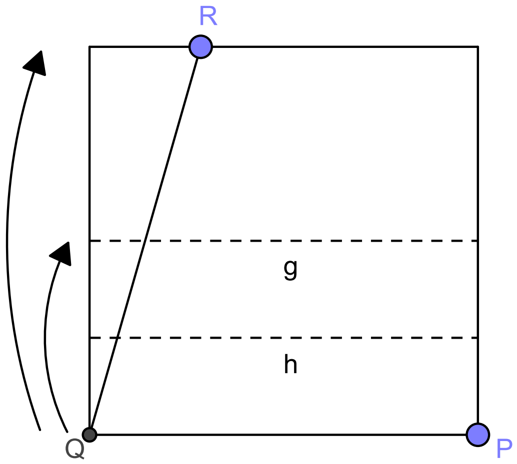
Konstruktion zu Axiom (O7)

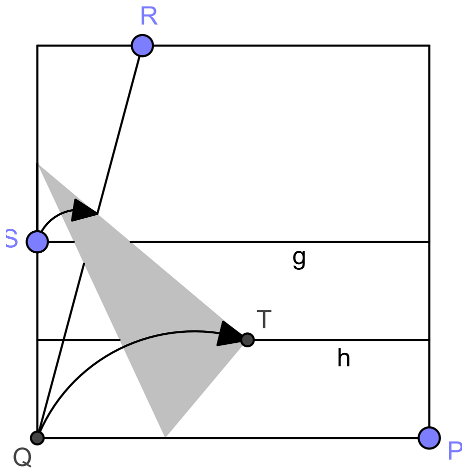
Die Falte aus Axiom (O7) konstruiert man mit Zirkel und Lineal, indem man eine Parallele l zu h durch P zeichnet, den Schnittpunkt von l und g mit Q bezeichnet, und schließlich die gesuchte Gerade als Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PQ}$ konstruiert.
Die Konstruktion aus (O6) hingegen ist mit Zirkel und Lineal tatsächlich nicht möglich. Dieser zusätzliche Konstruktionsschritt erlaubt es uns, mit Origami Lösungen für Probleme zu finden, an denn die alten Griechen gescheitert sind.

Winkeldreiteilung

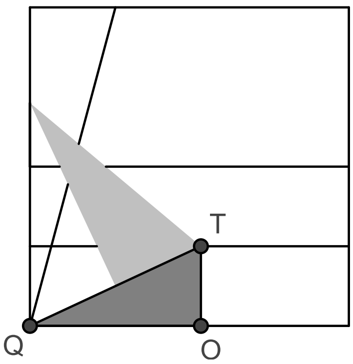
Das Problem der Winkeldreiteilung mit Hilfe von Origami wurde 1980 von Hisashi Abe gelöst. Man geht dabei wie folgt vor:
Gegeben sei der Winkel PQR. Als erstes konstruiert man zwei Parallelen g und h in gleichem Abstand zur Gerade PQ, zum Beispiel indem man die Gerade PQ erst auf die gegenüberliegende Kante des Quadrates und dann auf den soeben erzeugten Knick g faltet (O3). Den Schnittpunkt von g mit dem linken Rand des

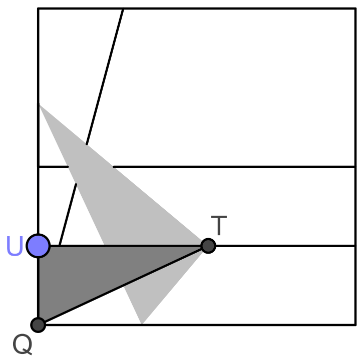
vorgegebenen Quadrates nennen wir S. Jetzt muss man nur noch den Punkt Q auf die Gerade h und den Punkt S auf die Gerade QR falten. Sei T der Punkt, auf dem Q zu liegen kommt. Dann gilt: Der Winkel PQT beträgt genau ein Drittel des ursprünglichen Winkels PQR.

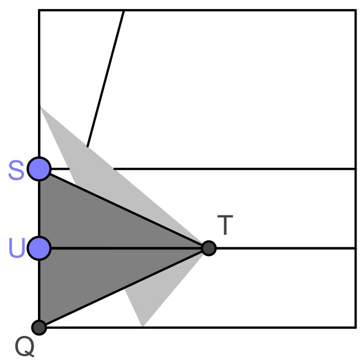


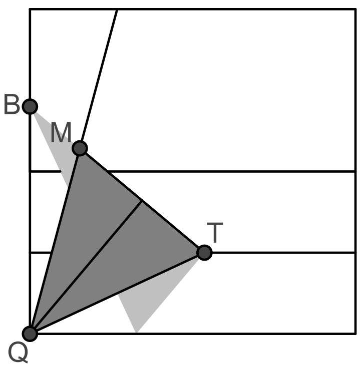


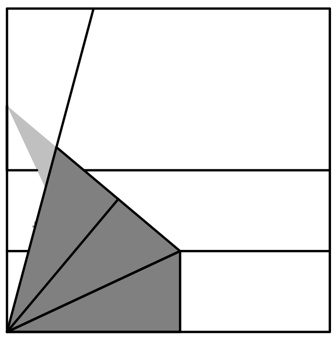
Dass dies tatsächlich stimmt, sieht man, indem man die folgenden kongruenten (dunkelgrauen) Dreiecke betrachtet:











Das Dreieck QOT ist kongruent zu QTU, da es in allen Seiten übereinstimmt. QTU wiederum ist kongruent zu UTS, weil beide einen rechten Winkel, sowie gleich lange Katheten haben.

Jetzt betrachten wir die großen Dreiecke QTS und QTM: Beide haben die gleiche Seite $\overline{QT}$. Außerdem ist die Seite $\overline{SQ}$ genauso lang wie $\overline{TM}$, da wir den Punkt T ja konstruiert haben, indem wir S und Q auf M und T gefaltet haben. Außerdem ist der Winkel bei Q von QTS und der Winkel bei T von QTM gleich groß, da beides Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks BQT sind. Damit sind auch

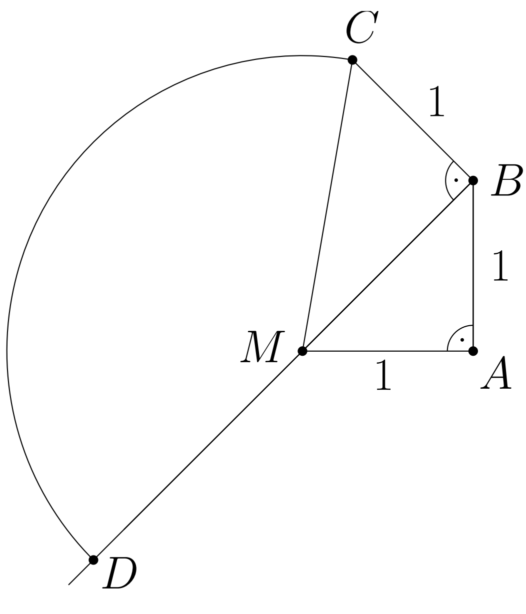
diese Dreiecke kongruent.
Insbesondere ist der Winkel von QTM bei Q doppelt so groß, wie der von QOT, d.h. der Winkel OQT beträgt genau ein Drittel des Winkels PQR.

Was uns so über den Weg gelaufen ist

Eine Näherungskonstruktion für π

von Hartwig Fuchs

Seit den Anfängen der Mathematik sucht man (unter anderem) mit geometrischen Konstruktionen nach Näherungswerten für die Zahl $\pi = 3{,}1415926\ldots$.
Eine der simpelsten Konstruktionen ist uns kürzlich zur Kenntnis gelangt.



Man konstruiere die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle MAB$ und $\triangle MBC$ wie in der Figur.
Dann ist $|MB| = \sqrt{2}$ und $|MC| = \sqrt{3}$. Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $|MC|$ schneide die Verlängerung der Strecke BM über M hinaus im Punkt D. Dann ist $|BD| = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Nun ist $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14626\ldots$ und $\pi = 3{,}14159\ldots$, und $\left|(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \pi\right| = 0{,}00467\ldots$.
Daher darf man $|BD|$ als einen Näherungswert für π betrachten.

Beispiel: Ein Kreis vom Radius 100cm hat den Umfang 628,318 … cm, wenn man mit dem zehnstelligen Wert von π rechnet und den Umfang 629,252 … cm, wenn man den zehnstelligen Wert von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ verwendet – der Unterschied beträgt daher 0,934 … cm, also weniger als 1cm.

Unendlich unterschiedliche Unendlichkeiten

von Silas Rathke

Zu einem Gebiet der Mathematik gehört die Frage, welche der Mengen A bzw. B mehr Elemente hat als die andere. Bei endlichen Mengen ist diese Frage leicht zu beantworten: Man zählt die Elemente jeweils einfach durch und sieht dann, wo die Anzahl größer ist. Beispielsweise ist es sehr leicht, zu sehen, dass $A = \{1, 2, 3\}$ weniger Elemente enthält als $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Doch wie sieht es bei unendlichen Mengen aus? Naiv könnte man sagen, alle unendlichen Mengen haben gleich viele Elemente, nämlich unendlich viele. Doch wie wir sehen werden, ist das eine zu stark undifferenzierte Sicht.

Zunächst sollten wir ein Gespür dafür bekommen, was „unendlich" wirklich bedeutet, schließlich kommt es in der Natur nicht klar erkennbar vor. Dazu betrachten wir das folgende Gedankenspiel, das nach seinem Schöpfer David Hilbert (1862-1943) unter dem Namen „Hilberts Hotel" bekannt ist.

Ein Hotel habe unendlich viele Einzelzimmer. Diese seien mit den natürlichen Zahlen bei 1 beginnend durchnummeriert. Eines Tages sind alle Zimmer belegt. Ein weiterer Gast kommt hinzu und möchte auch in einem Zimmer übernachten. In jedem anderen Hotel müssten wir den Gast abweisen, schließlich ist das Hotel voll ausgebucht. Nicht aber in diesem unendlichen Hotel. Wir bitten einfach jeden Gast, in das Zimmer mit der nächstgrößeren Zimmernummer umzuziehen; der Gast aus dem Zimmer 1 also in Zimmer 2, der aus Zimmer 2 in Zimmer 3, usw. Da jede natürliche Zahl einen Nachfolger besitzt, kann jeder in ein anderes Zimmer umziehen und am Ende ist das Zimmer 1 unbelegt, wo der neue Gast einziehen kann. Wir sehen: Obwohl das Hotel voll ist, können wir einen weiteren Gast unterbringen!

