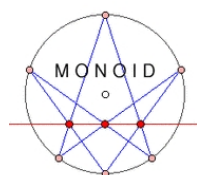
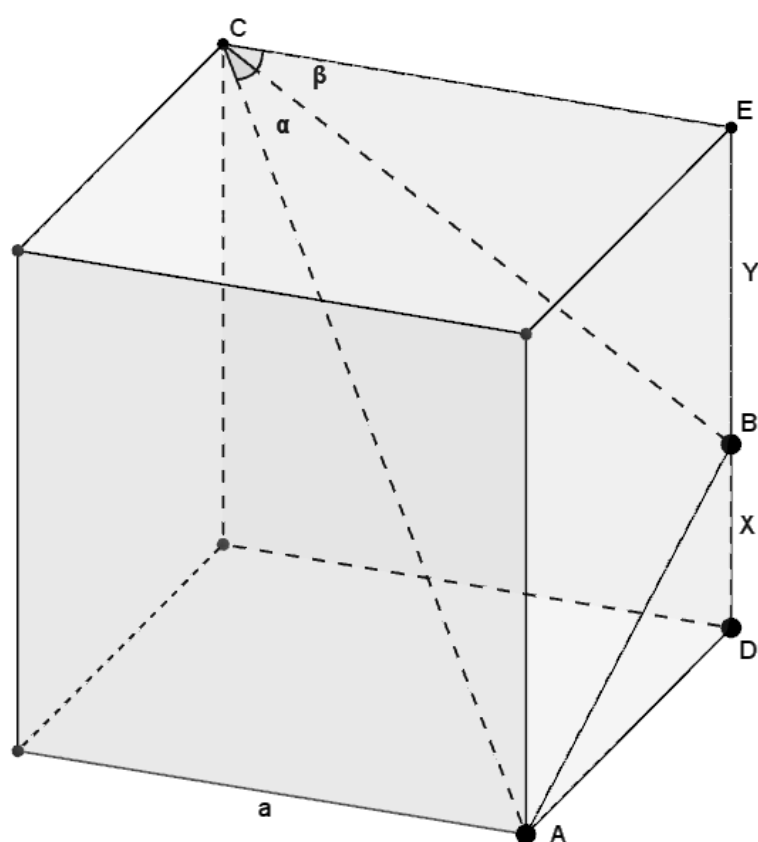


MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.02.2017.

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

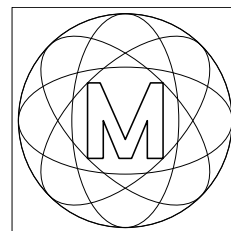
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Bericht zur Mainzer Mathe-Akademie 2016

von Verena Rüsing

Die diesjährige Mainzer Mathematik-Akademie an der Johannes Gutenberg Universität fand von Mittwoch, den 5. Oktober 2016 bis Sonntag, den 9. Oktober 2016 statt. Hierbei handelt es sich um eine Veranstaltung an der Universität in Mainz, an der jährlich 30 mathematikinteressierte Schüler aus ganz Deutschland teilnehmen können, welche durch studentische Helfer und zwei Lehrkräfte, Herrn Gruner und Herrn Mattheis, betreut werden. Es werden drei verschiedene Kurse angeboten und jeder Schüler entscheidet sich für einen. Die erarbeiteten Ergebnisse werden am letzten Tag den anderen Akademieteilnehmern präsentiert. Es nahmen auch zahlreiche Monoid-L(o)eser teil.

Die Teilnehmer waren, wie die vorherigen Jahre auch, im Jugendhaus Don Bosco untergebracht und wir hatten dort an den Abenden die Möglichkeit, uns kennenzulernen, gemeinsam Filme zu schauen oder auch etwas zu spielen.

Donnerstag bis Samstag ging es für uns an die Universität. Zu Beginn wurden die diesjährigen Kursthemen vorgestellt. Zur Auswahl standen: *Komplexe Zahlen* von Prof. Dr. Steffen Fröhlich, *Pi kommt häufig unerwartet* von Dr. Cynthia Hog-Angeloni und Dr. Margarita Kraus und *Nichtlineare Schwingungen*, angeboten von Prof. Dr. Alan Rendall. Nachdem sich jeder entschieden hatte, gingen wir gemeinsam mit den Kursleitern in die Kursräume und begannen, uns mit dem Thema unserer Wahl zu beschäftigen. Die Kurszeiten wurden durch einige Kaffeepausen unterbrochen, bei denen wir uns unter anderem mit den studentischen Helfern über ein Mathematikstudium oder auch das Leben an der Uni austauschen konnten.

Doch wir haben uns nicht den ganzen Tag mit dem mathematischen Thema auseinander gesetzt, sondern uns wurden auch andere Unternehmungen angeboten. So haben wir den botanischen Garten der Universität besucht, eine Führung über das ZDF-Gelände in Mainz mit anschließender Freizeit in der Stadt erhalten und im Theater *Das Käthchen von Heilbronn* gesehen. Samstags haben wir zudem gemeinsam Pizza gegessen und einen mathematischen Vortrag über *Invarianten*, gehalten von Prof. Dr. Manfred Lehn, gehört. Im Laufe der Zeit wurden wir zudem von diversen Teilnehmern früherer MMAs besucht.

Am Sonntag hatten wir dann alle die Möglichkeit, unsere neuen Erkenntnisse vorzustellen und den Teilnehmern aus anderen Kursen nahe zu bringen. Wir wurden in den vorhergegangenen Tagen nicht nur darin unterstützt, die Zusammenhänge unseres Themas zu verstehen, sondern auch darin, einen guten Vortrag zu halten. Danach ging es noch ein letztes Mal zum gemeinsamen Essen, bei dem alle die Möglichkeit hatten, sich von den anderen zu verabschieden.

Die Mainzer Mathematik-Akademie war für alle Teilnehmer eine tolle Erfahrung und wir hatten eine schöne Zeit. Sie ist auf jeden Fall für alle weiterzuempfehlen, die Freude an Mathematik haben und sich mal vier Tage gemeinsam mit anderen Interessierten mit einem mathematischen Thema auseinander setzen möchten.

Wir, die Teilnehmer der MMA, möchten uns im Namen aller Teilnehmer bei den Mitwirkenden und besonders bei den Organisatoren Herrn Mattheis und Herrn Gruner für die Mühe, uns eine schöne MMA zu machen, bedanken.

Nähere Informationen findet Ihr hier:

<https://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie/>

Verena Rüsing ist Schülerin des Rhein-Wied-Gymnasiums in Neuwied. Dort besucht sie die 12. Klasse. An der Mainzer Mathe-Akademie nahm sie bereits zum zweiten Mal teil.



Aus den Archiven der Mathematik Carl Friedrich Gauß zählte Punkte, um sich π zu nähern von Hartwig Fuchs

Das Verfahren

Um 1800 hat der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) ein anschauliches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Zahl π^* entwickelt, das in mancher Hinsicht elementarer ist als die bis dahin bekannten Approximationsmethoden für π .

* Von Leonhard Euler stammt die Bezeichnung π („peripherie“) für die Kreiszahl 3,1415926 ...

Über die Ebene sei ein Gitter aus Quadraten der Seitenlängen 1 gelegt. Eine Ecke irgend eines dieser Quadrate sei der Mittelpunkt von Kreisscheiben K_r (Kreisscheiben samt den von ihnen umschlossenen Gebieten) mit den Radien r , $r = 1, 2, 3, \dots$.

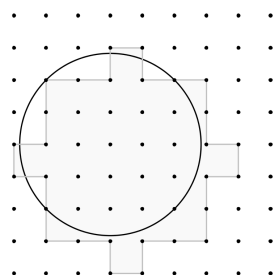


Abbildung 1

Es sei $A(r)$ die Anzahl der Gitterquadrate Q_r , deren linke oberen Eckpunkte auf der Kreisscheibe K_r liegen (vgl. Abbildung 1).

Bestimmung einiger $A(r)$ -Werte durch

	visuelles Abzählen			Computer-Abzählung		
r	10	20	30	10^2	10^3	10^4
$A(r)$	317	1257	2821	31417	3141579	314159053

Der Flächeninhalt aller in $A(r)$ mitgezählten Gitterquadrate Q_r sei $F(r)$. Da jedes Gitterquadrat Q_r den Flächeninhalt 1 hat, gilt:

(1) $F(r) = A(r)$ für $r = 1, 2, 3, \dots$.

Nun ist anschaulich $F(r) \approx$ Flächeninhalt der Kreisscheibe K_r mit dem Radius r . Also ist $F(r) \approx \pi r^2$, woraus man mit (1) die Abschätzung für π erhält:

(2) $A(r) : r^2 = \pi$ für $r = 1, 2, 3, \dots$.

Berechnung von π Approximationen mit (2) für die oben angegebenen $A(r)$ -Werte

r	10	20	30	10^2	10^3	10^4
$A(r) : r^2$	3,17	3,1425	3,1344	3,1417	3,141549	3,14159053

Jeder Gitterpunkt P_r auf der Kreisscheibe K_r ist zugleich linker oberer Eckpunkt eines der durch $A(r)$ -gezählten Gitterquadrats auf K_r und umgekehrt, so dass es genau $A(r)$ Punkte P_r auf K_r gibt. Daher lautet die simple Gaußsche Abschätzungsmethode für π :

(3) Zählt man die Gitterpunkte P_r auf der Kreisscheibe K_r , so erhält man aus (2) einen Näherungswert für π .

Begründung des Gauß-Verfahrens

Gauß hat sein anschauliches Näherungsverfahren für π auch analytisch begründet. Die oben definierten Gitterquadrate Q_r überdecken die Kreisscheibe nicht vollständig: zwar ragen einige von ihnen sogar aus K_r heraus; aber es gibt auch Flächen

im Innengebiet von K_r , die sie nicht überdecken. Weil nun zwei beliebige Punkte eines Quadrates der Seitenlänge 1 höchstens den Abstand $\sqrt{2}$ voneinander haben, gilt: Der Kreis, der vollständig von Quadraten Q_r überdeckt ist, hat den Radius $r - \sqrt{2}$ und der Kreis, der sämtliche Quadrate Q_r überdeckt, hat einen Radius $r + \sqrt{2}$. Deshalb gilt für den Flächeninhalt $A(r)$ sämtlicher Quadrate Q_r :

$$\pi(r - \sqrt{2})^2 < A(r) < \pi(r + \sqrt{2})^2$$

Daraus erhält man für den Term $A(r) : r^2$ in (2) die Abschätzung:

$$\pi \frac{r^2 - 2r\sqrt{2} + 2}{r^2} < \frac{A(r)}{r^2} < \pi \frac{r^2 + 2r\sqrt{2} + 2}{r^2}.$$

Wenn nun r über jede Schranke wächst, dann konvergieren die Terme

$$\frac{r^2 \pm 2r\sqrt{2} + 2}{r^2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{r} + \frac{2}{r^2}$$

gegen 1, so dass $A(r) : r^2$ gegen π strebt. Kurz: Es gilt

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{r^2} = \pi.$$

Gleichung (4) bedeutet: Je größer man den Radius r der Kreisscheibe K_r wählt, umso besser wird π durch den Quotienten $A(r) : r^2$ approximiert.

Vervollständigung des Gauß-Verfahrens

Da es langweilig ist, Gitterpunkte auf Kreisscheiben K_r mit großen Radien r zu zählen, wird sich ein Mathematiker vom Format des Carl Friedrich Gauß wohl überlegt haben, ob er die Werte der Anzahlfunktion $A(r)$ auch durch Rechnung bestimmen könne. Und tatsächlich hat er eine Formel gefunden, die ihm das lästige Abzählen erspart. Zunächst hat er die Anzahl der Gitterpunkte P_r auf einer Viertelscheibe V_r einer Kreisscheibe K_r mit Mittelpunkt O und Radius r bestimmt. Vorweg: Eine Verbindungsstrecke der Länge n zweier Gitterpunkte auf einer Gittergeraden enthält $n + 1$ Gitterpunkte und ein Gitterquadrat der Seitenlänge n weist $(n + 1)^2$ Gitterpunkte auf.

Abzählung der Gitterpunkte von V_r (vgl. Abbildung 2).

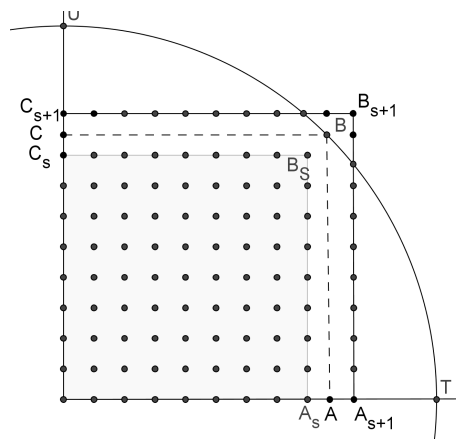


Abbildung 2

Im folgenden bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$; also ist etwa $[\pi] = 3$ und $[\sqrt{3}] = 1$.

