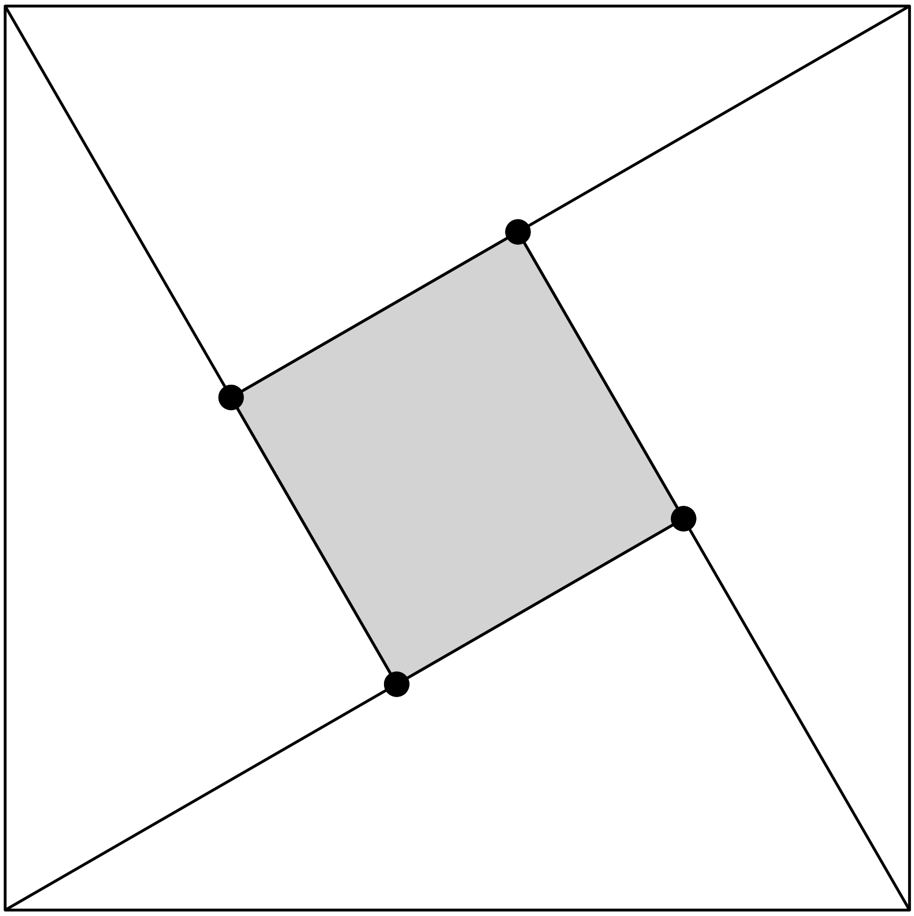
Jahrgang 37 Heft 129 März 2017

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.05.2017.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erschienen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“. Mehr darüber könnt Ihr auf der Monoid-Webseite lesen.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

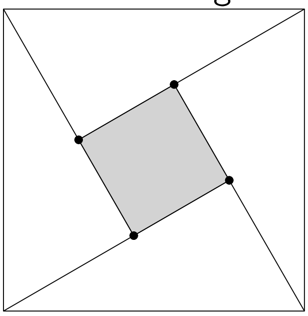
Beweis mit einem Wort

gefunden von Hartwig Fuchs

Der Satz des Pythagoras lautet: In einem rechtwinkligen Dreieck, in dem die Hypotenuse die Länge c und die Katheten die Längen a und b haben, gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Es gibt Hunderte von Beweisen für diesen wichtigen Satz. Der bedeutende indische Mathematiker Bhāskara II (114-nach 1191) hat einen der kürzesten Beweise entwickelt: er besteht aus einer geometrischen Figur und einem auffordernden Wort.

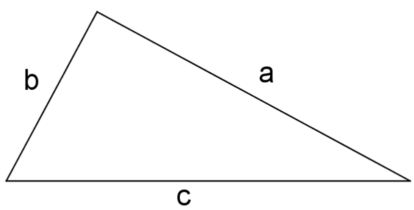


Sieh!

Kommentar

Ganz so unmittelbar ist der Satz des Pythagoras nicht aus der Figur ablesbar, wie Bhāskara mit seinem ein-wortigen Hinweis glauben machen will - man benötigt dazu schon ein wenig Geometrie und Algebra.

Zunächst ist zu begründen: Sind die vier rechtwinkligen Dreiecke der Figur kongruent, dann ist das schraffierte Viereck ein Quadrat - und umgekehrt:
ist das schraffierte Viereck ein Quadrat, dann sind die vier Dreiecke rechtwinklig und kongruent. Weiter muss man eine Flächenformel für Quadrate und eine *geeignete* Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke kennen.



Die Seitenlängen der rechtwinkligen Dreiecke in Bhāskaras Quadrat seien a, b und c wie neben stehend. Dann *sieht* man, dass für Bhāskaras Figur gilt:

a) Die Fläche F des großen Quadrats ist $F = c^2$;

b) Jedes der vier Dreiecke hat die Fläche $\frac{1}{2}ab$;

c) Die Fläche des schraffierten Quadrats ist $(a-b)^2$. Wegen (2) und (3) gilt dann

$$F = 4\frac{1}{2}ab + (a-b)^2$$

und daraus folgt mit der binomischen Formel

d) $F = a^2 + b^2$.