Genau so verhält es sich, wenn noch einmal (abzählbar) unendlich viele Gäste in das Hotel einchecken möchten. Jetzt zieht jeder in das Zimmer mit der doppelten Nummer um, also der Gast aus Zimmer 1 in Zimmer 2, der aus 2 in 4, der aus 3 in 6, usw. Am Ende sind alle ungeraden Zimmer wieder frei, worin die unendlich vielen neuen Gäste einziehen können.

Alles in allem sehen wir, dass unendliche Mengen genau so viele Elemente besitzen können wie eine echte Teilmenge derselben Menge. Im letzten Beispiel brauchte man genau so viele Gäste, um die Menge der natürlichen Zahlen abzudecken, wie man am Ende brauchte, um die Menge der geraden Zahlen abzudecken. Man kommt also zu dem scheinbar paradoxen Ergebnis, dass die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig zu der Menge der geraden Zahlen ist, obwohl die eine Menge in der anderen enthalten ist.

Spätestens jetzt müssen wir festlegen, wann wir sagen, dass zwei unendliche Mengen „gleich viele“ Elemente besitzen, sie also „gleichmächtig“ sind.

Definition: Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn eine Bijektion zwischen A und B existiert.
Man muss also jedem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnen können und umgekehrt, wenn A und B gleichmächtig sind.

Als Beispiel beweisen wir, dass die Mengen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig sind. Dazu betrachten wir die folgende Zuordnung:

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dabei entsteht eine solche Zuordnung:

$\mathbb{N}_0$	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Da jedem Element aus $\mathbb{N}_0$ genau ein Element aus $\mathbb{Z}$ zugeordnet ist und umgekehrt, sind diese Mengen gleichmächtig, obwohl $\mathbb{N}_0$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist.

Als Nächstes wollen wir uns davon überzeugen, dass es auch unendliche Mengen gibt, die unterschiedlich viele Elemente besitzen, also nicht gleichmächtig sind. Dazu betrachten wir erneut die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (dieses Mal ohne 0) und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ im Intervall $[0, 1[$. Wir nehmen an, es gibt eine bijektive Zuordnung zwischen diesen beiden Mengen:

$\mathbb{N}$	$[0, 1[$
1	$0{,}a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$
2	$0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$
3	$0{,}c_1c_2c_3c_4c_5\ldots$
4	$0{,}d_1d_2d_3d_4d_5\ldots$
5	$0{,}e_1e_2e_3e_4e_5\ldots$
...	...

Jeder natürlichen Zahl haben wir jetzt eindeutig eine reelle Zahl im Intervall $[0, 1[$ zugeordnet und auch umgekehrt wurde jeder reellen Zahl in diesem Intervall durch die gegebene Bijektion eine natürliche Zahl zugeordnet. Dabei stehen die Variablen a_i, b_i, c_i, d_i und e_i jeweils für die i-te Nachkommastelle in der entsprechenden Zeile.

Jetzt können wir aber eine neue reelle Zahl $0{,}a'b'c'd'e'\ldots$ konstruieren, indem wir folgendes Verfahren anwenden: Bei der ersten Nachkommastelle a' der neuen Zahl

achten wir darauf, dass sie unterschiedlich zu der ersten Nachkommastelle a_1 der reellen Zahl der ersten Zeile ist. Die zweite Nachkommastelle b' soll unterschiedlich zu der zweiten Nachkommastelle b_2 der reellen Zahl in der zweiten Zeile sein. Die dritte Nachkommastelle c' soll unterschiedlich zu der dritten Nachkommastelle c_3 der rellen Zahl der dritten Zeile sein usw.
So erhalten wir eine neue reelle Zahl $0{,}a'b'c'd'e'\ldots$ aus dem Intervall $[0,1[$. Zusätzlich unterscheidet sie sich von allen reellen Zahlen aus unserer Liste zumindest an einer Nachkommastelle. Somit haben wir eine noch nicht zugeordnete reelle Zahl gefunden und unsere Annahme, alle reellen Zahlen aus dem Intervall $[0,1[$ wären verwendet worden, ist falsch. Dieses Verfahren, welches unter dem Namen „Cantors zweites Diagonalargument " (nach dem deutschen Mathematiker Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)) bekannt ist, kann für jede Abzählung angewendet werden, weswegen unsere Liste niemals vollständig sein kann. Somit existiert keine Zuordnung zwischen den reellen Zahlen aus dem Intervall [0;1[und den natürlichen Zahlen und somit sind sie weder gleichmächtig noch besitzen diese beiden Mengen gleich viele Elemente. (Welche hat mehr?)

Es gibt also nicht nur eine Unendlichkeit, sondern unterschiedlich große Unendlichkeiten. Unser letztes Ziel in diesem Artikel soll es sein, zu beweisen, dass es unendlich viele unterschiedliche Unendlichkeiten gibt. Dazu zeigen wir, dass es möglich ist, aus jeder unendlichen Menge eine neue Menge zu konstruieren, die nicht gleichmächtig ist, sondern mehr Elemente besitzt. Induktiv folgt dann, dass es immer eine „noch größere Unendlichkeit" gibt.

Dazu betrachten wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M. Diese ist definiert als die Menge aller Teilmengen von M. Ist zum Beispiel $M = \{1,2,3\}$, dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Wir zeigen nun, dass sowohl bei endlichen als auch bei unendlichen Mengen M gilt:

$$|M| < |\mathcal{P}(M)|.$$

Zunächst sieht man, dass $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ gilt (Warum?). Indem wir jetzt zeigen, dass es keine bijektive Zuordnung dieser beiden Mengen gibt, schließen wir die Gleichmächtigkeit der beiden Mengen aus und sind fertig.
Auch hier gehen wir indirekt vor und nehmen an, dass eine bijektive Zuordnung $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ existiert. Nun kann man bei jedem Element $x \in M$ untersuchen, ob es auch ein Element von $f(x)$ ist, also der Teilmenge, der x durch f zugeordnet ist. Generell kann man nun eine neue Menge N definieren, die genau die Elemente $x \in M$ enthält, die wiederum kein Element in der ihr zugeordneten Teilmenge $f(x)$ sind. Formal also:

$$N := \{x \in M\colon x \notin f(x)\}.$$

Nun ist N eine Teilmenge von M. Folglich ist $N \in \mathcal{P}(M)$ und da die Zuordnung f bijektiv ist, muss es auch ein Element $m \in M$ mit $f(m) = N$ geben. Die Frage ist nun: Ist m auch ein Element von N?

Wenn $m \in N$ gilt, dann erfüllt m die Bedingung von N, dass gilt $m \notin f(m) = N$. Somit wäre m dann gleichzeitig ein Element von N und auch kein Element von N. Widerspruch!

Wenn $m \notin N$ gilt, dann erfüllt m die Bedingung von N nicht, es gilt also nicht $m \notin f(m)$ und somit gilt $m \in f(m) = N$. Auch hier ist m also gleichzeitig ein Element von N und auch kein Element von N. Widerspruch!

Also führen beide Fälle zu einem Widerspruch und unsere Annahme, dass es eine bijektive Zuordnung gibt, war falsch. Somit gilt $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ und deswegen $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Man sieht, dass es in der Mengenlehre nicht nur eine Unendlichkeit gibt, sondern unendlich viele. Außerdem ist es sehr spannend, zu untersuchen, ob zwei Mengen gleichmächtig sind, indem man nach einer passenden Zuordnung sucht. Beispielsweise beantwortet Cantors erstes Diagonalargument, ob die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig zu der Menge der rationalen Zahlen ist. Es war auch Cantor, der die sogenannte Kontinuumshypothese aufstellte. Diese vermutet, dass es keine Menge gibt, die zwar mehr Elemente enthält als die natürlichen, aber weniger Elemente als die reellen Zahlen. Das Interessante an dieser Hypothese ist, dass man zeigen konnte, dass sie weder beweisbar noch widerlegbar ist. Das führt uns in sehr tiefgreifende Grundlagenfragen der Mathematik. Leider reicht aber der Platz nicht mehr aus, dieses weiter auszuführen...

Ergänzende Fragen: Sind $\mathbb{N}$ sowie die Menge aller positiven geraden Zahlen gleichmächtig? Sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und das Intervall $]0, 1[$ gleichmächtig?

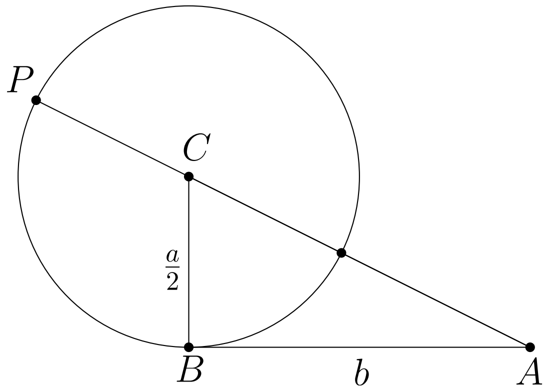
Aus den Archiven der Mathematik
Descartes' Wurzelkonstruktion

von Hartwig Fuchs

René Descartes (1596 – 1650) beschreibt in seinem berühmten Buch „Discours de la Méthode“ (1637), durch das er zum Begründer der analytischen Geometrie wurde, wie man allein mit der Geometrie die positive Lösung (Wurzel) der quadratischen Gleichung $x^2 = ax + b^2$ mit $a > 0$ und $b > 0$ findet.*

Er konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $|AB| = b$, $|BC| = \frac{a}{2}$ und dem rechten Winkel bei B. Dann zeichnet er den Kreis mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $\frac{a}{2}$. Die Verlängerung der Strecke AC schneidet den Kreis im Punkt P.

* Da $\sqrt{a^2 + 4b^2}$ eine reelle Zahl ist, hat die betrachtete Gleichung stets eine positive reelle Lösung.



Descartes behauptet nun: Die Länge s der Strecke AP ist die positive Lösung (Wurzel) der gegebenen Gleichung.
Nachweis: Es sei $|AP| = s$ gesetzt. Mit $|CP| = \frac{a}{2}$ gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$:

$$\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$
$$s^2 = as + b^2.$$

Die letzte Gleichung bedeutet: s erfüllt die Gleichung $x^2 = ax + b^2$. Mithin ist s die positive Lösung der gegebenen Gleichung, $s = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b^2})$.

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

$$MONOID = (DDD)^2$$

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine korrekte Zahlengleichung entsteht.
Dabei sollen gleichen (verschiedenen) Buchstaben gleiche (verschiedene) Ziffern zugeordnet werden und die führende Ziffer M soll verschieden von 0 sein.