- Der Randpunkt O von V_r ist ein Gitterpunkt.
- Die Randstrecken OT und OU von V_r haben die Länge r . Deshalb liegen auf ihnen insgesamt $2r$ Gitterpunkte, wobei der Punkt O nicht mitgezählt wird.
- Das größtmögliche Quadrat $OABC$, welches man V_r einbeschreiben kann, hat wegen $|AB|^2 + |BC|^2 = r^2$ und $|AB| = |BC|$ die Seitenlänge $\frac{r}{2}\sqrt{2}$. Da $\frac{r}{2}\sqrt{2}$ nicht ganzzahlig ist, bestimmt man die Anzahl der Gitterpunkte im Quadrat $OA_sB_sC_s$ mit der ganzzahligen Seitenlänge $s = [\frac{r}{2}\sqrt{2}]$ ohne die Gitterpunkte der Strecken OA_s und OC_s . Man zählt so $s^2 = [\frac{r}{2}\sqrt{2}]^2$ Gitterpunkte hinzu.
- Zur Bestimmung der Anzahl der Gitterpunkte im Segment CBU zählt man der Reihe nach für $i = 1, 2, 3, \dots, r-s$ die Gitterpunkte auf den zu OT parallelen Strecken $C_{s+i}B_{s+i}$ (ohne den Punkt C_{s+i} mit dem ganzzahligen Abstand $s+i$ von OT).

Die Strecke $C_{s+i}B_{s+i}$ hat die Länge $t_i = \sqrt{r^2 - (s+i)^2}$; deshalb liegen auf ihr $[t_i] = [\sqrt{r^2 - (s+i)^2}]$ Gitterpunkte, weil der Punkt C_{s+i} nicht mitgezählt wird. Für $i = r-s$ ist $C_{s+r-s}B_{s+r-s} = C_rB_r = U$, so dass $[t_r] = XX$ ist. Im Segment CBU und ebenso im Segment ATB zählt man somit $[t_{s+1}] + [t_{s+2}] + \dots + [t_r]$ Gitterpunkte.

Überträgt man nun die Ergebnisse aus a)-d) auf eine Kreisscheibe K_r , so ergibt sich die von Gauß hergeleitete Formel zur Berechnung von $A(r)$:

(5) Es gilt

$$A(r) = 1 + 4r + 4s^2 + 8(\sqrt{r^2 - (s+1)^2} + \sqrt{r^2 - (s+2)^2} + \dots + \sqrt{r^2 - (s+(r-s)^2)})$$

mit $s = [\frac{r}{2}\sqrt{2}]$.

Beispiel: Für $r = 25$ ist $s = [\frac{25}{2}\sqrt{2}] = 17$. Aus (5) folgt:

$$\begin{aligned} A(25) &= 1 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 17^2 \\ &\quad + 8(\sqrt{25^2 - (18)^2} + \sqrt{25^2 - (19)^2} + \dots + \sqrt{25^2 - (25)^2}) \\ &= 1 + 100 + 1156 + 8(17 + 16 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 0) \\ &= 1961 \end{aligned}$$

Für $r = 10^5$ ist $s = 70710$. Mit (5) ergibt sich dann durch eine Computer-Rechnung, dass $A(10^5) = 31\,415\,925\,457$ ist – woraus man mit (2) eine bereits auf 7 richtige Ziffern genaue Abschätzung $\pi = 3,1415925457$ erhält.

Aufgaben zum Neuen Jahr

von Hartwig Fuchs

Folgenglied gesucht

Gegeben sei die Zahlenfolge

1, 2, 4, 3, 6, 9, 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 20, 25, ..., n , $2n$, $3n$, ..., $n \cdot n$, ...

Wie lautet die 2017-te Zahl in dieser Folge?

Eine Abschätzung

Man zeige:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2016}{2015} < 2017$$

Quadratzahlen

Man zeige: Es gibt unendlich viele ganze Zahlen $k > 0$, so dass gilt: $(k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + 2017)$ ist eine Quadratzahl. Wie heißt die kleinste dieser Quadratzahlen?

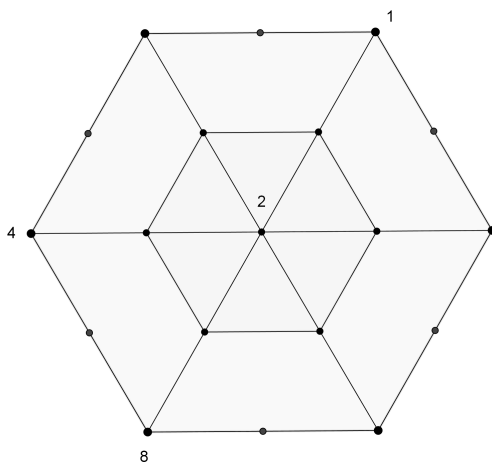
Summe

Es sei

$$S = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{2011 \cdot 2014} + \frac{3}{2014 \cdot 2017}.$$

Berechne S .

Zum Jahresanfang



Ersetze in den Sechsecken jeden Punkt durch eine der Zahlen 1, 2, ..., 19 und zwar so, dass gilt:

1. auf jeder Seite des großen Sechsecks ist die Summe der eingesetzten Zahlen 22.
2. Auf jeder Halbdiametralen von einem Eckpunkt des großen Sechsecks zum Mittelpunkt 2 ist die Summe der eingetragenen Zahlen ebenfalls 22.

Wenn man nun jede Zahl durch einen Buchstaben gemäß der folgenden Tabelle ersetzt, dann ergibt sich ein Wunsch der MONOID-Redaktion für unsere Löser

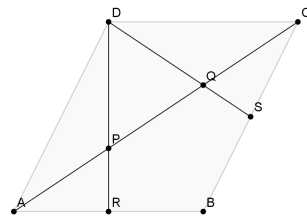
und Löser(innen), wenn man beginnend im Sechseck-Mittelpunkt die Buchstaben im kleinen und dann im großen Sechseck gegen den Uhrzeigersinn liest.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
S	E	N	E	A	R	N	J	H	S	H	C	Ö	E	U	S	N	N	I

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite ??.

Eine optische Täuschung

von Hartwig Fuchs



Im Parallelogramm $ABCD$ werde die Diagonale AC durch die Punkte P und Q in drei gleich lange Strecken zerlegt. Die Verlängerung von DP schneide AB im Punkt R und die Verlängerung von DQ schneide BC im Punkt S . Gilt dann

(1) $|AR| < |RB|$ und $|CS| < |SB|$?

Lösung

Für das Parallelogramm $ABCD$ gilt: $AB \parallel CD$ und $|AB| = |CD|$. Daraus folgt (Strahlensatz):

$$|AR| : |CD| = |AP| : |PC| = 1 : 2.$$

Also ist $|AR| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. Mithin gilt: R ist Mittelpunkt der Strecke $|AB|$, woraus folgt:

(2) $|AR| = |RB|$.

Entsprechend erhält man aus $CB \parallel DA$ und $|CB| = |DA|$, dass

$$|CS| : |DA| = |CQ| : |QA| = 1 : 2,$$

woraus folgt:

$$|CS| = \frac{1}{2}|DA| = \frac{1}{2}|CB|.$$

Also ist S Mittelpunkt der Strecke BC und daher gilt:

(2') $|CS| = |SB|$.

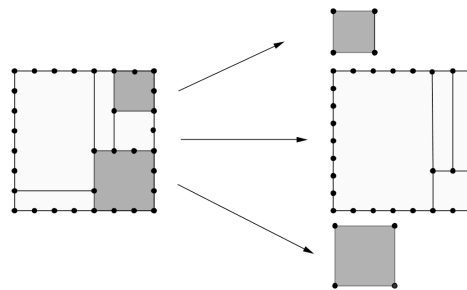
Die Ungleichungen in (1) sind beide falsch! Für unsere Figur stellt man nun durch Messung der Strecken AP , PQ und QC fest: im Rahmen der Messgenauigkeit zerlegen die Punkte P und Q die Strecke AC in drei gleich lange Teilstrecken.

Unsere Figur oben produziert also eine optische Täuschung!

Beweis ohne Worte

gefunden von Hartwig Fuchs

Man kann ein Quadrat in 6 Rechtecke zerlegen und aus diesen 6 Teilen drei Quadrate bilden. Beweis:



„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

„Das schaffen wir nie,“ schluchzte Tick ganz verzweifelt. „Doch, es muss doch eine Möglichkeit geben,“ versuchte ihn Trick zu beruhigen. „Um was geht es denn?“ fragte Track, der sich zu seinen Brüdern gesellte.

„Wir haben doch von Onkel Dagobert die kreisrunde Decke bekommen, die auf seinem ersten Tisch gelegen hatte,“ krächte Tick. „Ja, und wir durften sie in lauter kongruente Teile zerschneiden, die wir auf dem Weihnachtsmarkt des Fähnleins Fieselschweif verkaufen wollten,“ ergänzte Trick. „Na und?“ fragt Track. „Aber Onkel Dagobert wollte eines der Teile für sich selber behalten. Und jetzt ist genau in der Mitte ein kreisrunder Tintenfleck. Das darf er nie erfahren,“ jammerte Tick. „Dann zerschneidet doch die Decke so, dass wenigstens einer der Teile den Fleck nicht enthält,“ forderte Track seine Brüder auf. „Aber das können wir nicht!“ erwiderten sie völlig aufgelöst.

Kann man eine kreisförmige Decke in eine solche Anzahl kongruenter Teile zerschneiden, dass wenigstens ein Teil nichts von dem kreisrunden Fleck in der Mitte enthalten soll? Der Radius des Fleckes soll ein Viertel des Radius der Decke betragen. (Die Lösung ist zu begründen!)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2017 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 126

In Heft 126 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Teilbarkeit durch 1000

Immer wenn Peter und Paul ins Kino gehen wollen, verabreden Sie eine Wette. Der Verlierer muss den Gewinner einladen. Heute sagt Peter zu Paul:

„Ich denke mir 10 beliebige positive ganze Zahlen, die nicht alle verschieden sein müssen. Du darfst einige oder auch keine, aber nicht alle davon streichen und die Summe aus den übrig gebliebenen Zahlen bilden. Wenn diese Summe durch 1000 teilbar ist, lade ich dich ein, sonst musst du mich einladen.“

Paul entgegnet: „Das ist ganz schön unfair. Du denkst dir einfach zehnmal die Zahl 1, und dann kann ich streichen so viel oder wenig ich will: die Summe wird nie durch 1000 teilbar sein. Du musst mir ein wenig entgegenkommen und erlauben, dass ich einigen der nicht von mir gestrichenen Zahlen vor dem Addieren nach meinem Belieben ein Minuszeichen geben darf.“ Peter, leicht überrumpelt, akzeptiert den Wunsch von Paul und macht sich daran, 10 passende Zahlen zu finden.

Wer von den beiden kann sich sicher sein, vom anderen eingeladen zu werden?

Ergebnisse

Paul kann sich sicher sein, von Peter eingeladen zu werden.

Nennt Peter eine Zahl mehrfach, so streicht Paul alle Zahlen bis auf zweimal diese Zahl und setzt vor eine ein Minuszeichen. So ist deren Summe Null und damit durch 1000 teilbar.

Sind alle zehn von Peter genannten Zahlen verschieden, so kann Paul für jede Zahl entscheiden, ob er sie streichen möchte oder nicht. Dafür gibt es $2^{10} = 1024$ verschiedene Möglichkeiten; jede beschreibt eine Teilmenge der zehn Zahlen. Da er nicht alle Zahlen streichen darf, fällt eine Möglichkeit weg und er hat noch 1023 Teilmengen. Weil diese Anzahl größer als 1000 ist, gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Teilmengen, bei denen die Summe ihrer Zahlen mod 1000 kongruent ist.

Falls Zahlen in beiden Teilmengen gemeinsam vorkommen, streicht Paul sie, was nichts an der Kongruenz der Summen ändert. Anschließend setzt er vor alle Zahlen der einen Menge ein Minuszeichen. Nun ist die Summe der Zahlen in beiden Teilmengen gleich Null und damit durch 1000 teilbar.

Vollständig richtige Lösungen wurden von den Schülern Maximilian Göbel, Silas Rathke und Marcel Wittmann eingeschickt.

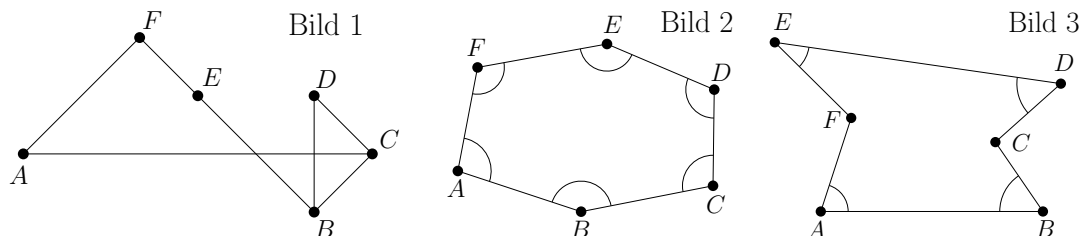
Bemerkung: In der Praxis kann es durchaus etwas dauern, bis Paul die passenden Teilmengen für die von Peter genannten Zahlen gefunden hat. Aber das Schubfachprinzip garantiert, dass sie existieren, und darauf kommt es an. Peter hat übrigens nach dem Kinobesuch beschlossen, beim nächsten Mal das Streichen von Zahlen nicht zu erlauben. Paul hat daraufhin verlangt, die Zahl 1000 passend verkleinern zu dürfen. Die Frage nach der geeigneten Zahl wäre aber fast schon wieder eine neue Aufgabe!