Aus dem Vergleich von (1) und (4) erhält man: $c^2 = a^2 + b^2$, was zu beweisen war. Bhāskara hat also schon einige Überlegungen in seinem Wort „Sieh!“ komprimiert.

Eine Variante der Leibniz-Reihe

gefunden von Hartwig Fuchs

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) bewies die berühmte Formel

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

Zeige, dass aus (1) folgt:

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \cdots = \frac{\pi}{8}. \tag{2}$$

Lösung

Wegen

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{2}{(n+1)^2-1}$$

ist

$$\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}).$$

So ergibt sich mit (1):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \cdots \\
&\qquad = \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \cdots \\
&\qquad = \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Die Anwendung des Assoziativ- und des Distributivgesetzes auf die Reihe (1) sind erlaubte Operationen.

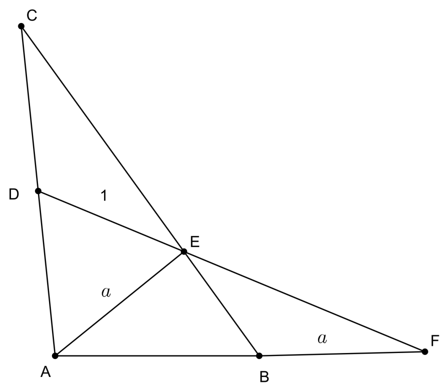
Aus den Archiven der Mathematik
Ein vergessenes Problem des Isaac Newton

von Hartwig Fuchs

Isaac Newton (1643-1727) gilt als einer der bedeutendsten Naturwissenschaftler, der je gelebt hat. Und auch in der Mathematik hat er grundlegende Fortschritte erzielt. So ist er - neben Gottfried W. Leibniz (1646-1716) - einer der Begründer der Infinitesimalrechnung. Sein Beitrag zur Algebra ist das Buch „Arithmetica

universalis“, erschienen 1707, in dem er den algebraischen Wissensstand seiner Zeit und seine eigenen Forschungsergebnisse beschreibt.
In dieser Schrift findet sich auch ein geometrisches Problem, dessen algebraische Lösung er zwar angibt; aber er sagt nicht, auf welchem Weg er dahin gelangt ist. Diese Lücke soll im Folgenden geschlossen werden.

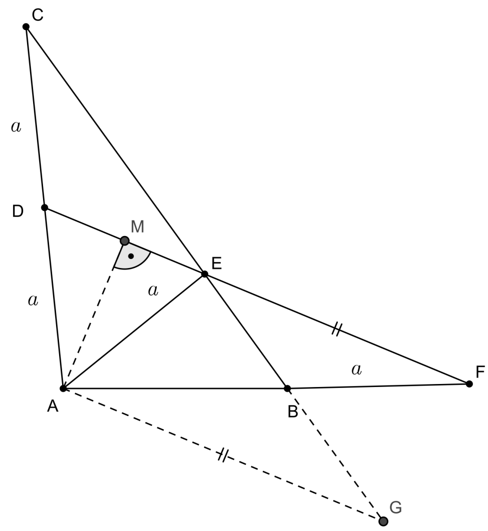
Newtons Problem



Gegeben sie das Dreieck ABC, dessen Seite AC die Länge $2a$ hat. Weiter sei AED ein Dreieck, dessen Ecke D Mittelpunkt der Strecke AC ist, und für dessen Ecke E gilt: $|AE| = a$ und $DE = 1$. Die Verlängerungen von AB und DE schneiden sich in einem Punkt F. Newtons Behauptung:

(1) Wenn $|FB| = |CD|$ ist, dann gilt $|AB| = \sqrt[3]{|AC|}$.

Lösung von Newtons Problem - mit einer Lücke



Man verlängere CB bis zum Schnittpunkt G mit der Parallelen zu DF durch A. Dann sind die Dreiecke CAG und CDE änhnlich. Mithin gilt

$$\frac{|AG|}{|DE|} = \frac{|CA|}{|CD|} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Wegen $|DE| = 1$ folgt

(2) $|AG| = 2$.

Da $\angle GAB = \angle BFE$ und $\angle ABG = \angle EBF$ sind die Dreiecke BFE und BAG ähnlich. Somit gilt

$$\frac{|EF|}{|FB|} = \frac{|AG|}{|AB|} = \frac{2}{|AB|}.$$

Daher ist

(3) $|EF| = \frac{2|FB|}{|AB|}$.

Es sei nun M der Mittelpunkt der Strecke DE. Dann ist AM eine Seitenhalbierende im gleichschenkligen Dreieck AED mit $|DM| = |ME| = \frac{1}{2}$ und $AM \perp DE$. Daher gilt im rechtwinkligen Dreieck AMF

(4) $|AF|^2 = |AM|^2 + |MF|^2$ mit $|AM|^2 = a^2 - (\frac{1}{2})^2$, $|MF| = \frac{1}{2} + |EF|$.

Nun ist $|CD| = a$ und $|FB| = a$ nach Voraussetzung. Mit $|AB| = x$ folgt aus (3) dass $|EF| = 2a : x$. Damit lautet (4): $(x + a)^2 = (a^2 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} + \frac{2a}{x})^2$. Nach Umformung ergibt sich daraus

(5) $x^4 + 2ax^3 - 2ax - 4a^2 = 0$ mit der Lösung $x = -2a$.