Lösung

Wegen $DDD = 100 \cdot D + 10 \cdot D + D = 111 \cdot D$ und $(DDD)^2 = 12321 \cdot D^2 = MONOID$ hat D^2 die Einerziffer D. Daher ist $D = 0, 1, 5$ oder 6.
$D = 0$ scheidet offensichtlich aus.
$D = 1$ ist nicht möglich, weil 111^2 eine 5-ziffrige Zahl ist.
Aus $D = 6$ folgt $666^2 = 443556 = MONOID$ folgt, dass zum Beispiel $M = O$ ist, was nicht erlaubt ist.
Für $D = 5$ folgt $555^2 = 308025 = MONOID$. Da in $MONOID$ der zweite und vierte Buchstabe übereinstimmen und die zweite und vierte Ziffer von 308025 gleich sind, lautet die eindeutige Lösung

$$308025 = 555^2.$$

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Christian Hesse: „Math up your Life! Schneller rechnen, besser leben“

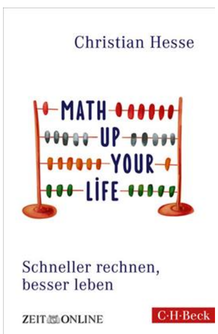
Mit „Math up your life“ legt der Stuttgarter Mathematikprofessor Christian Hesse erneut ein populärwissenschaftliches Buch zur Mathematik vor. Entstanden ist es als Druckfassung der besten Beiträge aus dem im Februar 2014 gestarteten Mathe-Blog des Autors auf ZEIT ONLINE.

Die insgesamt 54 Beiträge sind im Normalfall zwei bis drei Seiten lang, kommen fast ohne Formeln aus und eignen sich gut zum Lesen beim Frühstück, im Bus, in der Mittagspause, im Wartezimmer beim Arzt oder einfach so für zwischendurch. Wann und wo auch immer man einen Beitrag liest, so sollte man danach allerdings etwas Zeit erübrigen können, um über das gerade gelesene nachzudenken, es sacken zu lassen und – falls nicht angegeben – über die Begründung des gerade gelesenen nachzudenken

Wer bereits entsprechende Bücher mit Sammlungen mathematischer Plaudereien gelesen hat, dem werden manche der Geschichten bekannt vorkommen. Der Freude beim Lesen tut dies jedoch keinen Abbruch. Inhaltlich finden sich so unter anderem das Geburtstagsparadoxon, mehrere Kopfrechentricks, Benfords Gesetz, das Ziegenproblem, die Entschlüsselung der ENIGMA, Spieltheorie und vieles mehr. Manche der Geschichten können auch für den Unterricht als schöne und anregende Einstiege in neue Themen des Mathematikunterrichts dienen.

Fazit: Ob man nach der Lektüre von „Math up your Life!“ wirklich besser lebt, muss jeder für sich selbst entscheiden. Auf jeden Fall kann man – wenn man die sieben entsprechenden Schnellrechnen-Schnellkurse durchgearbeitet hat – hinterher schneller rechnen. Außerdem hat man dann zu vielen mathematischen Themenfeldern spannende Anregungen erhalten.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:
Hesse, Christian: Math up your Life! Schneller rechnen, besser leben, C.H.Beck 2016, ISBN 978-3-406-68137-0, Taschenbuch 142 Seiten , 9,95 €

Art des Buches:	Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Teilbarkeit durch 1000

Immer wenn Peter und Paul ins Kino gehen wollen, verabreden sie eine Wette. Der Verlierer muss den Gewinner einladen. Heute sagt Peter zu Paul: „Ich denke mir 10 beliebige positive ganze Zahlen, die nicht alle verschieden sein müssen. Du darfst einige oder auch keine, aber nicht alle davon streichen und die Summe aus den übrig gebliebenen Zahlen bilden. Wenn diese Summe durch 1000 teilbar ist, lade ich dich ein, sonst musst du mich einladen.“

Paul entgegnet: „Das ist ganz schön unfair. Du denkst dir einfach zehnmal die Zahl 1, und dann kann ich streichen so viel oder wenig ich will: die Summe wird nie durch 1000 teilbar sein. Du musst mir ein wenig entgegenkommen und erlauben, dass ich einigen der nicht von mir gestrichenen Zahlen vor dem Addieren nach meinem Belieben ein Minuszeichen geben darf.“ Peter, leicht überrumpelt, akzeptiert den Wunsch von Paul und macht sich daran, 10 passende Zahlen zu finden.

Wer von den beiden kann sich sicher sein, vom anderen eingeladen zu werden?

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 31. August 2016 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Trugschluss
Eine Spinne auf Wanderschaft

von Hartwig Fuchs

Eine Spinne sitzt in der Ecke A eines Ikosaeders I, dessen Oberfläche sich aus 20 gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt (dabei treffen in jeder Ecke genau fünf Dreiecke zusammen). Die Spinne möchte von A aus eine Wanderung längs der Kanten von I unternehmen und nach A zurückkehren, wobei sie keine Kante auf ihrem Weg auslassen will. Wie lange braucht sie für die kürzeste Wanderung, wenn sie bei jeder Kante 2 Minuten benötigt?

Mathis behauptet, sie braucht 60 Minuten, da das Ikosaeder 30 Kanten besitzt.

Seine große Schwester Anna grinst und schüttelt den Kopf: „Das stimmt nicht.“ Wie lautet die richtige Lösung?

Die Lösung basiert auf der Annahme:

(1) Auf I gibt es einen Weg von A nach A, der jede der 30 Kanten genau einmal enthält.

Mühsames Durchprobieren an einem Modell von I zeigt jedoch: Um auf ihrem Weg alle Kanten zu durchlaufen, muss die Spinne fünf Kanten zwei Mal entlang wandern – die Wanderzeit beträgt daher $35 \cdot 2 = 70$ Minuten.

Der Trugschluss wird dadurch verursacht, dass man die nicht zutreffende Aussage (1) – unausgesprochen – zu den Voraussetzungen der Aufgabe genommen hat.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 125

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Nur die Ziffer 1

Zeige: Es gibt eine ganze Zahl n, mit $0 < n < 10$, deren Produkt mit $12\,345\,679$ nur die Ziffer 1 enthält. (WJB)

Lösung:

Das Produkt muss neunstellig sein, also gleich $111\,111\,111$. Wir finden also n durch Dividieren von $111\,111\,111$ durch $12\,345\,679$, also $n = \frac{111111111}{12345679} = 9$.

Bemerkung: Statt die Division durchzuführen, können wir die letzte Ziffer betrachten. Das einzige Vielfache von 9 mit letzter Ziffer 1 ist 9 ($9 \cdot 9 = 81$) und überprüfen, dass $9 \cdot 12\,345\,679 = 111\,111\,111$.

Stattdessen können wir auch die Quersummen betrachten. $111\,111\,111$ hat Quersumme 9, also ist $12\,345\,679 \cdot n$ durch 9 teilbar. $12\,345\,679$ hat Quersumme 37, ist also weder durch 9 noch durch 3 teilbar. Demnach muss n durch 9 teilbar und folglich $n = 9$ sein.

II. Dreiecke mit Umfang 20

Wie viele gleichschenklige Dreiecke mit Umfang 20 und ganzzahligen Seitenlängen gibt es? Nenne die verschiedenen Möglichkeiten! (WJB)

Lösung:

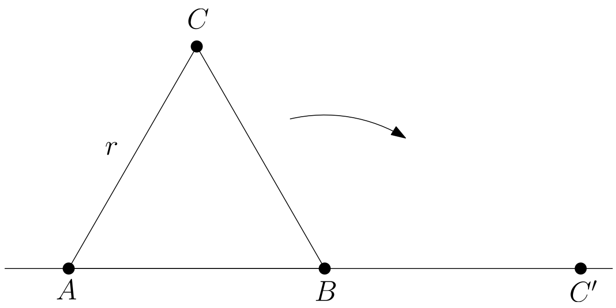
Die beiden gleichlangen Schenkel a und b des Dreiecks haben zusammen eine gerade Zahl als Länge, also muss auch die Grundseite eine gerade Länge $c = 20 - (a + b)$ haben.

Es gibt demnach folgende Möglichkeiten für c und $a = b = \frac{20-c}{2}$:

c	2	4	6	8	10
a	9	8	7	6	5

Die letzte Spalte mit $a + b = 10 = c$ beschreibt aber kein Dreieck mehr. Also gibt es vier Dreiecke der beschriebenen Art.

III. Drehung eines Dreiecks



Ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge r wird zunächst so um den Punkt B gedreht, dass der Punkt C in den Punkt C' auf der Verlängerung von AB überführt wird. Dann drehe man das Dreieck um den Punkt C' und so weiter, bis die Strecke AB wieder in der Verlängerung von AB liegt. Wie lang ist dabei der vom Punkt A zurückgelegte Weg? (H.F.)

Lösung:

Nach drei Rotationen liegt die Dreiecksseite AB wieder in der Verlängerung von AB. Dabei wird der Punkt A zweimal um je $120°$ gedreht – bei der dritten Rotation ist A der Fixpunkt, bewegt sich also nicht. Damit durchläuft der Punkt A zweimal je einen $\frac{1}{3}$-Kreis vom Radius r und damit ein Teilstück der Länge $\frac{1}{3} \cdot 2\pi r$. Der Weg des Punkts A ist daher $\frac{4}{3}\pi r$ lang.

IV. Buchstaben – oder doch Zahlen?

Wie geht es weiter bei

a) ZDFSED. . . ?

b) EVNSFS. . . ?

Gib jeweils drei weitere Folgenglieder an und begründe Deine Antwort. (WJB)

Lösung:

a) ZDFSEDSND. . . . Es handelt sich um die Anfangsbuchstaben der Primzahlen.

b) EVNSFSNVE. . . . Es handelt sich um die Anfangsbuchstaben der Quadratzahlen.

V. Zufällige Zahlenwahl

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Menge der Zahlen $\{10, 11, 12, \dots , 999\}$ zufällig eine Zahl herauszunehmen mit

a) lauter verschiedenen Ziffern?

b) mit lauter gleichen Ziffern?

c) mit genau zwei verschiedenen Ziffern? (H.F.)