Nachrichten von den n -Ecken

von Hartwig Fuchs

Schlichte n -Ecke

Eine ebene Figur aus n Punkten (Ecken) $P_1, P_2, \dots, P_n$, $n \geq 3$, und ihren n Verbindungsstrecken (Kanten) $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ heißt ein n -Eck. Ein solches n -Eck ist *Schlicht*^{*}, wenn in jeder seiner Ecken genau zwei Kanten zusammenstoßen und keine zwei seiner Kanten eine Strecke bilden und auch keine zwei Kanten sich kreuzen - das n -Eck in Bild 1 erfüllt keine dieser drei Bedingungen, es ist daher nicht schlicht; die n -Ecke in Bild 2 und 3 sind schlicht. Schlichte n -Ecke (und nur diese) bezeichnen wir mit S_n .



Winkel in schlichten n -Ecken

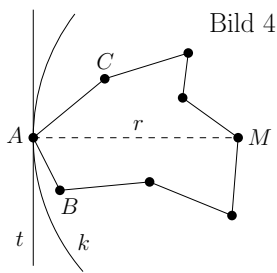
In Bild 2 und Bild 3 sehen wir, dass in n -Ecken Innenwinkel vorkommen, die $< 180^\circ$ sind. Tatsächlich gilt:

Satz 1

- (1) Jedes schlichte n -Eck S_n , $n \geq 3$, hat mindestens einen Innenwinkel, der kleiner als 180° ist.

Beweis: Unter den Ecken von S_n gibt es zwei Ecken - etwa A und M - die den größten Abstand - etwa $|MA| = r$ - voneinander haben (Bild 4). Weil dann für jede von M verschiedene Ecke E von S_n jeweils $|ME| \leq r$ ist, gilt: Alle Ecken $E \neq M$ von S_n liegen im Innengebiet oder auf dem Rand der Kreisscheibe k mit Mittelpunkt M und Radius r .

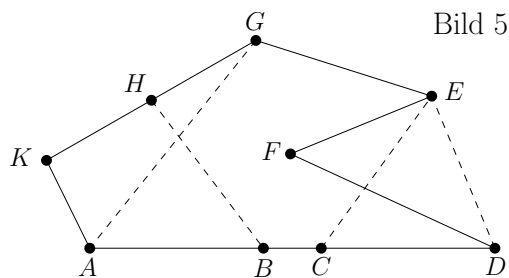
^{*} Da im Folgenden nur schlichte n -Ecke betrachtet werden, lassen wir den Zusatz „schlicht“ meist weg.



also Satz 1.

n -Ecke S_n .

Transversalen und Diagonalen in schlichten n-Ecken



liegen (Bild 5).

das 6-Eck in Bild 2 konvex. Insbesondere gilt:

- (1) Jedes Dreieck ist konvex.

sie eine *innere* Diagonale. Für sie gilt:

Satz 2

- (2) Jedes schlichte n -Eck S_n , $n \geq 4$, besitzt mindestens eine innere Diagonale.

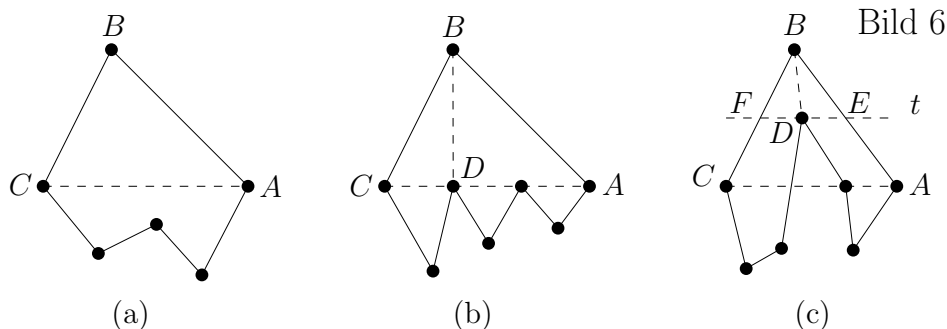
welcher der Innenwinkel $\sphericalangle ABC < 180^\circ$ ist.

Für das Dreieck ABC sind dann drei Fälle möglich:

- Im Innengebiet von Dreieck ABC und auch in der Strecke AC gibt es keine von A und C verschiedenen Ecken von S_n . Dann liegt die Diagonale AC (ohne A und C) im Innengebiet von S_n - sie ist also eine innere Diagonale von S_n (Bild 6a).
- Auf der Diagonale AC , nicht jedoch im Innengebiet von Dreieck ABC gibt es eine Ecke D von S_n (Bild 6b).

Dann liegt die Diagonale BD (ohne B und D) im Innengebiet des Dreiecks ABC , das ein Teil des Innengebiets von S_n ist. Folglich ist BD eine innere Diagonale von S_n (Bild 6b).

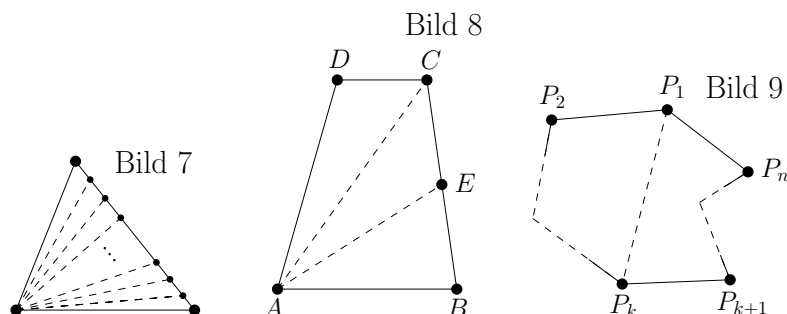
- c) Im Innengebiet des Dreiecks ABC befinden sich Ecken von S_n . Unter diesen Ecken gibt es eine Ecke D , die den größten Abstand von AC hat (Bild 6c). Die zu AC parallele Gerade durch D sei t ; sie schneide AB in E und CB in F . Im Innengebiet von Dreieck EBF liegen dann keine Ecken von S_n . Daher ist dieses Innengebiet, das die Diagonale BD durchquert, ein Teil des Innengebiets von S_n . Daraus folgt: BD ist eine innere Diagonale von S_n .



Zerlegbarkeit schlichter n -Ecke

Man kann ohne Schwierigkeit jedem n -Eck S_n innere Transversalen angeben, durch die S_n in beliebig viele kleinere Schlichte Vielecke - insbesondere in Dreiecke - zerlegt wird (Bild 7). Diese von der Anschauung gerechtfertigte Möglichkeit beweisen wir nicht.

Dagegen werden wir der interessanteren Frage nachgehen, ob es für jedes S_n eine kleinste Anzahl von Dreiecken gibt, in die S_n vollständig zerteilbar ist und ob diese Minimalzahlen für alle S_n gleich sind. Es ist anschaulich naheliegend, als „zerteilter“ von S_n innere Diagonalen zu verwenden. Denn wie wir in Bild 8 sehen: Die Transversale AE zerlegt das Viereck $ABCD$ in ein Dreieck und ein Viereck - das weiter zerlegbar ist; dagegen zerlegt die innere Diagonale AC das Viereck $ABCD$ „endgültig“ in zwei Dreiecke.



Zunächst zeigen wir:

- (2) Eine innere Diagonale zerlegt ein n -Eck S_n , $n \geq 4$, in zwei schlichte Vielecke S_k und S_{n-k+2} , wobei $3 \leq k \leq n-1$ ist.

Aus Satz 2 folgt:

Bezeichnen wir die Ecken von S_n so mit $P_1, P_2, \dots, P_n$, dass P_1P_k die gegebene innere Diagonale ist (Bild 9), dann erfüllen sowohl die Ecken $P_1, P_2, \dots, P_k$ und die sie verbindenden Strecken $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_kP_1$ als auch die Ecken $P_k, P_{k+1}, \dots, P_n, P_1$ und ihre Verbindungsstrecken $P_kP_{k+1}, \dots, P_nP_1, P_1P_k$ die eingangsgegebene Definition schlichter Vielecke - was (2) beweist.

Eine Verallgemeinerung von (2): *Satz 3'*

(3') (vorläufiger Triangulationssatz): Jedes schlichte n -Eck S_n , $n \geq 4$, ist durch innere Diagonalen, die sich nicht kreuzen, vollständig in Dreiecke zerlegbar.

Numerische Eigenschaften schlichter n -Ecke

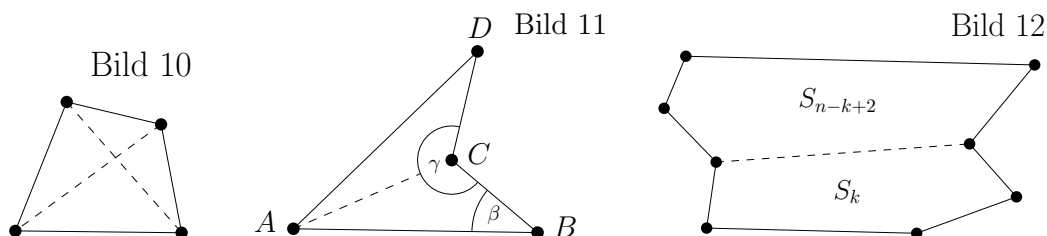
Mit Satz 3' lassen sich einige elementare numerische, allen n -Ecken S_n , $n \geq 4$, zukommende Eigenschaften nachweisen. Eine Diagonale, die keine andere Diagonale von S_n zwischen deren Endpunkten schneidet, nenne wir *kreuzungsfrei*.

(3) Jedes n -Eck S_n , $n \geq 4$, besitzt genau $n - 3$ kreuzungsfreie Diagonalen.

Beweis (vollständige Induktion): Es sei $D(S_n)$ die Anzahl der kreuzungsfreien Diagonalen von S_n . Für $n = 4$ ist $D(S_4) = 4 - 3$. S_4 hat zwei Diagonalen. Wenn S_4 konvex ist, dann schneiden sich die Diagonalen von S_4 (Bild 10). Folglich ist $D(S_4) < 2$ und mithin gilt $D(S_4) = 1$.

Es sei $S_4 = ABCD$ nicht konvex. Für die Innenwinkel β und γ von S_4 bei B und C gelte: $\beta < 180^\circ$ und $\gamma > 180^\circ$ (Bild 11). Würde nun die Diagonale BC die Diagonale AC kreuzen, dann müsste $\gamma < \beta$ sein - ein Widerspruch. Da die Diagonalen sich nicht kreuzen, gilt auch hier: $D(S_4) = 1$.

(3) sei nun bewiesen für jedes i , $4 \leq i \leq n - 1$. Dann gilt (3) auch für $i = n$: Nach Satz 2 hat S_n eine innere Diagonale, die S_n wegen (2) in zwei Vielecke S_k und S_{n-k+2} , $3 \leq k \leq n - 1$, zerlegt (Bild 12). Aus der Induktionsvoraussetzung $D(S_k) = k - 3$ und $D(S_{n-k+2}) = n - k + 2 - 3$ folgt $D(S_n) = D(S_k) + D(S_{n-k+2}) + 1 = n - 3$.



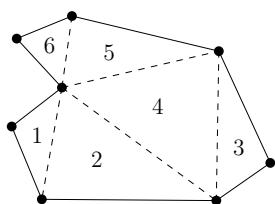
Satz 3

(3) (Triangulationssatz): Jedes schlichte n -Eck S_n , $n \geq 4$, kann durch seine $n - 3$ kreuzungsfreien Diagonalen vollständig in $n - 2$ Dreiecke zerlegt werden.

Beweis: Mit $A(S_n)$ bezeichnen wir die Anzahl der Dreiecke, die eine vollständige Triangulation von S_n durch kreuzungsfreie Diagonalen bilden. Für $n = 4$ ist

$A(S_4) = 4 - 2$, denn nach (3) besitzt S_4 eine kreuzungsfreie Diagonale, die S_4 wegen (2) in zwei Dreiecke zerlegt (Bild 10 und 11). Satz 3 sei nun bewiesen für jedes i , $4 \leq i \leq n - 1$. Dann gilt Satz 3 auch für $i = n$. S_n wird durch eine kreuzungsfreie Diagonale wegen (2) in zwei Vielecke S_k und S_{n-k+2} mit einem k , $3 \leq k \leq n - 1$ zerlegt, wobei nach Induktionsvoraussetzung gilt: S_k und S_{n-k+2} werden von $k - 3$ bzw. $n - k + 2 - 3 = n - k - 1$ kreuzungsfreie Diagonalen in $A(S_k) = k - 2$ bzw. $A(S_{n-k+2}) = n - k + 2 - 2 = n - k$ Dreiecke zerlegt. Damit ist S_n durch $(k - 3) + (n - k - 1) + 1 = n - 3$ kreuzungsfreie Diagonalen in $A(S_n) = A(S_k) + A(S_{n-k+2}) = n - 2$ Dreiecke zerlegt.

Bild 13



Beispiel

In Bild 13 ist ein Achteck S_8 durch seine 5 kreuzungsfreien Diagonalen in 6 Dreiecke zerteilt.

Satz 3 ermöglicht eine wichtige numerische Aussage über die Innenwinkel eines n -Ecks S_n .