Man kann daher (5) so schreiben: $(x + 2a)(x^3 + rx^2 + sx + t) = 0$. Rechnet man das Produkt aus und vergleicht seine Koeffizienten mit denen in (5), so folgt: $r = s = 0$ und $t = -2a$. Daher ist (5) äquivalent mit

(6) $(x + 2a)(x^3 - 2a) = 0$.

Geometrisch kommt als Lösung von (6) nur $x = \sqrt[3]{2a}$ in Frage - also ist $|AB| = \sqrt[3]{|AC|}$, wie Newton in (1) behauptete.

Vollständige Lösung von Newtons Problem

Die Herleitung der Aussage (1) ist so elementar, dass man sich fragen darf, warum sie nicht von Newton angegeben wurde. Dazu muss man wissen: Newton stand ganz in der zu seiner Zeit verpflichtenden euklidischen geometrischen Tradition, die seine Aufgabe erst dann als vollständig gelöst gelten ließ, wenn er das in Frage stehende Dreieck ABC konstruiert hatte - und zwar allein mit Zirkel und Lineal.

Nun hat Pierre Wantzel (1814-1848) lange nach Newton bewiesen, dass eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ - die beim Problem der Würfelverdoppelung die Hauptrolle spielt - nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Dann aber ist im Allgemeinen* wegen $\sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{a}$ auf diese Weise auch eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2a}$ nicht konstruierbar.

Deshalb musste Newtons Versuche misslingen, das Dreieck ABC seines Problems zu konstruieren - ohne dass es ihm möglich war, einen Grund dafür zu erkennen. Und so hat er ohne Beweis nur sein algebraisches Ergebnis (1) mitgeteilt. Sollten sich doch andere um eine geometrische Herleitung bemühen!

Monoidale Knobelei

gefunden von Hartwig Fuchs

M		D
i	NO	
	O	24

Ersetze die einzelnen Buchstaben durch einziffrige natürliche Zahlen > 0 sowie NO* durch eine zweiziffrige Zahl und füge in die leeren Felder höchstens zweiziff-

* Die Einschränkung „im Allgemeinen“ besagt, dass in Ausnahmefällen - zum Beispiel für $a = 2^2$ oder $a = \frac{1}{2}$ - die Strecke $\sqrt[3]{2a}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

* O ist ein Buchstabe, nicht die Zahl 0.

rige Zahlen ein und das alles so, dass sich ein mutiplikatives magisches Quadrat** ergibt.

Wenn man die Lösungszahlen der Knobelei als Ziffern betrachtet, welche Zahl ist dann dem Wort MONOID zugeordnet?

Lösung

Die Zahl im linken unteren Quadrat sei X, die im mittleren oberen Quadrat sei Y genannt. Mit Hilfe des „magischen Produkts" leiten wir zunächst zwei Gleichungen für die gesuchten Zahlen her.
Es gilt (3. Zeile von oben und Diagonale von unten links):

$$24OX = D(NO)X.$$

Mit $X \neq 0$ und $NO = 10N + O$ folgt daraus: $24O = D(10N + O)$ und daher
(1) $(24 - D)O = 10DN$.
Aus $DYM = 24(10N + O)M$ (1. Zeile von oben, Diagonale von oben links) folgt (wegen $M > 0$)
(2) $DY = 24(10N + O)$.
Die Gleichung (1) legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

Fall 1: Es sei $D = 4$.
Dann ist $O = 2N$ wegen (1) und daher $NO = 12N$. Aus (2) folgt damit $4Y = 24 \cdot 12N$ und somit $Y = 72N$. Daher ist (mittlere Spalte)

$$Y(NO)O = 72N \cdot 12N \cdot 2N = 1728N^3.$$

Aus der 3. Spalte von links ergibt sich: das magische Produkt ist $\leq 4 \cdot 99 \cdot 24 < 10^4$. Daher ist auch $1728N^3 < 10^4$. Also ist $N = 1$ und deshalb $O = 2$ sowie $Y = 72$. Mit Hilfe des magischen Produkt 1728 kann man nun leicht die gesuchten Zahlen bestimmen.

6	72	4
8	12	18
36	2	24

MONOID= 621284.

** Ein Zahlenquadrat heißt multiplikativ magisch, wenn die Produkte der drei Zahlen einer jeden Zeile, Spalte und Diagonale alle gleich sind.

Fall 2: Es sei $D \neq 4$ und D sei gerade.
Dann ist $24 - D$ für $D = 2, 6$ und 8 kein Vielfaches von 5. Wegen $O < 10$ folgt daher aus (1), dass $O = 5$ ist. Damit lautet nun (1)

(1') $24 - D = 2DN$.

Von den drei Gleichungen, die man für $D = 2, 6$ und 8 aus (1') erhält, besitzt nur die letzte Gleichung $24 - 8 = 2 \cdot 8 \cdot N$ eine ganzzahlige Lösung N, nämlich $N = 1$ für $D = 8$.

Damit ergibt sich aus (2), dass $Y = 45$ ist. Aus der mittleren Spalte folgt dann: das magische Produkt ist jetzt $45 \cdot 15 \cdot 5$ - also eine ungerade Zahl; nach der dritten Spalte von oben muss es jedoch eine gerade Zahl sein - ein Widerspruch. Der zweite Fall tritt also nicht ein.