Lösung:

a) Es sei $A(m; n)$ die Anzahl der Zahlen z mit $m \leq z \leq n$ mit lauter verschiedenen Ziffern.
Dann ist $A(10; 99) = 81$.
Es sei nun z eine dreiziffrige Zahl $z = abc$. Dann ist a eine von 9 möglichen Ziffern (1, 2, ..., 9), b ist eine von 9 möglichen Ziffern ($b = 0$ ist möglich, $b = a$ nicht) und c ist eine von noch 8 möglichen Ziffern ($c = a$ oder $c = b$ ist nicht möglich). Daraus folgt: Es gibt $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ Zahlen $z = abc$ mit lauter verschiedenen Ziffern.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher:
$$\frac{A(10; 999)}{990} = \frac{81 + 648}{990} = \frac{729}{990} = \frac{81}{110}.$$

b) Es sei $B(m; n)$ die Anzahl der Zahlen z mit $m \leq z \leq n$, die lauter gleiche Ziffern haben.
Dann ist $B(10; 99) = B(100; 999) = 9$, sodass
$$\frac{B(10; 999)}{990} = \frac{9 + 9}{990} = \frac{2}{110}$$
die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist.

c) Da es $990 - A(10; 999) - B(10; 999) = 243$ Zahlen gibt, die weder lauter verschiedene Ziffern noch lauter gleiche Ziffern und daher genau zwei verschiedene Ziffern besitzen, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit
$$\frac{243}{990} = \frac{27}{110}.$$

VI. Geschwindigkeiten

Die Städte Mainz und Frankfurt sind **45km** voneinander entfernt. Zwei Radfahrer, einer in Mainz, der andere in Frankfurt, starten gleichzeitig. Die beiden treffen sich **24km** von Mainz entfernt. Wenn der Radfahrer aus Mainz $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$ schneller als der aus Frankfurt fährt, mit welcher Geschwindigkeit fährt dann jeder? (H.F.)

Lösung:

Es seien x beziehungsweise $x+4$ die Geschwindigkeiten des Radfahrers aus Frankfurt (F) beziehungsweise aus Mainz (M). Dann benötigt (in Stunden) der Radfahrer aus Mainz bezeihungsweise aus Frankfurt bis zum Treffpunkt:
$t_M = \frac{24}{x+4}$ beziehungsweise $t_F = \frac{21}{x}$.
Aus $t_M = t_F$ folgt dann:
$$\frac{24}{x+4} = \frac{21}{x} \Rightarrow 24x = 21x + 84 \Rightarrow x = 28.$$
Also fährt der Radler aus Frankfurt mit $28\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und der aus Mainz mit $32\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

VII. Wie viele Verbindungsgeraden?

a) Wie viele Verbindungsgeraden gibt es zwischen sechs Punkten in der Ebene mindestens, wie viele höchstens?

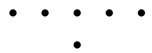
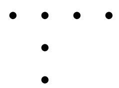
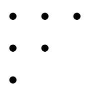
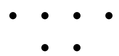
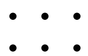
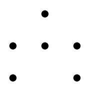
b) Welche andere Möglichkeiten für die Anzahl der Verbindungsgeraden gibt es noch? (WJB)

Hinweis: Es ist kein Beweis nötig, dass manche Anzahlen nicht auftreten können.

Lösung:

a) Es gibt mindestens eine Verbindungsgerade (alle Punkte auf einer Geraden) und höchstens $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (die Punkte bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen 6-Ecks, dann liegt jeder Punkt auf genau 5 Verbindungsgeraden).

b) Es gibt folgende Möglichkeiten:

1. 6 Geraden:

2. 8 Geraden:

3. 9 Geraden:

4. 10 Geraden:

5. 11 Geraden:

6. 13 Geraden:


Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Positive Produkte

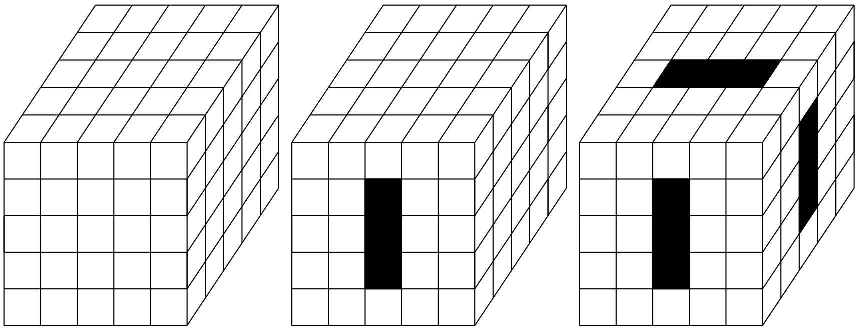
Für beliebige Zahlen a, b und c gilt:

Die drei Produkte $p_1 = (a - 2b)(ab - c^2)$, $p_2 = (b - 2c)(bc - a^2)$ und $p_3 = (c - 2a)(ac - b^2)$ können nicht sämtlich positiv sein.

Warum? (H.F.)

II. Quadervolumina

Gegeben seien drei Quader wie in der Abbildung. Dabei sei der erste Quader massiv und bestehe aus einer Vielzahl von Teilquadern, die jeweils ein Volumen von 1cm^3 haben. Im zweiten Würfel wird dann ein drei Teilquader breiter „Tunnel" herausgeschnitten, im letzten Würfel sogar drei solcher „Tunnel". Wie groß sind die Volumina der drei Quader? (gefunden: Ch. Sievert)



III. Folgen

Es sei a_1, a_2, a_3, … eine arithmetische Folge, das heißt, es gelte $a_{j+1} = a_j + d$ für alle $j = 1, 2, 3, ...$ und ein $d > 0$.

a) Gibt es eine solche Folge mit $a_n = n$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$?

b) Gibt es eine solche Folge mit $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2$ für alle n? (WJB)

IV. Punkte-Verteilung in Halbebenen

In der Ebene seien 2000 Punkte markiert. Begründe: Man kann dann stets eine Gerade finden, die durch keinen dieser Punkte verläuft, sodass in jeder von der Geraden erzeugten Halbebene 1000 Punkte liegen. (H.F.)

V. Geburtsdatum

Die beiden Zwillinge Laura und Laurenz haben das folgende Gespräch. Laurenz: „Vorgestern waren wir noch 15." Laura: „Stimmt, und nächstes Jahr werden wir volljährig." Laurenz: „Das stimmt auch." Das Gespräch fand in diesem Jahr statt. Wann sind die Zwillinge geboren? (WJB)

VI. Summe und Produkt

Zeige: Die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist nicht durch 4 teilbar, aber ihr Produkt ist durch 8 teilbar. (H.F.)

VII. Zehn Teiler

Bestimme alle Zahlen kleiner 100, die genau zehn Teiler haben. (K.G.)

Hinweis: Was hat die Primfaktorzerlegung mit den Teilern einer Zahl zu tun?

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1155: Lösbar oder nicht?

Entscheide, ob die Gleichung

(1) $x + y + x \cdot y = 2016$

eine positive ganzzahlige Lösung besitzt oder nicht. (H.F.)

Aufgabe 1156: Potenzturm

Für $n = 1, 2, 3, ...$ und eine natürliche Zahl $k > 1$ definieren wir einen Potenzturm durch: $k \wedge 1 = k$ und $k \wedge n = k^{k \wedge (n-1)}$, $n > 1$. So ist etwa $k \wedge 3 = k^{k^k}$ ein Potenzturm mit drei „Etagen". Es sei nun T_{2016} der Potenzturm $\sqrt[2016]{2016} \wedge 2016$ mit 2016 Etagen. Welche Zahl ist dann größer: T_{2016} oder 2016? (H.F.)

Aufgabe 1157: Zündholzschachtel

Sonia misst zwei Diagonalen von Seiten einer Zündholzschachtel: $x = 4$cm, $y = 5$cm. Sie schätzt die dritte Diagonale auf 7cm. Ihre Freundin Kirsten denkt kurz nach und sagt dann: „Nein, die dritte Diagonale ist kürzer." Zeige, dass Kirsten recht hat! (WJB)

Aufgabe 1158: Verdopplung einer Kreisscheibe

Konstruiere zu einem Kreis K_1 mit beliebigem Radius r_1 einen Kreis K_2 mit dem doppelten Flächeninhalt.

In welchem Verhältnis stehen die Umfänge der beiden Kreise? (AK)

Aufgabe 1159: Skilifte

In einem Skigebiet gibt es zwischen den Stationen A, B und C jeweils mehrere Skilifte. Diese führen entweder mit einmaligem Umsteigen an einer der Stationen A, B, C oder ohne Umsteigen unmittelbar von einer Station zu einer anderen Station.

Es gibt zehn Möglichkeiten, um von A nach B, 14 Möglichkeiten, um von B nach C und weniger als zwölf Möglichkeiten, um von C nach A zu gelangen. Wie viele Lifte gibt es insgesamt? (H.F.)

Aufgabe 1160: Zahlen zur Basis n

Eine Zahl sei im System mit der Basis n dreistellig: $(xyz)_n$.

a) Was wissen wir über x, y, z und n, wenn $(xyz)_n = (n+1)^2$?

b) Es sei $n = 5$. Bestimme die Lösung von $(xyz)_n = (n+2)^2$! (WJB)

Aufgabe 1161: Mädchen oder Junge?

In einer Klinik wurden im März 2016 23 Kinder geboren (darunter keine Zwillinge). Unter der (näherungsweise richtigen) Annahme, dass ein Neugeborenes mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein Mädchen oder ein Junge ist,

a) berechne die Wahrscheinlichkeit, dass 10 Jungen und 13 Mädchen geboren wurden.

b) Finde ein Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit gleich

$$\binom{12}{4}\binom{11}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{23}$$

ist.

c) Wenn Du b) gelöst hast, bist Du auch in der Lage, ohne Rechnung zu begründen, dass

$$\sum_{j=0}^{10}\binom{12}{j}\binom{11}{10-j}=\binom{23}{10}.$$

Gib diese Begründung! (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 125

Klassen 9–13

Aufgabe 1148: Größenvergleiche

Welche Zahl ist größer?

a) $(2015!)^{2016}$ oder $(2016!)^{2015}$?

b) $\sqrt[2015]{2015!}$ oder $\sqrt[2016]{2016!}$? (H.F.)

Hinweis: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ mit $1! = 1$; die Zahl 2015! ist von der Größenordnung 10^{5783}.

Lösung:

a) Aus $n! < (n+1)(n+1)\ldots(n+1) = (n+1)^n$ folgt nach Multiplikation mit $(n!)^n$, dass

$(*)\quad (n!)^{n+1} < (n!)^n\cdot(n+1)^n = ((n+1)!)^n.$

Mit $n = 2015$ folgt $(2015!)^{2016} < (2016!)^{2015}$.

b) Erhebt man die Zahlen aus $(*)$ in die $\frac{1}{n(n+1)}$-te Potenz, so gilt

$$(n!)^{\frac{1}{n}} < ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Mit $n = 2015$ folgt daraus: $\sqrt[2015]{2015!} < \sqrt[2016]{2016!}$.

Aufgabe 1149: Die Summe 2016

Man addiere die aufeinander folgenden Zahlen 1, 2, 3, $\ldots$ n.

Wie groß ist n zu wählen, damit die Summe dieser Zahlen ≥ 2016 ist? (H.F.)