Satz 4

(4) (Summe der Innenwinkel): Jedes schlichte n -Eck S_n , $n \geq 3$, hat die Innenwinkelsumme $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Beweis: Satz 4 trifft zu für $n = 3$, also für Dreiecke; daher sei nun $n \geq 4$. Ein n -Eck S_n sei durch $n - 3$ kreuzungsfreie Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke zerlegt (Bild 13). Da die Seiten dieser Dreiecke Diagonalen oder Kanten von S_n sind, ist jeder Innenwinkel eines Zerlegungsdreiecks Teil eines Innenwinkels von S_n ; umgekehrt setzt sich jeder Innenwinkel von S_n zusammen aus Innenwinkeln von Zerlegungsdreiecken. Daraus folgt: die Innenwinkelsumme von S_n beträgt $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Aufgabe 1: Begründe, dass es keine Triangulation von S_n , $n \geq 4$, mit weniger als $n - 2$ Dreiecken geben kann.

Aufgabe 2: Zeige mit Satz 2, dass alle Innenwinkel eines konvexen n -Ecks S_n kleiner als 180° sind.



Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

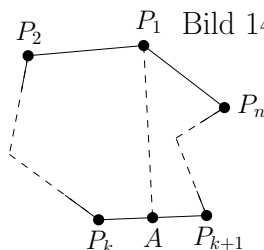


Bild 14

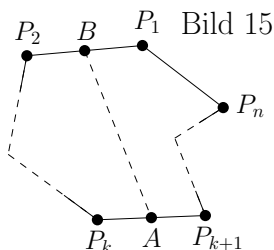


Bild 15

Wenn man im Nachweis der Aussage (2) die innere Diagonale $P_1 P_k$ durch eine innere Transversale $P_1 A$ (etwa wie in Bild 14) oder durch AB (etwa wie in Bild 15) ersetzt, dann erhält man jeweils zwei Vielecke, die zusammen mehr Ecken als die Vielecke S_k und S_{n-k+2} in (2) besitzen, zu deren Triangulation daher mehr als $n - 2$ Dreiecke erforderlich sind.

Aufgabe 2

Es seien A, B, C und D aufeinanderfolgende Ecken von S_n , wobei $\sphericalangle ABC < 180^\circ$ (vgl. Satz 2) und $\sphericalangle BCD > 180^\circ$ gelte.

Dann liegt die Transversale BD nicht im Innengebiet von S_n . Das aber widerspricht der Konvexität von S_n - also ist $\sphericalangle BCD < 180^\circ$. Auf die gleiche Weise ergibt sich, dass auch jeder andere Innenwinkel von S_n kleiner als 180° ist.

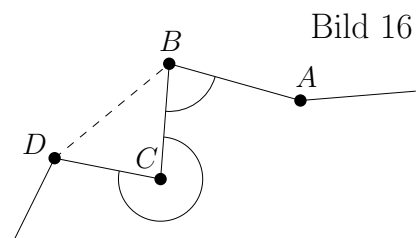


Bild 16

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Manchmal will man auch Privates geheim halten, zum Beispiel indem man Weihnachtgrüße homophonisch verschlüsselt. Der Klartext ADVENTSKALENDERAUFGABEVOMNIKOLAUS soll mit dem Schlüsselwort MAINZ zu einem Geheimtext kodiert werden. Das geht folgendermaßen: Kurz gesagt addiert man K buchstabenweise zu S. Um mit ihnen rechnen zu können, werden die 26 großen deutschen Buchstaben von A bis Z mit den Ordnungszahlen von 0 bis 25 durchnummeriert; nach Z geht es also wieder mit A weiter. Außerdem werden alle Leerzeichen und Interpunktionszeichen weggelassen.

```
ADVENTSKALENDERAUFGABEVOMNIKOLAUS
+MAINZMAINZMAINZMAINZMAINZMAI
-----
MDDRMFSSNKQNLQNMUNTZNEDBLZISBKMUA
```

```
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
01234567890123456789012345
```

Erstelle ein Computerprogramm, welches einen beliebigen Geheimtext mit einem vorgegebenen Schlüsselwort als Eingabe erlaubt und G. homophonisch dekodiert. Verwende dieses Programm, um G=

```
PSAQWPBIGSZIMBFJWQYCACQGIIRBAFTSVQPIDCU-
SEHUVAOKKFSANEHUHNIAHZRFSKKLSUBELXZLUMPYSE
```

damit zu entschlüsseln. Vom Schlüssel S. weiß man nur, daß er aus sechs Buchstaben besteht und dass alle, die hier mitmachen, ihn schon einmal gehört haben.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2017 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 126

WG-Craps

„WG-CRAPS“ ist eine Variante des Spiels „CRAPS“ mit folgenden Spielregeln: Ein Spieler würfelt mit zwei idealen Würfeln. Wirft der Spieler im ersten Wurf die Augensumme 7 oder 4, so gewinnt er sofort. Wirft er 2, 11 oder 12, so ist dies ein „Crap“ und er verliert sofort. Wirft er eine der Augensummen 3, 5, 6, 8, 9 oder 10, so ist die Augensumme sein „Point“ und er würfelt ein weiteres Mal. Ab dem zweiten Wurf gilt nun: Wirft der Spieler seinen „Point“, so gewinnt er. Wirft er die Augensumme 7, so verliert er. Wirft er irgendeine andere Augensumme, so würfelt er erneut.

Zeige mit einem Simulationsprogramm und einem geeigneten Konfidenz-Intervall, dass „WG-CRAPS“ (im Gegensatz zum „Original-CRAPS“) fair ist! Dabei nennen wir ein Spiel fair (aus Sicht des Spielers), wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit $\geq 50\%$ ist. Die Anzahl der Spiele und das Signifikanz-Niveau wählst Du selbst!(W.G.)

Ergebnisse

Die Veränderung der Regeln bei WG-Craps im Unterschied zum Original erhöht die Gewinnchance beim ersten Wurf um $\frac{1}{36}$ (Gewinn bei 7 oder 10 statt 7 oder 11), und zwar von den bekannten 49,29% auf 52,07% und erniedrigt sie beim Point; da statt 4, 5, 6, 8, 9, 10 jetzt 4, 5, 6, 8, 9, 11 als Points möglich sind. Die Auswirkung dieser zweiten Veränderung ist ca. $-1,4\%$ und läßt sich genau nur mit Markowketten berechnen. Für die Gewinnchance von WG-Craps erhält man mit dieser Methode genau $\frac{223}{440} = 50,68\%$. Die Simulationsergebnisse von WG-CRAPS liegen bei 1 000 000 Spielen zwischen 50,6% und 50,7% für die Gewinnchance; man kann daher mit hoher Sicherheit sagen, daß WG-Craps im Unterschied zur Originalvariante fair ist (im Sinne der Definition in der Aufgabenstellung).

Dies haben auch die Schüler Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, Silas Rathke von der Alexander-von-Humboldt-Schule in Neumünster und Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey herausgefunden. Marcel hat zusätzlich eine Excel-Betrachtung zum Konfidenz-Intervall angestellt. Silas berechnet den oben erwähnten theoretisch korrekten Wert, indem er die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Points bestimmt, es fehlt ein Programm. Maximilian Hauck gibt in dem richtigen Programm ein Konfidenz-Intervall in Abhängigkeit von der Anzahl der Simulationen aus.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 127

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Durchschnittsgeschwindigkeiten

Zwei Läufer haben eine Wette abgeschlossen. Der eine sagt zum anderen, dass er niemals zwei Runden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ laufen könnte. Eine Runde hat eine Länge von 1km. In der ersten Runde kommt der Läufer nur auf eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $8\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wie schnell müsste er also die zweite Runde laufen, damit er seine Wette noch gewinnt? (Kevin Mours, Karolinen-Gymnasium, Frankenthal)

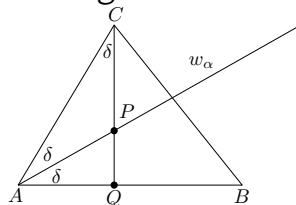
Lösung:

Das Ergebnis kann man über eine Zeitenbilanz berechnen. Die Wette besagt, dass er durchschnittlich $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ laufen soll. Er darf also insgesamt für die 2000m nur 200s brauchen. Für die ersten 1000m hat er nun schon 125s gebraucht. Er hat also noch 75s für die zweite Runde Zeit. Das ergäbe eine Geschwindigkeit von $13,33\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

II. Winkelbestimmung

In einem spitzwinkligen, aber nicht gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ sei w_α die Halbierende des Winkels α bei A und h_C sei die Höhe aus C . w_α und h_C schneiden sich im Punkt P und es gelte: $|AP| = |CP|$. Wie groß ist der Winkel α ? (H.F.)

Lösung:



Im Dreieck $\triangle ABC$ sei $\delta = \frac{\alpha}{2}$ gesetzt. Weil Dreieck $\triangle APC$ gleichschenkelig ist, gilt $\angle ACP = \angle PAC = \delta$. Im Dreieck $\triangle AQC$ gilt dann $3\delta + 90^\circ = 180^\circ$, also $\delta = 30^\circ$. Also ist $\alpha = 60^\circ$.

III. Ein magisches Quadrat

112	36	12	40
60	8	144	28
72	84	20	16
4	80	56	108

Finde heraus, warum das Zahlenquadrat wohl magisch heißt! Welches ist die magische Zahl des Quadrats? (WJB)

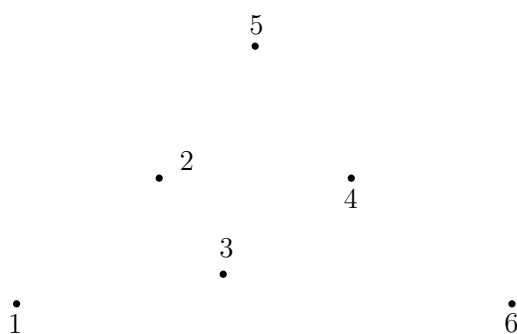
Lösung:

Die Produkte der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen haben sämtlich den gleichen Wert, nämlich das magische Produkt $1935360 = 960 \cdot 2016$.

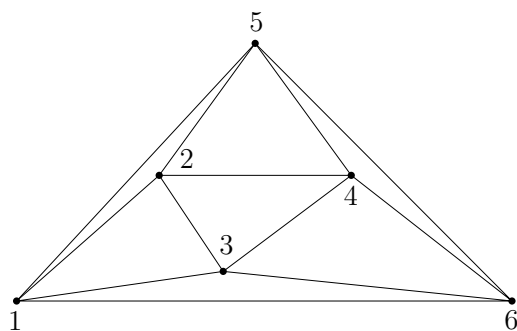
Bemerkung: Weiter gilt für die vier 2×2 -Quadrate in den Ecken des 4×4 -Quadrats sowie für das zentrale 2×2 -Quadrat: Das Produkt ihrer Elemente ist $960 \cdot 2016$. Und auch: Die vier Eckzahlen des 4×4 -Quadrats – nämlich 112, 40, 4, 108 – haben das Produkt $960 \cdot 2016$.

IV. Sechs Punkte, 12 Strecken

Verbinde die sechs Punkte 1, 2, ..., 6 durch Strecken so, dass jeder Punkt mit vier anderen Punkten verbunden ist und die Verbindungsstrecken sich nicht schneiden. (H.F.)



Lösung:



V. Quersumme

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es mit Quersumme 9? (H.F)

Lösung:

Zur ersten Ziffer n gibt es die Zahlen mit zweiter und dritter Ziffer $(0, 9 - n)$, $(1, 8 - n)$, $(2, 7 - n)$, ..., $(9 - n, 0)$, das heißt $10 - n$ solche Zahlen. Wir addieren für $n = 1, 2, \dots, 9$ und erhalten $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45$.

VI. Zwei Teiler

Eine natürliche Zahl n habe genau 16 Teiler – zwei davon sind 21 und 22. Welche Zahl ist n ? (H.F.)

Lösung:

Wegen $21 = 1 \cdot 3 \cdot 7$ und $22 = 1 \cdot 2 \cdot 11$ hat n zumindest die Teiler 1, 3, 7, 21, $2 \cdot 1$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 21$, $11 \cdot 1$, $11 \cdot 3$, $11 \cdot 7$, $11 \cdot 21$, $22 \cdot 1$, $22 \cdot 3$, $22 \cdot 7$, $22 \cdot 21$. Weil dies bereits 16 Teiler sind, gilt $n = 21 \cdot 22 = 462$.

VII. Wie viele Nullen?

Wie viele Nullen stehen am Ende der Zahl $2016!$? (Christoph Sievert)

Lösung:

Eine Zahl ist genau dann durch 10^n teilbar, wenn sie durch 5^n und 2^n teilbar ist. Wir fragen uns also, wie oft die Zahl $2016!$ von 5 und 2 geteilt wird.