Fall 3: D ist ungerade.

Für $D = 1, 3, 5, 7$ und 9 ergeben sich aus (1) fünf Gleichungen, von denen nur die Letzte: $(24 - 9)O = 10 \cdot 9 \cdot N$ eine ganzzahlige Lösung O und N besitzt, nämlich $O = 6$, $N = 1$ für $D = 9$. Aus (2) folgt dann wegen $9Y = 24 \cdot 16$, dass Y nicht ganzzahlig ist. Daher tritt der dritte Fall ebenfalls nicht ein.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Der Zug auf der Brücke

Es gibt Eisenbahnbrücken mit einem Fußweg. Stefanie und Nora gingen gemeinsam über eine solche, 225 m lange Brücke, als sie den entgegenkommenden Zug bemerkten. Er fuhr in genau 27 Sekunden über die Brücke, wobei die Zeit von der Auffahrt der Lokomotive bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke gemeint ist.

An den beiden Mädchen fuhr der Zug mit konstanter Geschwindigkeit in genau 9 Sekunden vorüber. Während dieser Zeit hatten die beiden - ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit - genau 9 Meter zurückgelegt.„Puh, diese Begegnungen geben mir immer ein flaues Gefühl,“ sagte Nora. „Dafür hatte ich keine Zeit, denn ich habe überlegt, wie lang der Zug ist,“ entgegnete Stefanie. „Kann man das denn ausrechnen?“ fragte Nora. Wie lang war dieser Zug? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2017 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 127

In Heft 126 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Die Farbe der Mützen

Fünf Personen A, B, C, D und E tragen je eine schwarze oder weiße Mütze, ohne zu wissen, welche Farbe die Mütze auf ihrem Kopf hat. Allerdings sagt eine Person mit einer schwarzen Mütze immer die Wahrheit und eine mit einer weißen Mütze sagt immer die Unwahrheit. Nun treffen vier der Personen folgende Aussagen:

A: „Ich sehe drei schwarze Mützen und eine weiße Mütze."
B: „Ich sehe vier weiße Mützen."
C: „Ich sehe eine schwarze Mütze und drei weiße Mützen."
D: „Ich sehe vier schwarze Mützen."

Welche Farbe hat die Mütze jeder der fünf Personen?

Lösung

Wenn Person D die Wahrheit sagt, müssen laut seiner Aussage auch alle vier anderen Personen die Wahrheit sagen. Dies ist jedoch z.B. für A und C wegen der von ihnen genannten Anzahlen schwarzer Mützen nicht gleichzeitig möglich. Also lügt D und trägt daher eine weiße Mütze.

Wenn Person A die Wahrheit sagt, würde D die einzige weiße Mütze tragen, denn dann hätte auch A eine schwarze Mütze. Dann müssten sowohl B als auch C lügen, da sie mehr als eine weiße Mütze zu sehen behaupten. Somit gäbe es (bei B, C und D) mehr als eine weiße Mütze, im Widerspruch zur Aussage von A. Daher lügt A und trägt ebenfalls eine weiße Mütze.

Wenn Person B die Wahrheit sagt, sieht sie nur Lügner, also lügt dann auch C. Allerdings würde C nach der Aussage von B drei weiße und eine schwarze Mütze (von B) sehen, hätte also die Wahrheit gesagt. Wegen dieses Widerspruchs lügt auch B und trägt eine weiße Mütze.

Wenn Person C die Wahrheit sagt, würden sie und Person E eine schwarze Mütze tragen und die Bedingungen wären alle erfüllt. Wenn Person C dagegen lügt, tragen alle eine weiße Mütze, im Widerspruch zur Lüge von B. Also sagt Person C tatsächlich die Wahrheit.

Richtige Lösungen mit höchstens kleinen Argumentationsmängeln wurden von Anna Bünnagel, Dennis Mayle, Adriana Stenger und Jan Wabnig eingeschickt.

Bemerkung: Natürlich ist die Aufgabenstellung insofern künstlich, als die Personen ja vorher wissen müssen, ob sie lügen oder die Wahrheit sagen dürfen. Also kennen sie auch die Farbe ihrer Mütze. Man könnte aber offen lassen, ob die weiße oder die schwarze Mütze dem Lügen zugeordnet ist. Die Frage, ob aus den vier Aussagen dann wieder eine eindeutige Rekonstruktion der Mützenfarben möglich ist, wäre aber fast schon wieder eine neue Aufgabe!

Das Spiel „Türme Bauen“

von Roland Schröder

In Heft 106 hatte ich das Spiel „Corner the Lady“ und in Heft 115 das Spiel „Corner the Rook“ vorgestellt. Hier geht es nun um ein Solitärspiel, welches das Ziel hat, ein Muster zu erkennen. Erstaunlicherweise ist auch bei diesem völlig anderen Spiel das Muster der „Lower Wythoff Sequence“ zu erkennen, das auch schon in den anderen beiden Spielen eine Rolle gespielt hatte.