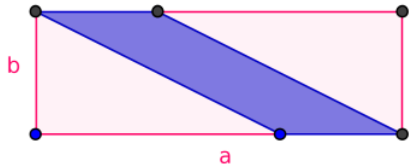
Lösung:

Es ist $S = 1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Dann ist $S \geq 2016$, wenn gilt: $\frac{1}{2}n(n+1) \geq 2016$ oder $n^2 + n \geq 4032$. Nun ist $n^2 + n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Also soll gelten: $(n + \frac{1}{2})^2 \geq 4032 + \frac{1}{4}$. Das ist der Fall, wenn $n + \frac{1}{2} \geq 63{,}5$, also wenn $n = 63$ gewählt wird. Dann ist $S \geq 2016$.

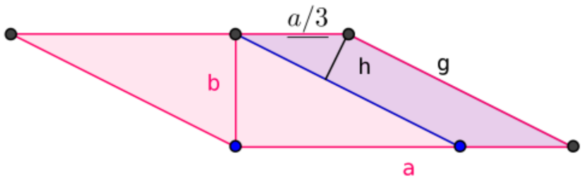
Aufgabe 1150: Abstand zweier Parallelen

Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b wird wie nebenstehend durch zwei Parallenen in drei flächengleiche Teile zerlegt. Welchen Abstand haben die beiden Parallelen voneinander? (H.F.)



Lösung:

Wir überlegen uns zunächst die Breite des Streifens, das heißt die Länge der Seite des Parallelogramms, die auf a liegt. Durch Scherung und unter Verwendung der Bedingung, dass der Flächeninhalt des Streifens ein Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks ist, sehen wir, dass der Streifen eine Breite von $\frac{1}{3}a$ hat.



Wir bezeichnen die andere Seite des Streifenparallelogramms mit g. Dann können wir den Flächeninhalt A des Streifenparallelogramms auf zwei Arten berechnen: $A = \frac{a \cdot b}{3}$ und $A = g \cdot h$, wobei h der gesuchte Abstand der Parallelen ist.

Nach dem Satz des Pythagoras ist $g = \sqrt{(\frac{2}{3}a)^2 + b^2}$. Folglich ist der Abstand der Parallelen $h = \frac{A}{g} = \frac{ab}{3\sqrt{(\frac{2}{3}a)^2 + (b)^2}} = \frac{ab}{\sqrt{(2a)^2 + (3b)^2}}$.

Aufgabe 1151: Pythagoreisches Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck seien die Katheten von ganzzahliger Länge und die Länge seines Umfangs und der Inhalt seiner Fläche seien gleich groß. Wie lang sind dann die Seiten des Dreiecks? (H.F.)

Lösung:

Mit a, b seien die Längen der Katheten und mit c die Länge der Hypotenuse bezeichnet.

Dann hat das Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}ab$ und nach Voraussetzung gilt:

(1) $a + b + c = \frac{1}{2}ab$.

Nach dem Satz des Pythagoras ist $c^2 = a^2 + b^2$. Damit folgt aus (1): $c^2 = (\frac{1}{2}ab - a - b)^2$ oder $4c^2 = 4(a^2 + b^2) = (ab - 2a - 2b)^2$, also $0 = a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab$. Somit ist nach Division durch ab: $0 = ab - 4a - 4b + 8$ und daher: $8 = (a-4)(b-4)$. Weil $a - 4$ und $b - 4$ ganzzahlige Teiler von 8 sind, gilt:

$a-4$	1	2	4	8
$b-4$	8	4	2	1

a	5	6	8	12
b	12	8	6	5
c	13	10	10	13

Daher sind die Seiten des Dreiecks entweder 5, 12 und 13 oder 6, 8 und 10 lang.

Aufgabe 1152: Zahlenspiel

Während einer langen Bahnfahrt vertreibt sich Mathis die Zeit mit einem Zahlenspiel. Er wählt eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ und verändert sie nach der folgenden Regel:

> Streiche die Einerziffer e von n_0 und addiere $3e$ zu der verkürzten Zahl – das Ergebnis sei die Zahl n_1. Verändere dann n_1 nach der gleichen Regel zu n_2 und so weiter, solange bis zwei übereinstimmende Zahlen n_i, n_{i+1} aufeinander folgen. Damit ist das Spiel zu Ende.
> Beispiel: $n_0 = 21 \to n_1 = 2 + 3 \cdot 1 = 5 \to n_2 = 0 + 3 \cdot 5 = 15 \to ...$

Nach einigen Spielen bemerkt Mathis, dass die meisten Spiele nicht enden.

a) Zeige, dass es Spiele gibt, die enden. Gib die möglichen Endzahlen an!

b) Zeige, dass die Spiele, die nicht enden, in einen Zyklus führen, das heißt in eine sich periodisch wiederholende Folge. Was kannst Du über die möglichen Zyklen aussagen! (H.F.)

Lösung:

a) Es sei n eine natürliche Zahl ≥ 1, $n = x \cdot 10 + y$ mit $x \geq 0$ und $0 \leq y \leq 9$ und x und y nicht beide 0. Dann gilt nach der Spielregel: $n = x \cdot 10 + y \to m = x + 3y$. Mathis' Spiel ist zu Ende, wenn $n = m$ ist, wenn also $10x + y = x + 3y$ und daher $9x = 2y$ eintritt. Wegen $y \leq 9$ ist das nur für $x = 2$ und $y = 9$ der Fall. Jedes Spiel, das endet, hat die Endzahl 29.

b) Wir zeigen nun, dass es abbrechende und nicht-abbrechende Spiele gibt. Wieder seien $n = x \cdot 10 + y$ und $m = x + 3y$ wie oben. Zunächst gilt:

   1. Für $n > 29$ ist $n > m$. Denn wegen $n > 29$ ist $x \geq 3$ und mit $y \leq 9$ gilt $9x \geq 9 \cdot 3 = 27 > 18 = 2 \cdot 9 \geq 2y$, also ist $9x - 2y > 0$. Damit folgt $n = 10x + y = x + 3y + 9x - 2y > x + 3y = m$.
   2. Für $n = 29$ ist $n = m$, denn $m = 2 + 3 \cdot 9 = 29 = n$ (vgl. oben).
   3. Für $n < 29$ ist $m \leq 29$. Denn aus $n < 29$ folgt $x \leq 2$ und daher ist $m = x + 3y \leq 2 + 3 \cdot 9 = 29$.

   Es sei nun $F: n_0, n_1, n_2, ...$ die bei einem Spiel mit beliebiger Startzahl $n_0 \geq 1$ auftretende Zahlenfolge.

Ist die Startzahl $n_0 > 29$, dann gilt $n_0 > n_1$ nach 1.; ist auch $n_1 > 29$, dann ist $n_1 > n_2$ usw. Es gibt demnach eine letzte Zahl n_{i-1} in F, sodass $n_{i-1} > 29$ und $n_i \leq 29$ ist.
Falls $n_i = 29$ ist, dann ist das Spiel wegen 2. zu Ende.
Ist aber $n_i < 29$, dann sind nach 3. alle auf n_i folgenden Glieder von F in der Menge $\{1, 2, \ldots, 28\}$, denn $n_{i+1} = 10x + y$ mit $x \leq 2$ und $y \leq 8$, sodass $n_{i+1} \leq 28$ ist.
Wenn man mit $n_0 = 1$ startet, kommt man nach 28 Schritten wieder auf die 1 (aber nicht vorher). Das heißt, man durchläuft alle Zahlen von 1 bis 28 genau ein Mal. Also führt von jeder Zahl ≤ 28 aus das Spiel auf die Zahl 1 und von 1 ab verläuft das Spiel zyklisch und zwar im Zyklus

$$1 \to 3 \to 9 \to 27 \to \ldots \to 1.$$

Insgesamt gilt also: Jedes Spiel endet mit der Zahl 29 oder es führt in einen mit 1 beginnenden Zyklus.

Aufgabe 1153: Würfeln

a) Nach wie vielen Würfen mit einem sechsseitigen Spielwürfel kann man sicher sein, dass sich eine Zahl mindestens einmal wiederholt hat?

Wirf einen Würfel n-mal, wobei n die Zahl ist, die Du in a) bestimmt hast.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint beim letzten Wurf zum ersten mal die Sechs?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiederholt sich beim letzten Wurf zum ersten Mal eine der vorher geworfenen Zahlen? (WJB)

Lösung:

a) Man kann nicht mehr als sechs verschiedene Zahlen werfen. Daher muss sich beim siebten Wurf oder früher eine vorher geworfene Zahl wiederholen.
b) Unter den $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$ möglichen Ausgängen dieses Experiments gehören 5^6 zu dem beschriebenen Ereignis. Dessen Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{5^6}{6^7} \approx 0{,}0056$.
c) Dazu müssen die ersten sechs Würfe verschiedene Ergebnisse liefern. Für den siebten Wurf haben wir jetzt sechs Möglichkeiten. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{6! \cdot 6}{6^7} = \frac{5!}{6^5} \approx 0{,}015$.

Aufgabe 1154: Durch 2016 teilbar?

Trifft es zu, dass für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $S_n = 12127^n - 2345^n + 329^n - 31^n$ ohne Rest durch 2016 teilbar ist? (H.F.)

Lösung:
Vorweg: Für reelle Zahlen a, b gilt

(1) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1})$.

Nun sei $S_n = x - y$ mit $x = 12127^n - 31^n$ und $y = 2345^n - 329^n$. Wegen (1) ist x durch $12127 - 31 = 6 \cdot 2016$ teilbar und y durch $2345 - 329 = 2016$ teilbar. Daraus folgt, dass auch $S_n = x - y$ durch 2016 teilbar ist.

$\frac{\pi^2}{6}$

von Hans-Jürgen Schuh

Nicole Oresme (um 1323-1382) hat als erster gezeigt, dass die harmonische Reihe divergiert, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

Pietro Mengoli (1625–1686) hat die verwandte Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ untersucht und mit einer ähnlichen Methode wie Oresme um 1650 gezeigt, dass diese Reihe konvergiert und ihr Reihenwert $\beta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2$.

Allerdings gelang es ihm und einer ganzen Reihe bedeutender Mathematiker fast 90 Jahre lang nicht, den exakten Wert β zu bestimmen. An dieser erfolglosen Suche waren auch die Bernoullis aus der berühmten Basler Mathematikerfamilie intensiv beteiligt. Jakob Bernoulli (1654-1705) beschrieb dieses ungelöste Problem in seinem 1680 in Basel erschienenen Buch und bat: „Falls jemand die Lösung findet, dann wären wir für eine diesbezügliche Mitteilung äußerst dankbar.“ Danach ist die Suche nach β als das Basler Problem in die Geschichte der Mathematik eingegangen.