Jede fünfte Zahl wird von 5 geteilt, das heisst $\lfloor \frac{2016}{5} \rfloor = 403$ der 2016 Faktoren von $2016! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2016$ werden von 5 geteilt. Es kann jedoch vorkommen, dass manche Faktoren mehr als einmal von 5 geteilt werden. Dies sind genau $\lfloor \frac{2016}{5^2} \rfloor = 80$. Ebenso werden $\lfloor \frac{2016}{5^3} \rfloor = 16$ der Faktoren von 5 drei Mal geteilt und $\lfloor \frac{2016}{5^4} \rfloor = 3$ der Faktoren vier Mal. Wegen $5^5 = 3125 > 2016$ wird keiner der Faktoren öfter als vier Mal von 5 geteilt. Somit enthält die Zahl $2016!$ genau $403 + 80 + 16 + 3 = 502$ Mal den Primfaktor 5. Mit der gleichen Überlegung sieht man leicht, dass der Primfaktor 2 wegen $2 < 5$ (deutlich) öfter in $2016!$ enthalten ist. Damit ist $2016!$ genau 502 Mal durch 10 teilbar und somit stehen am Ende der Zahl $2016!$ 502 Nullen.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Folgenglieder

Für die Glieder $a_1, a_2, a_3, \dots$ einer Zahlenfolge gilt: Die ersten n Glieder, $n \geq 1$, haben die Summe $S_n = 5n^2 + 1$.

- Bestimme a_1, a_2, a_3 und a_{2016} .
- Gib eine Formel an, mit der man jedes Folgenglied a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ berechnen kann. (H.F.)

II. Eine Eigenschaft magischer 3×3 -Quadrate

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Das nebenstehende 3×3 -Zahlenquadrat heißt magisch, weil die drei Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen die gleiche Summe $M = 15$ besitzen. Für die zentrale Zahl $z = 5$ gilt außerdem:

$$(1) \quad 3 \cdot z = M.$$

Überprüfe, ob die Gleichung (1) für jedes magische 3×3 -Quadrat zutrifft. (H.F.)

III. Prozente

Wieviel Prozent sind 99% von (99% von (99% von (99% von (99% von (99% von (99% von 99%))))))?) (H.F.)

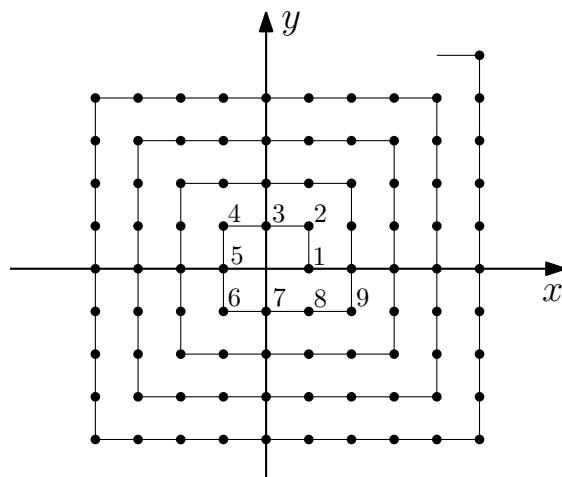
IV. Punkte-Verteilung

Im Innengebiet eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem Flächeninhalt 4 sind 37 Punkte beliebig verteilt. Man zerlege das Dreieck $\triangle ABC$ in vier flächengleiche Teildreiecke.

- Gib die Zerlegung des Dreiecks in vier flächengleiche Teildreiecke an.
- Zeige: Im Innengebiet samt Rand eines dieser vier Teildreiecke befinden sich (mindestens) 10 Punkte. (H.F.)

V. Zahlenspirale

In einem Koordinatensystem seien die von $(0, 0)$ verschiedenen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten fortlaufend in der Form einer Spirale nummeriert, also $(1, 0)$ mit 1, $(1, 1)$ mit 2, $(0, 1)$ mit 3 usw. bezeichnet.



- Welche Koordinaten hat der Punkt mit der Nummer 2016?
- Welche Nummer hat der Punkt $(0, -2016)$ auf der y -Achse? (H.F.)

VI. Teilbarkeit spezieller Zahlen

Bestimme alle achtstelligen Zahlen $abbbbbba$, die durch 36 teilbar sind. (WJB)

VII. Produkt und Differenz

Das Produkt zweier ganzer Zahlen a und b ist 119, ihre Differenz ist 10. Finde alle möglichen Zahlenpaare (a, b) mit dieser Eigenschaft! (WJB)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1162: Faktorisierung

Bestimme positive ganze Zahlen a, b mit $a < b$ so, dass die quadratischen Terme $x^2 + ax + b$ und $x^2 + bx + a$ als ein Produkt aus linearen Termen mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden können? (H.F.)

Aufgabe 1163: Eine seltsame Kürzungsregel

Es ist $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$, $\frac{1\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$, $\frac{1\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$, $\dots$; $\frac{1\cancel{6}\dots\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\dots\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$.

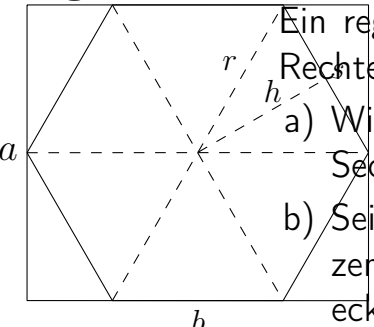
Haben die ungekürzten Brüche tatsächlich den Wert $\frac{1}{4}$, sodass bei ihnen die angegebene Kürzungsregel zulässig ist? (H.F.)

Aufgabe 1164: Minimaler Abstand

Welcher Punkt der Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{\frac{145}{4} - x}$, $x \leq \frac{145}{4}$, hat den geringsten Abstand vom Nullpunkt $(0, 0)$?

Wie groß ist der Minimalabstand? (H.F.)

Aufgabe 1165: Sechseck im Rechteck



Ein reguläres Sechseck sei wie in der Skizze in ein minimales Rechteck einbeschrieben.

a) Wie groß ist die Fläche des Rechtecks, wenn das reguläre Sechseck den Umfang 12 hat?

b) Sei nun der Umfang des Rechtecks allgemein. Wieviel Prozent der Fläche des Rechtecks macht die Fläche des Sechsecks aus? (WG)

Aufgabe 1166: Summengleiche Mengen

Die Menge der Primzahlen ≤ 23 sei P , also $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

Zeige: P hat mindestens sechs nicht-leere Teilmengen, deren Elemente die gleiche Summe besitzen. (H.F.)

Aufgabe 1167: Das Rätsel der sieben Aussagen

Als Professor Quaoar den Vorlesungsraum betrat, las er die folgenden sieben Aussagen an der Tafel:

- (1) Genau 1 der sieben Aussagen an der Tafel ist falsch.
- (2) Genau 2 der sieben Aussagen an der Tafel sind falsch.
- $\vdots$
- (6) Genau 6 der sieben Aussagen an der Tafel sind falsch.
- (7) Genau 7 der sieben Aussagen an der Tafel sind falsch.

„Nun, Herr Professor, was sagen Sie dazu“, fragte ihn der Student Talentino.
Wie löst Professor Quaoar dieses Problem? (H.F.)

Aufgabe 1168: Einerziffern von Summen dritter Potenzen

Die Einerziffern der nach der folgenden Regel gebildeten natürlichen Zahlen m^3 , $m^3 + 1^3$, $m^3 + 2^3$, ..., $m^3 + 9^3$ sind – in anderer Reihenfolge – die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9.

Zeige dies. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 127

Klassen 9–13

Aufgabe 1162: Murmeln

In einer Schachtel liegen rote und blaue Murmeln. Entnimmt man der Schachtel eine rote Kugel, dann sind danach $\frac{1}{4}$ der Kugeln in der Schachtel rot.

Legt man aber noch eine rote Kugel in die Schachtel, so sind dann $\frac{1}{3}$ aller Kugeln in der Schachtel rot.

Wie viele blaue Kugeln befinden sich in der Schachtel? (H.F.)

Lösung:

Es sei g die Anzahl der anfangs in der Schachtel befindlichen Kugeln und r die Anzahl der roten Kugeln. Dann gilt:

$$r - 1 = \frac{1}{4}(g - 1) \text{ und } r + 1 = \frac{1}{3}(g + 1).$$

Daraus folgt: $r = 5$ und $g = 17$. Daher ist $g - r = 12$ die Anzahl der blauen Kugeln.

Aufgabe 1163: Rechnung für ein Geschäftsessen

Eine Gruppe von Geschäftsleuten traf sich in einem Restaurant. Nach dem Essen beschlossen sie, jeder von ihnen solle den gleichen Betrag zur Bezahlung der Rechnung beisteuern. Wenn jeder von ihnen 32 € gab, fehlten 8 € zum Rechnungsbetrag. Gab aber jeder von ihnen 38 €, dann konnten sie Rechnung sowie 15% Trinkgeld bezahlen und es blieben 4 € übrig. Wie viele Personen nahmen am Essen teil und wie hoch war die Rechnung? (H.F.)

Lösung:

Es sei n die Anzahl der Personen und r der Rechnungsbetrag. Dann gilt zunächst

$$32n = r - 8 \text{ und } 38n = r + 0,15r + 4.$$

Daraus folgt:

$$38 \cdot 32n = 38r - 304 \text{ und } 32 \cdot 38n = 32r + 4,8r + 128.$$

Aus $38r - 304 = 36,8r + 128$ folgt $1,2r = 432$ und somit $r = 360$. Also ist $n = 11$.

Aufgabe 1164: Nullstellen-Summe

Es sei f eine Funktion, für die gilt: f ist für alle reellen Zahlen definiert und $f(672 - x) = f(672 + x)$. f hat genau drei reelle Nullstellen r_1 , r_2 und r_3 mit $r_3 = 1345$. Wie lautet dann die Summe $r_1 + r_2 + r_3$? (H.F.)

Lösung:

Die Funktion f ist symmetrisch zum x -Wert 672.

Da f genau drei Nullstellen hat, muss $r_1 = 672$ eine dieser Nullstellen sein.

Für die anderen beiden Nullstellen r_2 und r_3 gilt dann: $r_2 = r_1 - x'$ und $r_3 = r_1 + x'$ für ein reelles x' .

Wegen $r_3 = 1345$ ist $x' = 673$, sodass $r_2 = 672 - x' = -1$ ist. Damit lautet die Summe der Nullstellen von f : $r_1 + r_2 + r_3 = 2016$.

Aufgabe 1165: Eine päpstliche Regel

Im frühen Mittelalter war das mathematische Wissen der Griechen und der Römer fast vollständig in Vergessenheit geraten. Damals stellt Gerbert von Aurillac (um 950–1003) – der spätere Papst Sylvester II, von dem berichtet wird, dass er als der größte Gelehrte seiner Zeit galt und wegen seiner für die damalige Zeit erstaunlichen mathematischen Kenntnisse sogar als Zauberer verdächtigt wurde – folgende geometrische Regel auf:

Im gleichseitigen Dreieck ist die Höhe stets um $\frac{1}{7}$ der Seitenlänge kürzer als die Dreiecksseite.

Überprüfe diese Regel auf Korrektheit! (H.F.)

Lösung:

Nach dem Satz des Pythagoras ist $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ und daher $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{\frac{3}{4}}a$.

Da $\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} \approx \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, ist $\sqrt{\frac{3}{4}} \approx \frac{6}{7}$. Also ist $h \approx \frac{6}{7}a$.

Historisch korrekt ist die päpstliche Regel so zu begründen: Sylvester setzte $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$ und damit erhielt er $h = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{7}a = \frac{6}{7}a$. Es ist nicht bekannt, wie er seinen Näherungswert $\frac{12}{7}$ für $\sqrt{3}$ gefunden hat.

Aufgabe 1166: Ränder-Zahlenspiel

Auf einem Blatt Papier wird eine gerade Anzahl von beliebigen positiven Zahlen auf einer Linie notiert. Auch gleiche Zahlen sind zulässig. Zwei Spieler spielen damit folgendes Spiel: Abwechselnd streicht jeder der Spieler eine der beiden Randzahlen links oder rechts. Es gewinnt, wer die höchste Gesamtsumme der gestrichenen Zahlen erzielt.

Überprüfe, welcher der beiden Spieler nach welcher Strategie gewinnen kann bzw. bei gerader Gesamtsumme aller Zahlenwerte mindestens Remis erzwingen kann.

Lösung:

Offenbar wählt jeder Spieler die gleiche Anzahl an Zahlen. Die Gewinnstrategie

ist erstaunlich einfach. Der Spieler, der beginnt, kann folgendermaßen verhindern, dass er verliert:

Er bildet aus den Zahlen zwei gleichgroße Teilmengen, nämlich die Menge A aus den Zahlen, die an erster, dritter, fünfter usw. Stelle von links stehen, und die Menge B aus den Zahlen an gerader Position. Dann berechnet er die Summe der Zahlen in beiden Teilmengen S_A und S_B . Der erste Spieler wählt jetzt die Menge, nehmen wir an A , deren Summe größer (oder zumindest nicht kleiner) als die der anderen ist. Er kann und wird jetzt in seinem ersten (und jedem weiteren Zug) immer eine Zahl aus dieser Menge wählen, denn sowohl am Anfang, als auch nach jedem Zug des anderen Spielers gehört je eine Randzahl zu Menge A und eine zu Menge B , sein Gegner erhält nur die Zahlen aus Menge B .

Ist $S_A \neq S_B$ so gewinnt Spieler 1 stets mit dieser Strategie. Wenn $S_B = S_A$, so kommt es zum Remis, er wird jedoch nie verlieren.