Hier nun das neue Spiel: Aus Spielchips oder Dame-Steinen werden Türme in der dargestellten Weise gebaut:

und so weiter. Dieser Aufbau wird im Folgenden durch eine Zahlenfolge ersetzt: $1\ 2\ 3\ 4 \cdots$ und so weiter.
Mit „und so weiter“ ist gemeint, dass die Folge der natürlichen Zahlen die Turmhöhen in der Startkonstellation angeben soll. Sodann wird der Turm ganz links mit der Höhe 1 Chip (Dame-Stein) auf den zweiten Turm von links gelegt, der dann 3 Chips (Steine) hoch ist. Es entsteht diese Konstellation von Türmen:

die ebenfalls wieder als Zahlenfolge geschrieben wird: $3\ 3\ 4 \cdots$ und so weiter. Dann wird wieder der Turm ganz links (Höhe 3 Steine/Chips) aufgenommen und Stein für Stein auf die folgenden Türme verteilt. Wenn kein Turm mehr vorhanden ist, werden Türme zu je einem Stein nach rechts fortlaufend angefügt. Nehmen wir einmal an, wir starten mit der Folge

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6.$$

Dann entsteht im ersten Zug 3 3 4 5 6.
Im zweiten Zug 4 5 6 6.
Dann 6 7 7 1.

Die Gesamtzahl der Spielsteine (hier 21) bleibt innerhalb eines Spiels also immer erhalten. Das Spiel geht dann so weiter:

Start:	1	2	3	4	5	6									
erster Zug:		3	3	4	5	6									
zweiter Zug:			4	5	6	6									
$\cdots$				6	7	7	1								
$\cdots$					8	8	2	1	1	1					
$\cdots$						9	3	2	2	2	1	1	1		
$\cdots$							4	3	3	3	2	2	2	1	1
$\cdots$								4	4	4	3	2	2	1	1
$\cdots$									5	5	4	3	2	1	1
Schließlich:										6	5	4	3	2	1

Jetzt stehen die Türme so, dass die Startstellung gespiegelt wurde. Die Anzahl der Spielzüge war 9. Das Ergebnis tragen wir in eine Wertetabelle ein. Dabei soll in der Startstellung immer die natürliche Reihenfolge der Turmhöhen $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \cdots$ vorliegen.

Anzahl Türme am Start	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Züge bis zur Spiegelung						9			

Wenn wir in weiteren Spielen diese Tabelle vervollständigen, entsteht:

Anzahl Türme am Start	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Züge bis zur Spiegelung	1	3	4	6	8	9	11	12	14

In der oberen Zeile steht die Folge der natürlichen Zahlen. In der unteren Zeile steht eine Zahlenfolge, deren Bildungsgesetz nicht ohne weiteres erraten werden kann. Deshalb geben wir diese Zahlenfolge in die „Online Encyclopedia Of Integer Sequences“ ein. Dort wird uns verraten, dass es sich um die „Lower Wythoff Sequence“ handelt und dass diese folgendes Bildungsgesetz hat: $f(n) = \lfloor \varphi \cdot n \rfloor$. Hier bedeutet die Klammer $\lfloor \cdot \rfloor$, dass auf die nächste natürliche Zahl abzurunden ist und φ ist das größere Teilungsverhältnis des goldenen Schnittes. ($\varphi \approx 1{,}618$). Selbstverständlich können wir nach den ersten 9 Spielen nur eine Hypothese formulieren.

Einen Beweis allerdings findet man in Heft 60 der Mathematischen Semesterberichte aus dem Jahre 2013 auf den Seiten 51 bis 66.

Neben der „Lower Wythoff Sequence“ gibt es auch eine „Upper Wythoff Sequence“. Die Folge $\lfloor n\varphi^2 \rfloor$ (für natürliche Zahlen n) heißt „Upper Withoff Sequence“. Sie wird erhalten, wenn man in der Startkonstellation den Turm ganz rechts um 1 erhöht und dann zählt, wie viele Züge man für die Spiegelung der so gewonnenen Startkonstellation braucht.

Ein Beispiel (der neu hinzugekommene Stein kennzeichnen wir mit „+1“):

Start:	1	2	3	4	5+1									
erster Zug:		3	3	4	5+1									
zweiter Zug:			4	5	6+1									
dritter Zug:				6	7+1	1	1							
vierter Zug:					8+1	2	2	1	1	1				
fünfter Zug:						3	3	2	2	1	1	1	1	1
sechster Zug:							4	3	3	2	1	1	1	1
siebter Zug:								4	4	3	2	1	1	1
achter Zug:									5	4	3	2	1	1

Nach $\lfloor n\varphi \rfloor$ Zügen sind n Türme gespiegelt (siehe hierzu den genannten Beweis in den Mathematischen Semesterberichten) und der zusätzliche Stein liegt ganz rechts als Turm $\#(n+1)$. Von nun an wandert der zusätzliche Stein Zug für Zug um einen Turm nach links und liegt nach n Zügen auf dem Turm ganz links, sodass die Startkonstellation gespiegelt ist:

neunter Zug:	5	4	3	2	1+1				
zehnter Zug:		5	4	3	2+1	1			
elfter Zug:			5	4	3+1	2	1		
zwölfter Zug:				5	4+1	3	2	1	
dreizehnter Zug:					5+1	4	3	2	1