Leonhard Euler (1707–1783), ein Student von Johann Bernoulli (1667–1748), hat 1735 den exakten Wert von β gefunden und ihn als $\frac{\pi^2}{6}$ mitgeteilt, was ihn fast über Nacht weltberühmt gemacht hat. Dem gingen jedoch raffinierte numerische Berechnungen voraus.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ konvergiert sehr langsam und eignet sich deshalb nicht zur näherungsweisen Berechnung von β. Mit Hilfe einer Integraldarstellung dieser Reihe hat Euler eine schnell konvergierende Reihe mit demselben Reihenwert β gefunden, bei der er zur Approximation auf sechs Stellen hinter dem Komma nur 14 Reihenglieder (anstelle von etwa 1.000.000) benötigte. Aufgrund seiner großen Erfahrung im numerischen Rechnen hat Euler das Ergebnis 1,644934... als den Beginn der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{\pi^2}{6}$ erkannt.

Wegen des Auftretens von π hat Euler sein Augenmerk auf die Winkelfunktionen gerichtet.

$\text{si}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ mit $\text{si}(0) = 1$, da $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Euler überlegte sich nun folgendes:

Betrachtet man ein Polynom $p(x)$ n-ten Grades mit konstantem Glied 1, das heißt $p(0) = 1$, dessen Nullstellen $x_1, \; x_2, \; \dots, \; x_n$ bekannt sind, so folgt aus dem Satz von Vieta (1540–1603), dass $p(x) = (1 - \frac{x}{x_1}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{x}{x_n})$.

Da $\text{si}(x) = 1$ und $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... genau die Nullstellen von $\text{si}(x)$ sind, sollte

(a) $\text{si}(x) = (1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi}) \cdot \dots = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \cdot \dots$
$= \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2})$ gelten.

Dies konnte zur damaligen Zeit noch nicht bewiesen werden, und es hat noch etwa 100 Jahre gedauert, bis der Produktsatz von Weierstraß (1815–1897) dieses Vorgehen gerechtfertigt hat.

Die Taylorentwicklung von $\sin(x)$ ergibt

(b) $\text{si}(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \pm \dots$.

Vergleicht man nun die Koeffizienten von x^2 in (a) und (b), so ergibt sich:

$-(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$, oder

$\frac{1}{\pi^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}$, das heißt $\beta = \frac{\pi^2}{6}$.

Euler war aufgrund dieser Überlegungen und weiterer numerischer Berechnungen überzeugt, dass er β gefunden hatte. Er konnte erst 1741 einen für die damalige Zeit lückenlosen Beweis vorlegen.

Für weiteres Material zum Basler Problem sei auf folgende Artikel verwiesen:

- H. Fuchs, „Was ist das Basler Problem?“, Monoid 94 (Juni 2008).
- H.-J. Schuh, „Harmonische Reihen“, Monoid 122 (Juni 2015).
- W. Gautschi, „Leonhard Eulers Umgang mit langsam konvergierenden Reihen“, Elem. Math. 62 (2007), 1-10, Swiss Mathematical Society.
- C. Dianopoulos et al., „Basel Problem Proof“, `http://www.academia.edu/3669174/Basel_Problem_Proof`.

Inzwischen existieren verschiedene Beweise für die Lösung des Basler Problems. Viele davon benötigen Methoden der höheren Mathematik, wie die Integralrechnung oder die Funktionentheorie. Es gibt aber auch einige elementare Beweise, die ohne all dies auskommen.

Im Folgenden wird ein solcher vorgestellt. Er gibt die Beweisidee wieder, welche Josef Hofbauer unter dem Titel

„A simple proof of $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ and Related Identities“

im Monthly 109 (2002), 196-200, der Mathematical Association of America veröffentlicht hat.

Man benötigt lediglich folgende drei Lemmata:

Lemma 1:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)}\right).$$

Beweis:

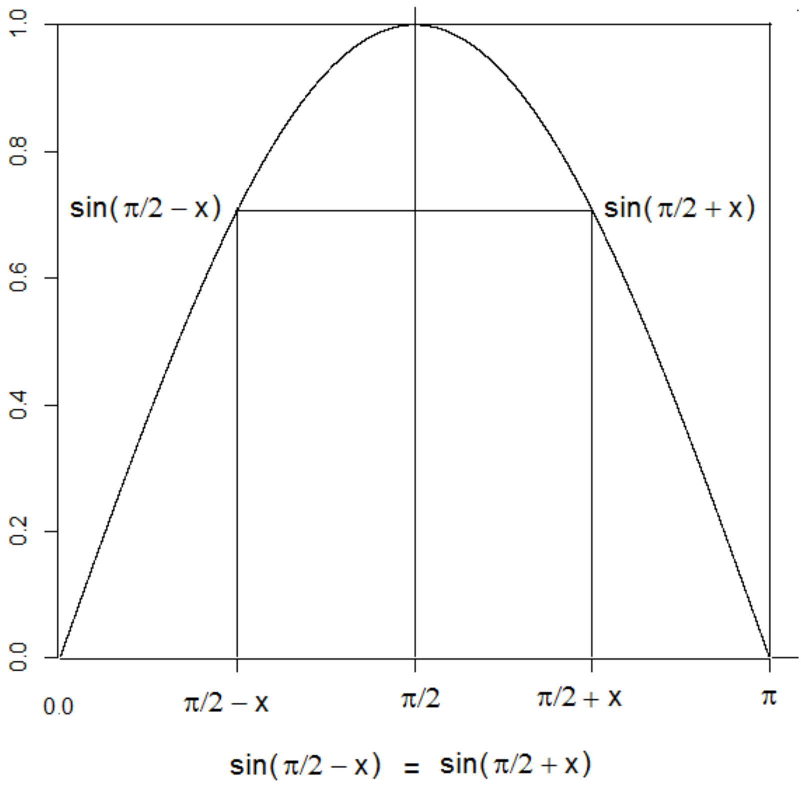
$$\sin x = 2 \cdot \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2 \cdot \sin\frac{x}{2}\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2})}\right)$$

Lemma 2:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Beweis: Betrachte folgende Figur:

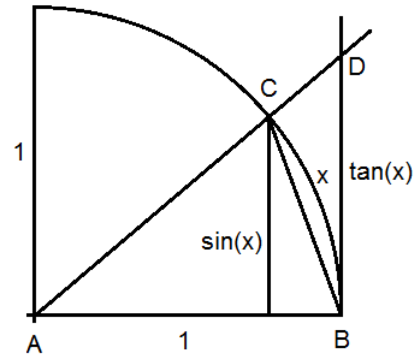


Lemma 3: $\sin x \leq x \leq \tan x$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und daher für $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{\sin^2 x} \geq \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

(Außerdem: $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \xrightarrow{x \to 0} 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.)

Beweis:



Aus der nebenstehenden Figur ergibt sich: Fläche des Dreiecks $\triangle ABC \leq$ Fläche des Sektors ABC $\leq$ Fläche des Dreiecks $\triangle ABD$. $\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x \Rightarrow$ Behauptung.

Nun zur elementaren Lösung des Basler Problems:

Satz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis:

(O1) Betrachte Lemma 1 für $x = \frac{\pi}{2}$ und wende dann dieses Lemma iteriert an:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2(\frac{3\pi}{4})}\right) = \dots \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2(\frac{3\pi}{8})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{5\pi}{8})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{7\pi}{8})}\right) \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} + \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2^n+2k+1)\pi}{2^{n+1}}}
\end{aligned}$$

Wegen spiegelgleicher Summanden erhält man:

$$1 = \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}.$$

Mit Lemma 2 ergibt sich für $N = 2^n$:

$$1 = \frac{2}{N^2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2N}}.$$

(O2) Mit Lemma 3 erhält man:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{2}{N^2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2N}} \geq \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
&\geq \frac{2}{N^2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2N}} - 1 \right) \\
&= \frac{2}{N^2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2N}} \right) - \frac{2}{N^2} \cdot \frac{N}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \to \infty} 1.
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(O3) Nun ergibt sich:

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\beta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}\beta = \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \beta = \frac{\pi^2}{6}.$$

Der Fall $\frac{\pi^2}{6}$ – noch einmal aufgerollt

von Hartwig Fuchs

Im 18. Jahrhundert war die Mathematik bei weitem nicht so exakt, wie wir sie heute kennen.

Man hat damals noch vieles, was man als „offensichtlich“ ansah, für wahr gehalten und daher ohne Bedenken verwendet. Für diese Vorgehensweise finden sich viele Belege in den mathematischen Arbeiten jener Zeit, sogar auch in dem enorm umfangreichen Oeuvre von Leonhard Euler (1707 – 1793), des produktivsten und einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Epoche.

Euler hat viel mit Reihen gearbeitet und dabei oft Eigenschaften einer endlichen Reihe einfach auf unendliche Reihen übertragen. Ein schönes Beispiel hierfür liefert sein „Beweis“ der Aussage:

(1) Es gilt: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$.

Grundlage für Eulers „Herleitung" von (1) ist der ihm bekannte Satz:

Die Nullstellen des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x^2 + x_2x^2 + ... + a_nx^n$, $a_0 \neq 0$, seien die reellen Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_n$, die sämtlich $\neq 0$ seien. Dann gilt:

(2) $-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + ... + \frac{1}{r_n}$.

Euler war wohl überzeugt: Auch bestimmten unendlichen Polynomen (sogenannten Reihen) kommt die Eigenschaft (2) zu. Dies vorausgesetzt gelang ihm ein „Beweis" von (1) mit der Reihe

(3) $p(x) = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + ...$[1] (wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ ist),

deren Nullstellen er sämtlich bestimmen konnte.

Für $x < 0$ hat $p(x)$ keine Nullstellen, denn dann sind alle Reihenglieder positiv; für $x = 0$ ist $p(0) = 1 \neq 0$.

Es bleibt der Fall $x > 0$, den Euler auf geniale Weise löste.

Aus der ihm bekannten Reihenentwicklung von $\sin x$, nämlich

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

leitete er durch Ersetzung von x durch $\sqrt{x}$ und anschließender Division durch $\sqrt{x}$ eine Darstellung von $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$ her,

(4) $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + ..., x > 0$,

wobei die rechte Seite von (4) das oben als $p(x)$ bezeichnete unendliche Polynom mit $x > 0$ darstellt.

Da $\sin x$ die Nullstellen $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ besitzt, hat $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, und damit $p(x)$ mit $x > 0$, die Nullstellen $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots$ und diese Nullstellen sind sämtlich von 0 verschieden.