Man kann dieses Spiel auch gut mit Hilfe eines Kartenspiels umsetzen. Eine gerade Anzahl beliebig ausgewählter Karten werden auf einer Linie mit der Bildseite nach oben ausgelegt. Die Zahlwerte können wie üblich 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, As = 1 oder = 11 sowie Bube = 2, Dame = 3 und König = 4 gewählt werden, oder die Spieler einigen sich auf andere Zuordnungen oder sortieren z.B. die Bildkarten Bube, Dame, König aus. (F.R.)

Aufgabe 1167: Größter gemeinsamer Teiler 1

Unter $n + 1$ positiven ganzen Zahlen g_i , die sämtlich $\leq 2n$ sind, gibt es stets mindestens zwei Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist. Trifft diese Behauptung zu? (H.F.)

Lösung:

Es gibt unter den $2n$ Zahlen stets zwei Zahlen g_1 und g_2 vom Abstand 1.

Begründung: n Zahlen, die sämtlich kleiner gleich $2n$ sind, haben jeweils einen Abstand von 2 oder 3 oder mindestens zwei dieser Zahlen haben den Abstand 1.

Im ersten Fall muss eine von diesen n Zahlen verschiedene Zahl g_1 den Abstand 1 von einer anderen Zahl g_2 haben.

Aus $g_1 = g_2 + 1$ bzw. $g_2 = g_1 + 1$ folgt dann, dass 1 der größte gemeinsame Teiler von g_1 und g_2 ist.

Aufgabe 1168: Niemals eine Primzahl

Wenn p eine Primzahl $\neq 3$ ist, dann ist $p^2 + 2$ keine Primzahl. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

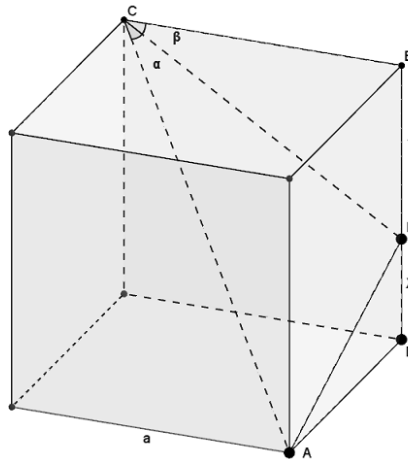
Jede Primzahl ungleich 3 ist nicht durch 3 teilbar. Sie ist also von der Form $p = 3n \pm 1$ für ein ganzzahliges $n \geq 1$. Somit ist $p^2 + 2 = (3n \pm 1)^2 + 2 = 9n^2 \pm 6n + 3 = 3(3n^2 \pm 2n + 1)$ ein Vielfaches von 3, also keine Primzahl, denn der Ausdruck in der Klammer ist stets > 1 .

Die besondere Aufgabe

Welcher Zusammenhang besteht zwischen α und β ?

von C. Sievert

Einen Würfel ist das Dreieck ABC eingeschrieben; dabei wandert B zwischen den Eckpunkten D und E .

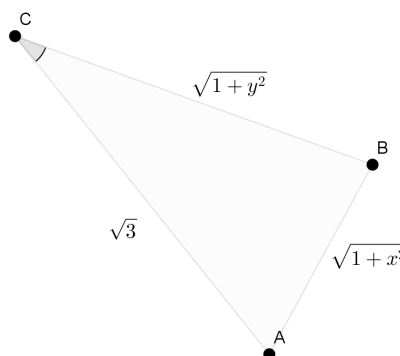


Aufgaben:

- Stelle einen Zusammenhang zwischen α und β in Form einer Gleichung dar.
- Welchen Wert nimmt β an, wenn $\alpha = 45^\circ (40^\circ, 50^\circ)$ ist?
- Welchen Wert nimmt α an, wenn $\beta = 20^\circ (30^\circ, 40^\circ)$ ist?
- Für welchen Winkelwert gilt $\alpha = \beta$?

Lösung

- Wenn man o.B.d.A $a = 1$ setzt, kann man mit Pythagoras argumentieren:



Wenn man den Cosinussatz im $\triangle ABC$ und die Annahme $a = 1$ anwendet, erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad 1 + x^2 = 1 + y^2 - 2 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\alpha),$$

$$(2) \quad x + y = 1.$$

Die erste Gleichung kann man umformen und danach ergibt sich

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - (3 \cos^2(\alpha) - 1)^2}}{3 \cos^2(\alpha) - 1}$$

Im Dreieck $\triangle BEC$ gilt insbesondere $\tan(\beta) = y$, also kann man die Gleichung für y einsetzen und man erhält

$$\tan(\beta) = \frac{1 - \sqrt{1 - (3 \cos^2(\alpha) - 1)^2}}{3 \cos^2(\alpha) - 1}$$

bzw.

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2 \tan(\beta)}{3 \tan^2(\beta) + 3} + \frac{1}{3}}$$

- b) Wenn man die Gleichungen aus Teil a) benutzt, erhält man die folgenden Werte für β :

α	45°	40°	50°
β	15°	$24,75^\circ$	$6,53^\circ$

- c) Wenn man die Gleichungen aus Teil a) benutzt, erhält man die folgenden Werte für α :

α	20°	30°	40°
β	$42,27^\circ$	$37,94^\circ$	$37,57^\circ$

- d) Wenn man wieder die Gleichungen aus Teil a) betrachtet, stellt man folgendes fest:

$$(1') \quad \cos(\alpha) = \frac{1+y}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{3}},$$

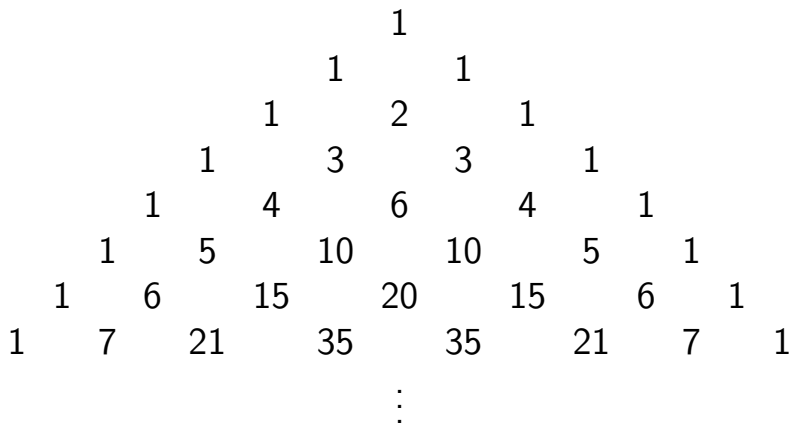
$$(2') \quad \cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Durch Gleichsetzen dieser Gleichungen ergibt sich $y = \sqrt{3} - 1$ sowie $\tan(\beta) = \sqrt{3} - 1$. Somit folgt: $\beta = 32,21^\circ = \alpha$.

Ein arithmetisches Abenteuer

Das Pascaldreieck

von Hartwig Fuchs



Dieses Zahlendreieck, das beliebig weit nach unten fortgesetzt werden kann - wie das gemacht wird, zeigen wir unten - heißt *Pascalsches Dreieck*, manchmal auch *arithmetisches Dreieck*.

Vorformen dieses Dreiecks sind seit langem bekannt. Frühe Erwähnungen finden sich bereits im 10. und 11. Jahrhundert bei dem arabischen Mathematiker Al-Khāsin (gestorben um 961/971) und dem persischen Gelehrten und Dichter Omar Khayyām (1048? – 1131?). Mindestens seit dem 12./13. Jahrhundert kennt es die chinesische Mathematik, wie sich aus der 1303 erschienen Schrift „Kostbarer Spiegel der vier Elemente“ von Chu-shih-chien (geb. um 1280) entnehmen lässt. Durch die Vermittlung arabischer Mathematiker wird es im Abendland bekannt - 1527 hat es Petrus Apian (1495-1552) in seinem Lehrbuch „Eine neue und wolgegründete Unterweisung ...“ erstmals beschrieben. Und 1654 veröffentlicht Blaise Pascal (1623–1662) die erste Untersuchung „Traité du triangle arithmétique“, die sich ausschließlich mit diesem Zahlendreieck befasst, weshalb es dann auch später nach Pascal benannt* ist.

Eine Bildungsregel für das Pascaldreieck

Ursprünglich war das Pascalsches Dreieck nur eine Liste derjenigen Zahlen, die in heutiger Sprechweise als Koeffizienten in den binomischen Formeln auftreten:

$$\begin{aligned}
 (x + y)^0 &= 1 && \rightarrow 1 \\
 (x + y)^1 &= 1 \cdot x + 1 \cdot y && \rightarrow 1 \ 1 \\
 (x + y)^2 &= 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2 && \rightarrow 1 \ 2 \ 1 \\
 (x + y)^3 &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3 && \rightarrow 1 \ 3 \ 3 \ 1 \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

* Das arithmetische Dreieck nennt man im Iran Khayyām-Dreieck; in China heißt es Yang Hui-Dreieck, weil Chu-shih-chien (s.o.) erwähnt, bereits Yang Hui (um 1238–1298) habe es gekannt.

Bei kleinen Exponenten n lassen sich die sog. Binomialkoeffizienten noch leicht berechnen – aber mit wachsendem n wird das zunehmend mühsamer. Es gibt jedoch einen einfachen Ausweg, eine simple additive Regel, mit der man diese Zahlen und damit die zugehörigen Zeilen im Pascalschen Dreieck leicht finden kann, ohne dass man dazu die Binome $(x + y)^n$ ausrechnen muss.

Die Zeilen des Pascalschen Dreieck nummerieren wir mit $0, 1, 2, \dots$. Dann werde das Pascalsches Dreieck konstruiert nach der Regel:

- (1) Die Zeile 0 besteht aus der Zahl 1, die Zeile 2 aus den Zahlen 1 und 1.
Die Zeile $n - 1$ mit $n - 1 \geq 1$ sei:

$$1a_1a_2 \cdots a_{n-2}1$$

Dann ist die Zeile n :

$$a(1 + a_1)(a_1 + a_2) \cdots (a_{n-2} + 1)1$$

Mit Worten: Jede Zahl $\neq 1$ der Zeile n ist die Summe der beiden diagonal über ihr stehenden zwei Zahlen der Zeile $n - 1$, $n - 1 \geq 1$. Zur Rechtfertigung dieser Regel zeigen wir, dass für das mit ihr konstruierte Pascalsche Dreieck gilt:

- (2) Jede Zeile n des Pascalschen Dreiecks, wobei $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ist, besteht aus den Koeffizienten der n -ten binomischen Formel.

Aus dem Beispiel oben ergibt sich: die Zeilen n , $n = 0, 1, 2$ und 3 , des Pascalschen Dreiecks sind nach der Regel gebildet und sie bestehen aus den Koeffizienten von $(x + y)^n$. Annahme: die Zahlen der Zeile $n - 1$, $n - 1 \geq 3$, seien mit der Regel (1) berechnet und sie seien die Koeffizienten der $(n - 1)$ -ten binomischen Formel.

Dann gilt (2) auch für die Zeile n . Dann ist: $(x + y)^{n-1} = 1 \cdot x^{n-1} + a_1x^{n-2}y + a_2x^{n-3}y^2 + \cdots + a_{n-2}xy^{n-2} + 1 \cdot y^{n-1}$, dann folgt aus: $(x + y)^n = (x + y)^{n-1}(x + y)$, dass:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= (x + y)^{n-1}(x + y) \\ &= 1 \cdot x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + xy^{n-1} \\ &\quad + 1 \cdot x^{n-1}y + a_1x^{n-2}y^2 + a_2x^{n-3}y^3 + \cdots + a_{n-2}xy^{n-1} + 1 \cdot y^n \\ &= 1 \cdot x^n + (1 + a_1)x^{n-1}y + (a_1 + a_2)x^{n-2}y^2 + \cdots \\ &\quad + (1 + a_{n-2})xy^{n-1} + 1 \cdot y^n\end{aligned}$$

Aus der letzten Summe folgt die Gültigkeit von (2) für n .

Zeileneigenschaften des Pascaldreiecks

Pascal hat in seinem „Traité...“ 19 Eigenschaften des arithmetischen Dreiecks nachgewiesen und er bemerkt dazu sinngemäß: Ich habe mehr Eigenschaften nicht genannt als ich hier hergeleitet habe. Tatsächlich ist das Pascalsche Dreieck wegen

seiner schier unerschöpflichen Vielfalt von Beziehungen zwischen seinen Zahlen eine wahre Spielwiese und Fundgrube für Zahlen-Fans geworden.

Symmetrie des Pascalschen Dreiecks

- (3) Das Pascalsche Dreieck ist symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse
 $1 \ 2 \ 6 \ 20 \ 70 \cdots$ (vgl. Fig. 1).

Für die ersten 10 Zeilen in Figure 1 gilt (3) und für die Zeilen $n - 1$, $n - 1 \geq 10$ sei (3) bewiesen. Dann gilt (3) für die Zeile n . Denn ist die Zeile $n - 1$:

$$1 a_1 a_2 \cdots a_2 a_1 1$$

dann lautet die Zeile n :

$$1(1 + a_1)(a_1 + a_2) \cdots (a_1 + a_2)(1 + a_1)1$$

Zeilensummen im Pascalschen Dreieck

- (4) Die Summe S_n der Zahlen in der Zeile n des Pascalschen Dreieck, $n = 0, 1, 2, \cdots$, beträgt 2^n .
 (5) Die Summe aller Zahlen in den Zeilen $n - 1$ des Pascalschen Dreiecks, mit $n - 1 = 0, 1, 2, \cdots$ ist um 1 kleiner als die Zeilensumme S_n der Zeile n .