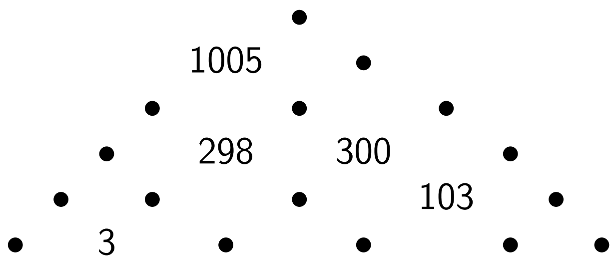
Also werden zum Spiegeln $\lfloor n\varphi \rfloor + n = \lfloor n\varphi^2 \rfloor$ Züge gebraucht. Warum gilt diese Gleichheit? Die quadratische Gleichung, welche zum goldenen Schnitt führt, lautet $\varphi^2 = \varphi + 1$.Dann gilt auch $n\varphi^2 = n\varphi + n$ und weil das Abrunden von natürlichen Summanden den Abrundevorgang nicht beeinflusst, gilt

$$\lfloor n\varphi \rfloor + n = \lfloor n\varphi^2 \rfloor.$$

Mathematische Entdeckungen

Ein Zahlenrätsel und das Pascal-Dreieck

In der Figur unten sind die Punkte durch natürliche Zahlen zu ersetzen nach der Regel: Jede Zahl oberhalb der Grundzeile ist die Summe der beiden diagonal unter ihr stehenden Zahlen. Wie heißt die Zahl in der Spitze der Figur? Untersuche nun die Frage: Wie sind die natürlichen Zahlen in der Grundzeile zu wählen, um in der Spitze eine vorgegebene Zahl zu erhalten? Finde eine Regel für diese Wahl für figuren mit $n = 2, 3, 4, 5, 6$ oder sogar für allgemeine n.



Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2017 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 127

In Heft 127 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Quader mit primen Seitenlängen

Die Seitenlängen x, y und z eines Quaders Q seien Primzahlen und seine Oberfläche sei eine Primzahlpotenz S^{n+1}, $n \geq 1$.

a) Untersuche: Für welche Exponenten n, $n = 2, 3, 4, \ldots, 15$ gibt es Quader Q?

b) Finde eine Regel, mit der man nach den Quadern Q suchen kann!

c) Kannst Du eine Beziehung (Gleichung) zwischen Oberfläche und Volumen der Quader Q angeben? (H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt Adriana Stenger und Marcel Wittmann, 13-te Klasse, Karolinen-Gymnasium Frankenthal, und ....
Marcel, Adriana und fanden heraus:

a) Für die Oberfläche F des Quaders gilt

$$F = 2(xy + yz + zx) = s^{n+1}$$

mit $n \geq 1$ und s prim. Folglich ist $s = 2$. Wären x, y, z ungerade Primzahlen, so wäre $xy + yz + zx$ ungerade - ein Widerspruch. Also ist mindestens eine der Primzahlen gleich 2, sagen wir $x = 2$ (ohne Einschränkungen der Allgemeinheit). Aus $2y + yz + 2z = 2^n$ folgt, dass auch von y und z eines gleich 2 sein muss, sagen wir y.
Es gilt also $2^n = 4 + 4z$, d.h. $z = 2^{n-2} - 1$ (insbesondere $n \geq 4$) bzw. mit $m = n - 2$, $z = 2^m - 1$, $m = 2, \ldots, 13$ (denn da $n \leq 15$ gilt $m = n - 2 \leq 13$).
m muss selbst wieder prim sein, denn

$$m = a \cdot b \implies z = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^a + 1)$$

wäre zusammengesetzt, Widerspruch; also kann m nur $2, 3, 5, 7$ oder 13 sein.

m	2	3	5	7	13
z	3	7	31	127	8191
Primzahl?	ja	ja	ja	ja	ja
F	2^5	2^6	2^8	2^{10}	2^{16}
V	12	28	124	508	32764

b) Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines solchen Quaders Q ist $x = y = 2$ und $z = 2^{n-2} - 1$ ist eine Primzahl.

c) Wegen $F = 8(1+z)$ und $V = xyz = 4z$ gilt für jeden Quader Q: $F - 2V = 8$.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Kimberling-Folge

Der amerikanische Mathematiker Clark Kimberling hat eine Folge natürlicher Zahlen $k(n)$, $n \in \mathbb{N}$ folgendermaßen definiert: Für $n = 1$ gelte $k(1) = 1$. Ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die $\leq x$ ist, so gilt für $n > 1$:

$$k(n) = \begin{cases} \lfloor 0,5 \cdot k(n-a) \rfloor & \text{falls } \lfloor 0,5 \cdot k(n-a) \rfloor \notin \{0, 1, 2, \dots, k(n-1)\} \\ 3 \cdot k(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zwei Beispiele für den Anfang der Kimberlingfolge FOLGE mit n Elementen zeigen ihr grundsätzliches Verhalten: Dabei sind diese bei SORTF nach Größe „sortiert“; es fehlen die Folgenglieder, die größer als n sind.

```
n=18 FOLGE=[ 1, 3, 9, 4, 2, 6, 18, 54, 27, 13, 39, 19, 57, 28, 14, 7, 21, 10]
n=19 FOLGE=[ 1, 3, 9, 4, 2, 6, 18, 54, 27, 13, 39, 19, 57, 28, 14, 7, 21, 10, 5]
n=18 SORTF=[ 1, 2, 3, 4, 0, 6, 7, 0, 9, 10, 0, 0, 13, 14, 0, 0, 0, 18],
     luecke1= 5
n=19 SORTF=[ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 9, 10, 0, 0, 13, 14, 0, 0, 0, 18, 19],
     luecke1= 8
```