Nach Euler folgt dann aus der auf unendliche Polynome übertragene Aussage (2) für $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{-1}{6}$:

$$-\left(\frac{-\frac{1}{6}}{1}\right) = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ... ,$$

woraus sich nach wenigen Umformungen (1) ergibt.

Diese Herleitung von (1) hat Euler wohl selbst nicht als hinreichend streng erachtet, denn er hat (1) noch mehrfach auf anderen Wegen bewiesen.

[1] Für Eingeweihte: Für $x < 0$ ist die Reihe (3) die Funktion $\frac{sinh(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

„WG-CRAPS“

„WG-CRAPS“ ist eine Variante des Spiels „CRAPS“ mit folgenden Spielregeln: Ein Spieler würfelt mit zwei idealen Würfeln. Wirft der Spieler im ersten Wurf die Augensumme 7 oder 4, so gewinnt er sofort. Wirft er 2, 11 oder 12, so ist dies ein „Crap“ und er verliert sofort. Wirft er eine der Augensummen 3, 5, 6, 8, 9 oder 10, so ist die Augensumme sein „Point“ und er würfelt ein weiteres Mal. Ab dem zweiten Wurf gilt nun: Wirft der Spieler seinen „Point“, so gewinnt er. Wirft er die Augensumme 7, so verliert er. Wirft er irgendeine andere Augensumme, so würfelt er erneut.

Zeige mit einem Simulationsprogramm und einem geeigneten Konfidenz-Intervall, dass „WG-CRAPS“ (im Gegensatz zum „Original-CRAPS“) fair ist! Dabei nennen wir ein Spiel fair (aus Sicht des Spielers), wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit $\geq$ 50% ist. Die Anzahl der Spiele und das Signifikanz-Niveau wählst Du selbst!(W.G.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2016 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 124

Eine veränderte Collatz-Folge

Was bewirkt eine scheinbar unwesentliche Veränderung in der Aufgabe aus den mathematischen Entdeckungen in Heft Monoid 124, wenn man die Fälle $n = 3k + 1$ und $n = 3k + 2$ vertauscht. Wir nennen die veränderte Funktion $dx(n)$. Diese sei definiert als:

$$dx(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & \text{wenn } n = 3k \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n-1, & \text{wenn } n = 3k+1 \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n+1, & \text{wenn } n = 3k+2 \text{ für eine natürliche Zahl } k \end{cases}$$

Schreibe ein Computerprogramm, mit dessen Ergebnissen Du eine Vermutung formulieren kannst.

Ein theoretischer Beweis Deiner Vermutung gibt Zusatzpunkte! (W.G.)

Ergebnisse

Ein Computerprogramm erzeuge, mit einer natürlichen Startzahl s beginnend, die $M+1$ Folgenglieder $dx(s)$, $dx(s+1)$, $\ldots$, $dx(s+M)$. Läßt man s die Zahlen von 1 bis 1000 durchlaufen, so kann man erkennen, dass die erzeugte Folge nur für $s = 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729$ usw. periodisch wird; dabei endet sie immer bei 1. Für andere Startzahlen erhält man erst mal keine Periode; dies könnte allerdings daran liegen, dass man eine zu kleine maximale Iterations-Schrittzahl M gewählt hat. Um andere Start-Zahlen als die oben angegebenen für Periodizität auszuschließen, könnte man M höher ansetzen; dabei ist man sich aber nie sicher, dass Startzahlen, die keine Periode liefern, bei noch größerem M nicht doch noch zu einer Periode führen; ein Dilemma, welches mit Simulationen nicht beseitigt werden kann. Bei solchen Programmen muss nämlich M immer endlich gewählt werden, da ansonsten Endlos-Schleifen auftreten könnten, was für den Nutzer verheerende Auswirkungen hätte. Es ist ein strenger theoretischer Beweis unumgänglich. Dies zeigt auf einfache Weise die Grenzen des Computereinsatzes bei mathematischen Problemen.

Theoretischer Beweis:

1. Fall: $n = 3k$, das heißt $dx(n) = k$. Je nachdem, welches k entsteht, geht es danach mit Fall 1, 2 oder 3 weiter. Sollte nur der Fall 1 wiederholt auftreten, so muss k eine Dreierpotenz sein (und n auch), und die Folge wird periodisch mit Gliedern $\ldots$, 9, 3, 1. Wegen Fall 2 kommt dann die Periode 1, 1, 1, $\ldots$.
2. Fall: $n = 3k+1$, also $dx(n) = 6k+1$, $dx^2(n) = 12k+1$ und danach ständig weiter mit Fall 2, wobei die Folgenglieder für $k > 0$ immer größer werden (keine Periode!), während für $k = 0$ und $n = 1$ die Folge bei 1 stehen bleibt (siehe Fall 1).
3. Fall: $n = 3k+2$, also $dx(n) = 6k+5 = 3(2k+1)+2$, also Fall 3 und $dx^2(n) = 12k+11$, also fortlaufend Fall 3. Die Folge wächst mit jedem Schritt auf mehr als das Doppelte.

Die Folge dx kann also nur periodisch sein, wenn allein der Fall 1 beim Iterieren auftritt, also n die Form $3^a \cdot b$ hat, wobei 3 kein Teiler von b sein soll. Nach a Schritten erhält man dann $dx^a(n) = b$. Falls $b > 1$ ist, erhält man Fall 2 oder 3 und Divergenz, während sich für $b = 1$ der Fall 1 ergibt. Dies ist bei Startzahlen so, die Dreierpotenzen sind, ansonsten wächst dx über alle Grenzen. *dx ist bei 3er-Potenzen als Startzahl periodisch, sonst nicht.*

Dies haben auch die Schüler Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, Silas Rathke von der Alexander-von-Humboldt-Schule in Neumünster, Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey und Maximilian Göbel vom Gymnasium Oberursel herausgefunden.

Die besondere Aufgabe
Die Fläche eines Zwölfecks

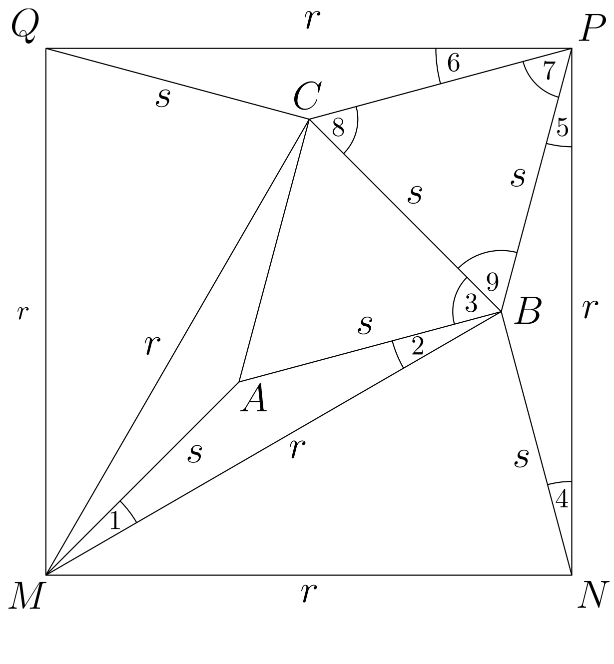
von Hartwig Fuchs

Für ein regelmäßiges Zwölfeck mit dem Mittelpunkt M und dem halben Durchmesser r gilt:

(1) Wenn $r = 1$ ist, dann hat das Zwölfeck die Fläche 3.

Die Behauptung (1) wollen wir nun ohne nennenswerten rechnerischen Aufwand und insbesondere ohne den Satz von Pythagoras beweisen.

Es seien $\triangle MNB$, $\triangle MBC$ und $\triangle MCQ$ drei benachbarte Teildrecke des Zwölfecks, um die wie in der Figur ein Quadrat der Seitenlänge r konstruiert sei. Das mittlere Dreieck $\triangle MBC$ zerlegen wir in drei Dreiecke, indem wir auf seiner Winkelhalbierenden des Winkels bei M den Punkt A so bestimmen, dass das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist. Ferner sei das Dreieck $\triangle PCB$ in die Figur gezeichnet.



Dann gilt:

(2) Die Dreiecke $\triangle BAM$ und $\triangle BNP$ sind kongruent.

Sie stimmen nämlich in zwei Seiten und dem jeweils eingeschlossenen Winkeln $\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 4$ überein:

Zunächst ist $|BM| = |NP| = r$ und $|BA| = |NB| = s$. Wegen $|\sphericalangle CMB| = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ ist $|\sphericalangle 1| = 15^\circ$ und $|\sphericalangle MBC| = 75^\circ$. Also ist $|\sphericalangle 2| = 75^\circ - |\sphericalangle 3| = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$. Aus $|\sphericalangle MNB| = 75^\circ$ ergibt sich $|\sphericalangle 4| = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Aus Symmetriegründen gilt auch:

(3) Die Dreiecke $\triangle CMA$ und $\triangle CPQ$ sind kongruent.

Wir zeigen noch:

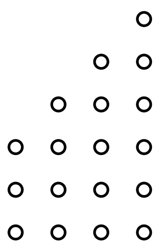
(4) Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BPC$ sind kongruent.

Zunächst ist das Dreieck $\triangle BPC$ symmetrisch zur Diagonalen MP des Quadrats $MNPQ$, sodass $|PB| = |PC|$ ist.
Weiter ist $|\sphericalangle 7| = 90^\circ - |\sphericalangle 5| - |\sphericalangle 6| = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ$, also auch $|\sphericalangle 8| = |\sphericalangle 9| = 60^\circ$. Die gleichseitigen Dreiecke $\triangle BPC$ und $\triangle BCA$ stimmen in der Seite BC überein – mithin gilt (4).

Aus (2), (3) und (4) folgt: $|MBC| = |BNP| + |BPC| + |CPQ|$. Weil daher $|MBC| = \frac{1}{4}|MNPQ| = \frac{1}{4}r^2$ ist, folgt: $|MNB \cup MBC \cup MCQ| = \frac{3}{4}r^2$. Das regelmäßige Zwölfeck hat somit die Fläche $4 \cdot \frac{3}{4}r^2 = 3r^2$.
Setzt man hier $r = 1$, so erhält man: Die Behauptung (1) trifft zu.

Mathematische Entdeckungen

Treppenzahlen



Aus Münzen lassen sich Treppen bauen, siehe zum Beispiel die nebenstehende Abbildung für 18 Münzen mit vier Stufen. Die Anzahl der Stufen soll dabei mindestens zwei betragen. Untersuche nun:

a) Welche Zahlen sind Treppenzahlen?

b) Wie viele verschiedene Treppen kann ich mit einer gegebenen Zahl bauen?