Die Behauptung (4) gilt für die Zeilen $n = 0, 1, 2, \cdots, 9$ der Figur 1. Es sei nun bewiesen, dass die Zeilen $n - 1$, $n - 1 \geq 9$, die Zeilensumme $S_{n-1} = 2^{n-1}$ hat.

Die Zeile $n - 1$ sei $a_0 \ a_1 \ a_2 \cdots a_{n-2} \ a_{n-1}$. Dann ist die Zeile n :

$$a_0 \ (a_0 + a_1) \ (a_1 + a_2) \cdots (a_{n-2} + a_{n-1}) \ a_n$$

mit $a_{n-1} = a_n$. Aus $S_{n-1} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 2^{n-1}$ folgt:

$$S_n = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_{n-1} = 2S_{n-1} = 2^n.$$

Wegen (4) ist $S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1} = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, während $S_n = 2^n$ ist, was (5) beweist.

- (6) Wenn $a_0 \ a_1 \ a_2 \cdots a_{n-1} \ a_n$ die Zeile n ist, $n = 1, 2, 3, \cdots$, dann gilt:
 für gerades n ist $a_0 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = 2^{n-1}$.
 Für ungerades n ist $a_0 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_n = 2^{n-1}$.

(6) gilt für $n = 1$ wegen $a_0 = a_1 = 1 = 2^0$ und für $n = 2$ wegen $a_0 + a_2 = 1 + 1 = 2^1$ und $a_1 = 2^1$. Es sei nun (6) bewiesen für $n - 1 \geq 1$. Dann sei die Zeile $n - 1$:

$$b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ \cdots \ b_{n-2} \ b_{n-1} \ b_n$$

mit $b_0 = b_n = 1$ und der Zeilensumme 2^{n-1} . Wenn n gerade ist, dann gilt für die Zeile n mit $a_0 = b_0$ und $b_{n-1} = a_n$:

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 + \cdots + a_n &= b_0 + (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{n-3} + b_{n-2}) + b_{n-1} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Daraus folgt: $a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 2^{n-1}$, weil $S_n = 2^n$ die Zeilensumme der Zeile n ist wegen (4). Für ungerades n beweist man (6) ganz entsprechend.

(7) Wenn $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ die Zeile n ist, $n = 1, 2, 3, \dots$, dann gilt: $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n = 0$.

(7) ergibt sich unmittelbar aus der Aussage (6).

Spalteneigenschaften des Pascaldreiecks

Die „schräge“ Zahlenkolonne von rechts oben nach links unten aus lauter Einsen sowie jede zu ihr parallele Zahlenfolge im Pascalschen Dreieck nennen wir eine Spalte, die wir mit $0, 1, 2, 3, \dots$ nummerieren (vgl. Figur 1).

Spaltensummen

In der Figur 1 fällt ein elementarer additiver Zusammenhang zwischen Zahlen benachbarter Spalten auf. Beispiel:

(8) Für $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt: Die Summe der ersten m Zahlen ($m \geq 2$) der Spalte n ist die m -te Zahl der Spalte $n + 1$.

Nachweis: Für ein beliebiges n seien $c_1, c_2, c_3, \dots$ und $d_1, d_2, d_3, \dots$ die Zahlen der Spalten n und $n + 1$. Damit lautet dann (8) so:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_m = d_m \quad \text{für } m = 2, 3, 4, \dots$$

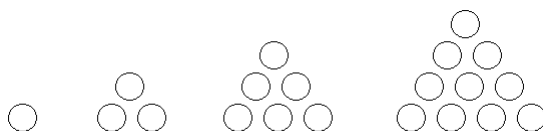
Zunächst gilt (vgl. Figur 1): Die Zahlen c_m und d_{m-1} sind benachbart in der Zeile n . Daraus folgt für beliebiges $n \geq 0$ und für $m = 2$: wegen $c_1 = 1$, $c_2 = n$ und $d_2 = n + 1$ ist $c_1 + c_2 = d_2$.

Es sei nun (8) für ein $m-1 \geq 2$ bewiesen. Es ist also $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{m-1} = d_{m-1}$. Für die in Zeile m benachbarten Zahlen c_m und d_{m-1} gilt nach (1): $d_{m-1} + c_m = d_m$, so dass $(c_1 + c_2 + \dots + c_{m-1}) + c_m = d_m$ ist, was (8) beweist.

Dreieckszahlen im Pascalsche Dreieck

Die Spalten 0 und 1 des Pascalschen Dreiecks sind für uns nicht interessant - nicht jedoch die Spalten n mit $n \geq 2$.

Die Anzahlen D_n der Kringel in Figur 2 mit $n = 1, 3, 6, 10$:



bilden die Folge $1, 3, 6, 10, \dots$ der Dreieckszahlen mit dem Bildungsgesetz $D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Berechnet man die ersten 8 Dreieckszahlen, so stellt man fest: sie stimmen überein mit den 8 ersten Zahlen der Spalte 2 im Pascalschen Dreieck. Es gilt sogar:

- (9) Die Zahlen c_n der Spalte 2 sind die Dreieckszahlen $D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Die Behauptung (9) gilt für $n = 1, 2, 3, \dots, 8$. Für ein $n-1 \geq 7$, sei $c_{n-1} = D_{n-1}$ bewiesen. Nun ist Zeile n : $1 \ n \ c_{n-1} \dots$ (vgl. Figure 1) und Zeile $n+1$: $1 \ (n+1) \ c_n + \dots$. Mit der Regel (1) und der Induktionsvoraussetzung gilt daher:

$$c_n = n + c_{n-1} = n + D_{n-1} = n + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n(n+1) = D_n$$

Mit (9) kann man nun eine augenfällige Eigenschaft der Zahlen c_n in Spalte 2 leicht beweisen.

- (10) Für $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt: Die Summe $c_n + c_{n+1}$ zweier in Spalte 2 aufeinander folgende Zahlen ist eine Quadratzahl.

Wegen (9) ist:

$$c_n + c_{n+1} = D_n + D_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+n+2) = (n+1)^2$$

Tetraederzahlen im Pascalschen Dreieck

Wenn man die Kringel in der Figure 2 als gleich große Kugeln auffasst, dann kann man mit ihnen für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$ eine dreiseitige Pyramide (*Tetraeder*) P_n aus n Kugelschichten mit $1, 3, 6, \dots, D_n$ Kugeln bauen.

Die Anzahlen der Kugeln in diesen Pyramiden P_n bilden die Folge der Tetraederzahlen T_n mit

$$T_1 = D_1 = 1, \quad T_2 = T_1 + D_2 = 4, \quad T_3 = T_2 + D_3 = 10, \dots, \quad T_n = T_{n-1} + D_n$$

Die ersten 7 Tetraederzahlen kommen alle in der Spalte 3 des Pascalschen Dreiecks vor (siehe Figure 1) - aber nicht nur diese.

- (11) Die Zahlen der Spalte 3 sind die Tetraederzahlen $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Zum Nachweis von (11) zeigen wir zunächst: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Für $n = 1$ ist $T_1 = 1 = T_n = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3$. Es sei nun $T_{n-1} = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ bewiesen. Dann folgt mit $D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, dass:

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + D_n \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n-1+3) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Nun zu (11). Für $n = 1, 2, 3, \dots, 7$ gilt (11) (siehe oben). Es sei nun bewiesen, dass T_{n-1} die $(n-1)$ -te Zahl der Spalte 3 ist, $n-1 \geq 6$. Da die Zahlen D_n und T_{n-1}

in der Zeile $n + 1$ benachbart sind, folgt mit (1), dass die Zahl $D_n + T_{n-1} = T_n$ das n -te Element der Spalte 3 ist. Ohne Beweis teilen wir mit:

(12) Es seien $c_n, n = 1, 2, 3, \dots$, die Zahlen der Spalte 4. Dann gilt $c_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Eine zweite Bildungsregel für das Pascaldreieck

Die Bildungsregel (1) für das Pascalsche Dreieck hat ein nicht unwesentliches praktisches Defizit: die Berechnung eines Elements $\neq 1$ und $\neq n$ der Zeile n mit einem großen n setzt voraus, dass man bereits von jeder Vorgängerzeile mindestens 3 Zahlen kennt. Deshalb ist es wünschenswert, eine Regel zur Bestimmung eines beliebigen Elements des Pascalschen Dreieck zu haben, die ohne Rückgriff auf frühere Elemente auskommt. Petrus Apian beschreibt bereits in seinem Buch von 1527 (siehe oben) eine solche Regel, die wir hier in heutiger Notation zusammenfassen.

Die $n + 1$ Elemente der Zeile $n, n \geq 0$, seien von links nach rechts mit $\binom{n}{k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$ bezeichnet. Dann ist jedes Element des Pascalschen Dreieck berechenbar mit der Regel:

(13) Für das erste und das letzte Element der Zeile $n, n \geq 0$, gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Die übrigen Elemente $\binom{n}{k}, k = 1, 2, \dots, n - 1$ sind:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

(13) trifft zu für $n = 0, 1$ und 2- so ist z. B. $\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1$. Es sei (13) bewiesen für $n - 1 \geq 1$. Dann sind $\binom{n-1}{k-1}$ und $\binom{n-1}{k}$ benachbarte Zahlen in der Zeile $n - 1$ für $k - 1 = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Nach der Regel (1) ist dann $\binom{n}{k}$ das k -te Element der Zeile n wegen:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n-1}{k-1} \frac{k}{k} + \binom{n-1}{k-1} \frac{n-k}{k} \\ &= \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{k}{k} + \frac{n-k}{k} \right) \\ &= \binom{n-1}{k-1} \frac{n}{k} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Mit (13) erhält man eine sehr einprägsame Form des Pascalschen Dreiecks mit der Möglichkeit, jedes einzelne seiner Elemente unabhängig von anderen Elementen

bestimmen zu können.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \\
 & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & &
 \end{array}$$

Aus (2) wissen wir, dass die Zahlen der Zeile n die Koeffizienten der n -ten binomischen Formel sind. Mit (13) lautet daher diese wichtige Formel:

(14) Für $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n.$$

Mit (13) lassen sich weitere Sätze über das Pascalsche Dreieck herleiten – zum Beispiel (15). In der Kombinatorik wird die Aussage bewiesen:

Aus einer n -elementigen Menge M kann man k Elemente auf $\binom{n}{k}$ Arten auswählen. Also hat M genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen. Daher gilt:

(15) In der Zeile n , $n = 0, 1, 2, \dots$ des Pascalschen Dreieck sind für $k = 0, 1, 2, \dots, n$ die Anzahlen $\binom{n}{k}$ der k -elementigen Teilmengen einer Menge M mit n Elementen angegeben. Wegen (4) hat M insgesamt 2^n Teilmengen; von diesen haben nach (6) jeweils 2^{n-1} Teilmengen geradzahlig viele ungeradzahlig viele Elemente.

Eine dritte Bildungsregel für das Pascaldreieck

Mit der Definition der Zahlen $\binom{n}{k}$ in (13) gilt: Für $n \geq 0$ ist $\binom{n}{0} = 1$, für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{1} &= n, \\
 \binom{n}{2} &= \frac{1}{2}n(n-1), \\
 \binom{n}{3} &= \frac{1}{2 \cdot 3}n(n-1)(n-2), \\
 \binom{n}{4} &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}n(n-1)(n-2)(n-3).
 \end{aligned}$$

Mit (9),(10) und (11) erhält man damit folgende Liste der Bildungsregeln der Spalten k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$ aus der man ein Muster für die Bildungsregeln der Spalten k , $k \geq 5$, erkennt:

Spalte k	Spalte 0	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Bildungsregel für Spalte k	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n+1}{2}$	$\binom{n+2}{3}$	$\binom{n+3}{4}$

- (17) Die Zahlen der Spalte 0 sind $\binom{n}{0}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Zahlen der Spalte k , $k \geq 1$, sind $\binom{n+(k-1)}{k}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Primzahlen im Pascaldreieck

Da wir nicht die Absicht hegen, mit Pascal gleich zu ziehen noch gar ihn zu übertreffen, schließen wir mit der 18. Eigenschaft des Pascalschen Dreiecks – einer echten mathematischen Rarität.

- (18) Eine Zahl p ist dann und genau dann eine Primzahl, wenn sie Teiler jeder Zahl $\neq 1$ der Zeile p des Pascalschen Dreiecks ist.

Der Beweis ist relativ einfach – versuche ihn selbst zu finden. Das Besondere an diesem Satz ist, dass er wie der berühmte Satz von Wilson ** zu den ganz wenigen mathematischen Aussagen gehört, die ausschließlich für Primzahlen gelten.

Bemerkung

In der „Diagonale“ 1, 6, 21, 56, ... findet ihr die Zahlen 126 und 252. Interessanterweise verbirgt das Dreieck auch sehr schwere Probleme, wie etwa dieses: gibt es in der gleichen Diagonale weitere 2 Zahlen (nicht unbedingt benachbart innerhalb der Diagonale), die sich auch wie 1 : 2 verhalten? Welchen Bezug es hier zum Journal Bild der Wissenschaft gibt, werden wir in einem der Folgehefte erläutern. (F.R.)