Man erkennt, dass SORTF der Beginn der Folge der natürlichen Zahlen ist, wobei einige mit Null gekennzeichnete Stellen noch fehlen. Die erste solche Lücke wird mit `luecke1` bezeichnet. Mit zunehmender Anzahl n scheinen sich Lücken zu schließen; im angegebenen Beispiel wird `luecke1`$= 5$ von $n = 18$ auf $n = 19$ aufgefüllt und es bleibt 8 als erste Stelle, die fehlt. Diese wiederum ist schon ab $n = 26$ nicht mehr vorhanden etc. Aus dieser Beobachtung ergeben sich Fragen, die für spezielle n-Werte mit einem Computer-Programm beantwortet werden können.

a) `luecke1`$= 242$ tritt zum ersten Mal bei $n = 765$ auf. Wird sie überhaupt wieder geschlossen? Wenn ja, ab welcher Folgenlänge n?

b) Gibt es eine Anfangsfolge, die mindestens die ersten 1000 (2017) natürlichen Zahlen enthält ? Wenn ja, ab $n =$?

Zusätzliche Fragen, die in voller Allgemeinheit nur durch einen theoretischen Beweis beantwortet werden können:

c) Enthält die Folge eine Zahl mehrfach?

d) Ist jede der Zahlen $1, 2, 3$ usw. ein Element der Folge? (W.G.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2017 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 127

Treppenzahlen

Zu den Treppenzahlen aus der Rubrik „Mathematik entdecken" von Cynthia Hog-Angeloni in Monoid 126 hier jetzt eine Zwillings-Aufgabe für Computerfans in Monoid 127: Dabei sind Treppenzahlen solche natürlichen Zahlen, die sich als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lassen. Zum Beispiel ist $18 = 3 + 4 + 5 + 6$, aber auch $5 + 6 + 7$; 18 erlaubt also mindestens zwei Treppen, wogegen 16 überhaupt keine erlaubt. 16 ist also keine Treppenzahl. Untersuche mit einem Computerprogramm die Zahlen von 3 bis 100 (oder auch größer) darauf, wie viele Treppen sie besitzen und berechne auch die Teilermenge der jeweiligen Zahl. Was fällt bei den Ergebnissen auf? Sie enthalten die Begründung (nicht den Beweis), wie viele Treppen entstehen.

Ergebnisse

Das Computer-Programm berechnet zu jeder Zahl n alle Treppen durch einfaches Ausprobieren; außerdem die Teilermenge von n. Einige Python-Ergbnisse in der Form

```
Zahl / [Teilermenge] / Anzahl der Treppen-Summen / alle SUMMEN durch : getrennt
18 / [2, 3, 6, 9, 18] / 2 / 3 +...+ 6: 5 +...+ 7
16 / [2, 4, 8, 16] / 0 /
81 / [3, 9, 27, 81] / 4 / 5 +...+ 13: 11 +...+ 16: 26 +..+ 28: 40 +...+ 41
45 / [3, 5, 9, 15, 45] / 5 / 1 +...+ 9: 5 +...+ 10: 7 +...+ 11: 14 +...+ 16:
       22 +...+ 23
19 / [19] / 1 / 9 +...+ 10
```

Betrachtet man diese Ergebnisse, so erkennt man, daß Zweierpotenzen nie eine Treppendarstellung besitzen; bei anderen Zahlen dieser Beispiele hat n jeweils so viele Treppen wie ungerade Teiler vorhanden sind (in der Teilermenge zu erkennen). Die Computer-Ergebnisse erhellen also die Situation und ermöglichen eine

Vermutung, die nicht so ohne weiteres auf der Hand liegt. Einen theoretischen Beweis dazu - auch Satz von Sylvester genannt - findet Ihr in Monoid 128.

Folgende Schüler haben sich mit dieser Aufgabe beschäftigt: Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, Silas Rathke von der Alexander-von-Humboldt-Schule in Neumünster, Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey. Marcel liefert einen theoretischen Beweis ab, der ohne Primfaktorenzerlegung den Satz von Sylvester herleitet (Unterschied zu Monoid 128, siehe oben). Die von ihm benutzte Idee der Verdopplung der Treppe ist die elementarste, gleichzeitig aber auch die eleganteste Methode, bedarf jedoch an einer Stelle einer etwas ausführlicheren Begründung. Ein Programm habe ich von ihm nicht erhalten. Silas benutzt, ohne eine Skizze zu verwenden, im Grunde dieselbe Idee, indem er die trapezförmige Treppe als halbe Rechteckfläche behandelt und mit einer Kongruenzbetrachtung modulo n und Fallunterscheidungen bezüglich der die Treppe bestimmenden Varablen das richtige Ergebnis ermittelt; auch er spart sich ein Programm. Maximilian erstellt einen Beweis, indem er zu Beginn für jede Zahl x die beiden Mengen U und B bildet; dabei ist U die Menge der ungeraden Teiler von x und B die Menge der Zahlenpaare (m, n), die für x eine Treppe der Form $x = (m+1) + \dots + n$ bilden. Er gibt eine Abbildung von U in B an, von der er zeigen kann, daß sie bijektiv ist. Damit ist die Behauptung bewiesen; eine überraschende und nicht unkomplizierte Vorgehensweise. Sein Programm ist einwandfrei; es fehlt der Hinweis darauf, welche Vermutung die Python-Ergebnisse nahe legen. (W.G.)