(C. H.-A.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 31. August 2016 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 124

In Heft 124 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Die Collatz-Folge

Die sogenannte Collatz-Folge $d(n)$ ist für natürliche Zahlen n definiert als:

$$d(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & \text{wenn } n = 3k \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n+1, & \text{wenn } n = 3k+1 \text{ für eine natürliche Zahl } k \\ 2n-1, & \text{wenn } n = 3k+2 \text{ für eine natürliche Zahl } k \end{cases}$$

Zeige, dass die Funktion d für jede natürliche Startzahl n eine periodische Folge erzeugt! (H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich Maximilian Hauck, 7-te Klasse des Elisabeth-Langgässer-Gymnasiums Alzey, Silas Rathke, 11-te Klasse, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium Neumünster, und Adriana Stenger, 12-te Klasse, Karolinen-Gymnasium Frankenthal befasst.

Maximilian und Silas fand heraus:

Nach einer Zahl der Form $n = 3k + 1$ kommt in der Folge die Zahl $6k + 3$, woraufhin die Zahl $j = 2k + 1$ folgt.

Nach einer Zahl der Form $n = 3k + 2$ kommt die Zahl $6k + 3$, worauf die Zahl $j = 2k + 1$ folgt.

Nach einer Zahl der Form $n = 3k$ folgt $j = k$.

Man sieht, dass in jedem der drei Fälle $n \geq j$ gilt. Gleichheit gilt nur bei $k = 0$. Nun kann man $n' = j$ setzen und den Vorgang wiederholen, wodurch man ein noch kleineres j' in der Folge findet. Das kann man beliebig fortsetzen. Allerding erzeugt keine der drei Bildungsvorschriften eine nicht-positive Zahl, weswegen jedes Folgenglied mindestens 1 ist. Daher kann die Folge $j \geq j' \geq j'' \geq \ldots$ nicht streng monoton sein. Folglich muss mindestens einmal $k = 0$ gelten. Bei $n = 3k+1 = 1$ ergeben sich daraus die nächsten Folgenglieder 3, 1, welches sich dann periodisch wiederholt.

Sollte $n = 3k + 2 = 2$ sein, so ergeben sich ebenfalls die nächsten Folgenglieder 3, 1, was sich auch wieder periodisch wiederholt.

Der Fall $n = 3k = 0$ kann nicht existieren, da jedes Folgenglied positiv ist.

Insgesamt ist also die gegebene Collatz-Folge periodisch.

Erratum

In Monoid 124 wurde in der besondere Aufgabe „Pythagoreische Tripel“ (ab Seite 30) $(63, 16, 65)$ als Beispiel für ein pythagoreisches Tripel ($63^2 + 16^2 = 65^2$) angegeben, für das keine ganzzahligen k, m, n existieren würden mit :

$$63 = k(m^2 - n^2),\ 16 = 2kmn,\ 65 = k(m^2 + n^2).$$

Für $k = 1$, $m = 8$, $n = 1$ gilt aber:

$$63 = 8^2 - 1^2,\ 16 = 2 \cdot 8 \cdot 1,\ 65 = 8^2 + 1^2.$$

Im abgedruckten Beweis fehlt S.31, 6. Zeile von oben, die Zerlegung $65 = 1 + 64$. Die Redaktion bedankt sich sehr herzlich bei Herrn Frank Rehm, der uns auf den Fehler aufmerksam gemacht hat und entschuldigt sich bei allen Lösern!

Mitteilung

Die Monoid-Redaktion begrüßt ganz herzlich Frank Rehm als neues Mitglied in ihrer Runde! Herr Rehm war bis vor wenigen Monaten als Mathematiker bei SAP tätig und ist jetzt im Ruhestand.

Mainzer Mathe-Akademie
5. – 9. Oktober 2016

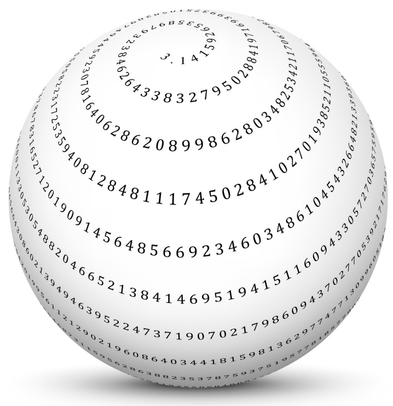
Bei der Mainzer Mathematik-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathematik-Akademie anzumelden, die vom 5.–9. Oktober an der Universität Mainz stattfindet.
Ein genauerer Terminplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben.

Kurse

- **Komplexe Zahlen** (Prof. Dr. Steffen Fröhlich)
  Jeder kennt natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen.
  Die Addition natürlicher Zahlen führt stets auf eine natürliche Zahl, die Subtraktion im Allgemeinen nicht. Subtraktion und Multiplikation lassen sich innerhalb der ganzen Zahlen ausführen, die Division hingegen nicht. Dazu benötigen wir die rationalen Zahlen. Und das Wurzelziehen ist in der Regel nur innerhalb der reellen Zahlen ausführbar - und auch nur solange der Radikant nichtnegativ ist.
  Genau an dieser Stelle bedienen wir uns der komplexen Zahlen: Sie ermöglichen uns eine vollständige Ausführbarkeit des Radizierens und damit z.B. das Lösen algebraischer Gleichungen zweiter, dritter oder höherer Ordnung, das Studium trigonometrischer Funktionen, die Bestimmung Pythagoreischer Tripel, die Konstruktion regelmäßiger n-Ecke auf dem Kreis usw.
  Dieser Kurs soll in die mathematische Theorie und Praxis der komplexen Zahlen einführen.

- π **kommt meistens unerwartet** (Akad. Rat Dr. Cynthia Hog-Angeloni, PD Dr. Margarita Kraus)

  Die meisten kennen die Kreiszahl π, also das Verhältnis eines Kreises zu seinem Durchmesser. Außerdem wissen viele, dass die Quadratur des Kreises nicht gelingen kann. Dass Leonhard Euler aber bereits 1763 eine geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) angegeben hat, die π beliebig gut approximiert, ist nicht jedem bekannt.

  Außerdem gelang es Euler, den Wert der unendlichen Summe $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ zu bestimmen, nämlich $\frac{\pi^2}{6}$, was fast 100 Jahre lang ein offen gebliebenes Problem war.
  Der Kehrwert dieser Zahl, also $\frac{6}{\pi^2}$, kann als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass eine rein zufällige Zahl n quadratfrei ist, oder, dass zwei Zufallszahlen teilerfremd sind.

- **Nichtlineare Schwingungen** (Prof. Dr. Alan Rendall)
  Im Alltag sehen wir oft Dinge, die nach einer bestimmten Zeit in ihren Anfangszustand zurückkehren und diesen Ablauf ständig wiederholen, zum Beispiel eine Schaukel. In diesem Fall reden wir von Schwingungen. Im einfachsten Fall kann man diese Schwingungen durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschreiben. Es gibt aber eine Vielfalt anderer Schwingungen. Die Größe, die sich dabei verändert, kann zum Beispiel der Strom in einem elektrischen Schaltkreis sein, die Population einer Tierart oder die Konzentration eines chemischen Stoffes. Mit Hilfe der Mathematik kann man verstehen, wann sich eine solche Schwingung aufbaut, wann sie gedämpft wird und wann sie eventuell durch unregelmäßige Schwankungen ersetzt wird. In diesem Kurs werden wir uns mit verschiedenen Beispielen von Schwingungen beschäftigen und mathematische Ideen kennenlernen, die zu einem Verständnis dieser Beispiele führen.

Unterbringung

Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie/`

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 124

Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg:
Kl. 5: Leonie Fischbach 4, Tobit Roth 15;
Kl. 11: Sven Pleger 6, Frauke Stoll 20.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Lukas Born 13, Lea Daum 30, Nils Koch 6, Paul Schall 5, Jonas Schneider 30, Victoria Strunck 11, Chiara Zimmermann 4;
Kl. 8: Torben Bürger 453, Virginia Fox 35, Maximilian Hauck 82, Sarah Kästner 42, Marcel Schneider 4, Rabea Zimmermann 18;
Kl. 12: Katharina Rößler 29.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 6: Vivian Marton 5, Olivia Stachow 10, Simon Taubert 8;
Kl. 8: Johan Hochbaum 5, Leonie Sophie Marton 7;
Kl. 9: Gina Bader 20;
Kl. 12: Adriana Stenger 27, Marcel Wittmann 43.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 10: Patrick Riebe 47.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 5: Aleksandra Herbst 36;
Kl. 8: Tobias Jedich 25.

Friedrichsdorf, Maint/Taunus International School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 3: Ben Bergmann 10, Mateo Dorsch 10, Frida Lunau 8, Keito Ogino 10, Tim Pilger 10, Sosan Rahman 8, Hannah Schnee 10;
Kl. 4: Atreyee Choudhury 10, Lina Decker 12, Ana Flores 12, Aditi Girish 8, Sven Reß 10;
Kl. 5: Mia Großkreutz 21, Jacob Huck 19;
Kl. 6: Aleksandra Burchala 19, Henri Lunau 21.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuender Lehrer: Herr Grasse):
Kl. 5: Louis Fritz 10, Mara Meurer 15, Justin Sehl 16, Alina Wick 15;
Kl. 6: Sebastian Braun 41;
Kl. 9: Melanie Schuy 28;
Kl. 10: David Storzer 67;

Kelkheim, Eichendorffschule: Kl. 8: Denis Mayle 53.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach: Kl. 8: Beatrice Popescu 10.

Linz, MartinusGymnasium: Kl. 5: Simon Waldek 9.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Lukas Bergholz 2, Vienna März 1, Sina Katharina Sturm 2, Ezgi Ugurlu 2, Koray Tasaroglu 2;
Kl. 11: Melanie Weibrich 18;
Kl. 13: Theresa Schöche 34.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium: Kl. 11: Silas Rathke 43.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium: Kl. 8: Sonja Kowallek 14.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 6: Paulina Herber 16, Josefine Kaßner 14;
Kl. 7: Sönke Schneider 57.
Kl. 9: Lara Braun 17, Maximilian Göbel 67, Philipp Karn 14, Fabian Leipach 45, Jara Müller-Kästner 14, Kristin Teichert 35;
Kl. 12: Yvonne Selig 17, Annika Teichert 19, Julia Theis 16;

Sankt Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:
Kl. 6: Laura Mai 3, Tobias Stiller 9.

Tangermünde, Diesterweggymanisum: Kl. 6: Miriam Büttner 39.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Lara Wilbert 6;
Kl. 6: Raphael Gaedtke 20.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium: Kl. 5: Mareike Bühler 14.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Verena Lucas, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Emily Searle-White
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 36 Heft 126 Juni 2016

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`