Mathematische Entdeckungen

Binäres Sudoku

Auf wie viele Weisen kann man n Kreuzchen in ein großes Karopapier zeichnen, so dass in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Anzahl von Kreuzchen sind? Dabei sind Lösungen, die durch Spiegeln, Drehen oder Vertauschen zweier Zeilen oder zweier Spalten auseinander hervorgehen, nur einmal zu zählen.

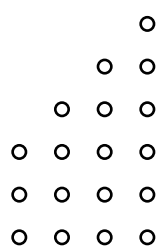
(S. Rosebrock)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2017 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 123

In Heft 123 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

** Der Satz von Wilson besagt: Die Zahl p ist eine Primzahl dann und nur dann, wenn p ein Teiler von $(p-1)! + 1$ ist.



Aus Münzen lassen sich Treppen bauen, siehe zum Beispiel die nebenstehende Abbildung für 18 Münzen mit vier Stufen. Die Anzahl der Stufen soll dabei mindestens zwei betragen. Untersuche nun:

- Welche Zahlen sind Treppenzahlen?
- Wie viele verschiedene Treppen kann ich mit einer gegebenen Zahl bauen?
(CHA)

Ergebnisse

- Es sind alle natürlichen Zahlen außer den Zweierpotenzen Treppenzahlen (siehe b).
- Die Treppen werden gebildet, indem man an ein Dreieck aus $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$ Münzen noch ein Rechteck aus $n \cdot a$ Münzen dranhängt, wobei n eine natürliche Zahl größer oder gleich 2 (mindestens 2 Stufen) und a eine nichtnegative, ganze Zahl ist. Für eine Treppenzahl t gilt dann

$$t = n \cdot a + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+2a+1)}{2}$$

und somit $2t = n(n+2a+1)$. Da $n \geq 2$ gilt, ist t größer als 2. Da n und a sonst unter den natürlichen Zahlen frei wählbar sind, muss $2t$ nur Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl (außer 1) sein, denn n und $(n+2a+1)$ können nicht dieselbe Parität haben. Da Zweierpotenzen keine ungeraden Zahlen außer 1 als Teiler haben, können sie also keine Treppenzahlen sein. Da es keine geraden Primzahlen außer 2 gibt, haben alle anderen Zahlen in ihrer Primfaktorzerlegung einen ungeraden Faktor und sind somit Treppenzahlen. Sei p eine ungerade Primzahl und hat t die Primfaktorzerlegung

$$t = 2^x \cdot P_1^{x_1} P_2^{x_2} \dots P_m^{x_m},$$

so gibt es $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_m + 1) - 1$ verschiedene Möglichkeiten eine Treppe aus t Münzen zu bauen. Denn jede ungerade Primzahl p_i kann in

$$2t = 2^{x+1} \cdot P_1^{x_1} P_2^{x_2} \dots P_m^{x_m}$$

0 bis x_i -mal in dem geraden Faktor enthalten sein. Es gibt also bei jeder ungeraden Primzahl $(x_i + 1)$ Möglichkeiten. Es können aber nicht alle Primzahlen in dem geraden Faktor vorhanden sein, da der ungerade sonst 1 wäre. 2^{x+1} muss sowieso in dem geraden Faktor enthalten sein. Es gibt also $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_m + 1) - 1$ Möglichkeiten $2t$ als Produkt einer ungeraden und einer ungeraden Zahl größer als 1 darzustellen und somit genauso viele verschiedene Treppenzahlen, die man aus t Münzen bauen kann.

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Maximilian Göbel, Maximilian Hauck, Tobit Roth, Adriana Stenger, Marcel Wittmann, Theresa Schöche.

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite ??

Folgenglied gesucht

Wir führen eine Struktur in der Folge ein:

$$(1), (2, 4), (3, 6, 9), \dots, (n, 2n, 3n, \dots, n \cdot n), \dots$$

Nun sieht man: die n -te Klammer enthält n Zahlen, denn es gibt n ganzzahlige Vielfache von n , die $\leq n \cdot n = n^2$ sind. Daher ist n^2 die $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ -te Zahl der Folge und damit gleichbedeutend die $(\frac{1}{2}n(n+1))$ -te Zahl. Nun ist 63^2 die $(\frac{1}{2}63 \cdot 64)$ -te Zahl, also die 2016-te Zahl in der Folge. Also ist 64 die gesuchte Zahl, denn nach 63^2 lauten die nächsten Folgenglieder $64, 2 \cdot 64, 3 \cdot 64, \dots$.

Eine Abschätzung

Man zeigt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2016}{2015} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2014}{2015} \cdot 2016$$

und somit:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2016}{2015} < 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 2016 < 2017.$$

Quadratzahlen

Es sei $S = (k+1) + (k+2) + \dots + (k+2017)$. Wegen $1 + 2 + 3 + \dots + 2017 = \frac{1}{2} \cdot 2017 \cdot 2018$ gilt:

$$S = 2017 \cdot 1009 + 2017k = 2017(1009 + k)$$

Da 2017 eine Primzahl ist, kann S nur dann eine Quadratzahl sein, wenn $1009 + k = n^2 \cdot 2017$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$, also $k = n^2 \cdot 2017 - 1009$ ist. Es gibt daher unendlich viele Quadratzahlen S .

Für $n = 1$, also $k = 1008$ erhält man die kleinste Quadratzahl 2017^2 .

Summe

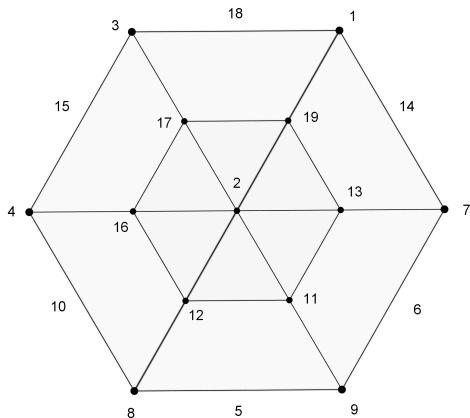
Die Nenner der Brüche in S sind nach dem Muster $a(a+3)$ gebildet. Wegen

$$\frac{1}{a(a+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+3} \right)$$

kann man S umformen:

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{3} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2014} - \frac{1}{2017} \right) \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2017} = \frac{2016}{2017}. \end{aligned}$$

Zum Jahresanfang



Unser Wunsch für alle MONOID-Leser(innen): EIN SCHÖNES NEUES JAHR.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik – von Martin Mattheis

Schleicher, Dierk/Lackmann, Malte: „Eine Einladung in die Mathematik“

Die Idee zu dem von Dierk Schleicher und Malte Lackmann herausgegebenen Band „Eine Einladung in die Mathematik, Einblicke in aktuelle Forschung“ entstand bei den Feierlichkeiten zum 50. Jubiläum der internationalen Mathematik Olympiade, die 2009 in Bremen stattfand. Die beiden Herausgeber, Hauptorganisator und Teilnehmer der IMO, haben es geschafft weltweit führende Forschungsmathematiker darunter drei Träger der Fields-Medaille dazu zu bringen in einem kurzen Beitrag über ihr Forschungsgebiet zu berichten.

Die vierzehn Kapitel des Buches sind von daher unabhängig voneinander zu lesen und unterscheiden sich je nach Autor und Thema in Niveau und Verständlichkeit und geben interessante Einblicke in die unterschiedlichsten mathematischen Teilgebiete. Die Artikel sind keine leichte Lektüre die man nebenbei lesen kann, sondern verlangen die volle Aufmerksamkeit des Lesers, der dafür mit interessanten Einblicken in Hochschul- und Forschungsmathematik belohnt wird.

Die anvisierte Zielgruppe sind nach der Einleitung der Herausgeber primär „junge Leute, die am Ende der Schulzeit oder am Beginn des Studiums stehen und die Mathematik in der Schule (und vielleicht in Mathematikwettbewerben) kennen und schätzen gelernt haben“.

Eine weitere Zielgruppe könnten auch Mathematiklehrer an Gymnasien sein, die sich entweder selbst weiterbilden wollen oder eine Antwort auf die häufige Schülerfrage „Gibt es denn in der Mathematik überhaupt noch etwas Neues zu entdecken?“ nicht länger schuldig bleiben wollen.

Fazit: Je nach Vorkenntnissen der Leser erscheinen manche Kapitel trotz der von den Herausgebern anvisierten Zielgruppe Schülerinnen und Schülern eventuell zu schwer, diese können aber beim Lesen getrost überblättert werden, ohne den Spaß an der Mathematik zu verlieren. *Gesamtbeurteilung:* gut ☺☺



Angaben zum Buch:

Schleicher, Dierk; Lackmann, Malte (Hrsg.): Eine Einladung in die Mathematik, Einblicke in aktuelle Forschung, Springer Spektrum 2013, ISBN 978-3-642-25797-1, PB 228 Seiten

Art des Buches: Mathematisches Fachbuch

Mathematisches Niveau: schwer verständlich

Altersempfehlung: Ende der gymnasialen Oberstufe

Die MONOID-Preisträger 2016

Das Goldene M: Maximilian Göbel (Schloss Hansenberg)

MONOID-Fuchs: Sönke Schneider (Gymnasium Oberursel)

Sonderpreis: Maximilian Hauck (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey)

Forscherpreise: Silas Rathke (Alexander-von-Humboldt-Gymnasium, Neumünster), Adriana Stenger (Karolinen-Gymnasium, Frankthal) und Marcel Wittmann (Karolinen-Gymnasium, Frankthal)

1. Preise: Matthias Bergen, Daniel Fink, Maximilian Göbel, Maximilian Hauck, Sarah Kästner, Dennis Mayle, Silas Rathke, Sönke Schneider, David Storzer, Marcel Wittmann.

2. Preise: Miriam Büttner, Torben Bürger, Aleksandra Herbst, Sebastian Braun, Patrick Riebe, Virginia Fox, Melanie Schuy, Kristin Teichert.

3. Preise: Jonas Ahlfeld, Lea Daum, Fabian Liepach, Vinh-An Pham, Katharina Rößler, Jonas Schneider, Theresa Schöche, Adriana Stenger.

MONOID-Jahresabonnements 2016: Gina Bader, Lukas Born, Mareike Bühler, Aleksandra Burchala, Raphael Gaedtke, Mia Großkreuz, Paulina Herber, Lorenz Hübel, Jacob Huck, Tobias Jedich, Henri Lunau, Jara Müller-Kästner, Tobit Roth, Verena Rüsing, Justin Sehl, Frauke Stoll, Victoria Strunck, Simon Waldek, Melanie Weibrich, Sandra Wingender, Rabea Zimmermann.



Die MONOID-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2015/2016 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet, die Forscherpreise von Herrn Dr. Genannt, der Sonderpreis von Casio. Der Preis für den Träger des MONOID-Fuchs von Herrn Mattheis und Herrn Dr. Genannt. Der Preis für den Träger des Goldenen M wurde gestiftet vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und dem Institut für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Die MONOID-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 127

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 5: Katharina Beck 13, Julia-Michelle Butter 3, Tom Erkens 4, Lars Schall 6, Fabian Thater 7;

Kl. 6: Linus Kemmeter 7, Nils Koch 6;

Kl. 7: Lukas Born 13, Lea Daum 9, Paul Schall 13, Jonas Schneider 9, Trevor Schöller 9, Victoria Strunk 13;

Kl. 9: Torben Bürger 9,5, Virginia Fox 9,5, Maximilian Hauck 27, Sarah Kästner 12;

Kl. 13: Katharina Rößler 15.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: **Kl. 13:** Nils Werner 12.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Privates Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg:

Kl. 6: Tobit Roth 8;

Kl. 11: Annika Bünnagel 8;

Kl. 12: Frauke Stoll 8.

Duisburg, FHG: **Kl. 7:** Lena Hirtz 2.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

Kl. 7: Noah Böhm 3, Olivia Stachow 6;

Kl. 13: Adriana Stenger 8, Marcel Wittmann 20.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule:

Kl. 11: Patrick Riebe 19.

Friedberg, Augustinerschule:

Kl. 7: Aleksandra Herbst 18.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:

Kl. 10: Maximilian Göbel 22.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 11: Melina Mayle 21.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:

Kl. 8: Beatrice Popescu 10.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:

Kl. 9: Dennis Mayle 23,5.

Linz, Martinus Gymnasium:

Kl. 6: Simon Waldek 6.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium

Kl. 5: Gregor Salaru 20.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:

Kl. 12: Silas Rathke 22.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

Kl. 5: Jonathan Friedel 7,5, Daniel Roussev 9, Esther Schmeding 15;

Kl. 8: Sönke Schneider 40, Arne Witt 9;

Kl. 9: Lennard Freud 17;

Kl. E1: Kristin Teichert 17, Jan Wabnig 21;

Tangermünde, Diesterweggymnasium:

Kl. 7: Miriam Büttner 18.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:

Kl. 7: Raphael Gaedtke 9.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:

Kl. 6: Mareike Bühler 7.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Verena Lucas, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Emily Searle-White

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Inhalt

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 128	3
Neue Mathespielereien	5
Neue Aufgaben	7
Gelöste Aufgaben aus MONOID 128	8
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	11
Rubrik der Löser und Löserinnen	12
Redaktion	13
Impressum	14

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>