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 128

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Folgenglieder

Für die Glieder a_1, a_2, a_3, ... einer Zahlenfolge gilt: Die ersten n Glieder, $n \geq 1$, haben die Summe $S_n = 5n^2 + 1$. (H.F.)

a) Bestimme a_1, a_2, a_3 und a_{2016}.

b) Gib eine Formel an, mit der man jedes Folgenglied a_n, $n = 1, 2, \dots$ berechnen kann.

Lösung:

Für die Summe $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ gilt: $S_n = 5n^2 + 1$.

a) Wegen $a_1 = S_1$ ist $a_1 = 6$.

Aus $a_2 = S_2 - S_1$ folgt mit $S_2 = 21$ und $S_1 = 6$, dass $a_2 = 15$ ist.
Wegen $a_3 = S_3 - S_2$ und $S_3 = 46$ ist $a_3 = 25$. Es ist weiter:

$$\begin{aligned} a_{2016} &= S_{2016} - S_{2015} \\ &= (5 \cdot 2016^2 + 1) - (5 \cdot 2015^2 + 1) = 20155. \end{aligned}$$

b) Für a_n, $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (5n^2 + 1) - (5(n-1)^2 + 1) \\ &= 5n^2 + 1 - (5n^2 - 10n + 5 + 1) = 10n - 5. \end{aligned}$$

II. Eine Eigenschaft magischer 3×3-Quadrate

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Das nebenstehende 3×3-Zahlenquadrat heißt magisch, weil die drei Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen die gleiche Summe $M = 15$ besitzen. Für die zentrale Zahl $z = 5$ gilt außerdem:

(1) $3 \cdot z = M$.

Überprüfe, ob die Gleichung (1) für jedes magische 3×3-Quadrat zutrifft. (H.F.)

Lösung:

a	b	c
d	z	f
g	h	i

Das nebenstehende Zahlenquadrat sei magisch mit der „magischen Summe“ M. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 3M &= (a + z + i) + (b + z + h) + (c + z + g) \\ &= (a + b + c) + 3z + (g + h + i) \\ &= M + 3z + M. \end{aligned}$$

Also ist $3z = M$.

III. Prozente

Wieviel Prozent sind 99% von (99% von (99% von (99% von (99% von (99% von 99%)))))? (H.F.)

Lösung:

Schreibt man den gegebenen Term als $\frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100}$, dann lautet das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma: 93,21%.

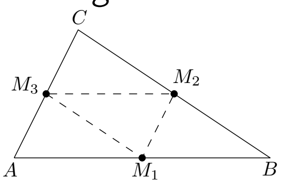
IV. Punkte-Verteilung

Im Innengebiet eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem Flächeninhalt 4 sind 37 Punkte beliebig verteilt. Man zerlege das Dreieck $\triangle ABC$ in vier flächengleiche Teildreiecke.

a) Gib die Zerlegung des Dreiecks in vier flächengleiche Teildreiecke an.

b) Zeige: Im Innengebiet samt Rand eines dieser vier Teildreiecke befinden sich (mindestens) 10 Punkte. (H.F.)

Lösung:

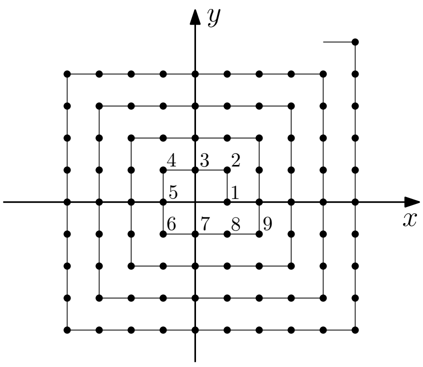


Es seien M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der Dreiecksseiten. Ihre Verbindungsstrecken zerlegen das Dreieck $\triangle ABC$ in vier kongruente und daher flächengleiche Teildreiecke (die vier Teildreiecke stimmen in ihren Winkeln und der Länge einer Seite überein).

Denkt man sich auf jedes Teildreieck jeweils 9 Punkte verteilt, so ist ein Punkt nicht verteilt. Er gehört jedoch zu einem Teildreieck („Schubfach-Prinzip") und dieses enthält daher 10 Punkte.

V. Zahlenspirale

In einem Koordinatensystem seien die von $(0, 0)$ verschiedenen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten fortlaufend in der Form einer Spirale nummeriert, also $(1, 0)$ mit 1, $(1, 1)$ mit 2, $(0, 1)$ mit 3 usw. bezeichnet.



a) Welche Koordinaten hat der Punkt mit der Nummer 2016?

b) Welche Nummer hat der Punkt $(0, -2016)$ auf der y-Achse? (H.F.)

Lösung:

Die Punkte auf den Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten haben Quadratzahlen als Nummern.

a) Im vierten Quadranten sind es die Nummern 1^2, 3^2, 5^2, ..., $(2n+1)^2$, ... (Nachweis durch vollständige Induktion möglich, aber nicht erforderlich). Allgemein gilt: Der Punkt mit der Nummer $(2n+1)^2$ liegt auf der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $(0, -n)$ mit der Nummer $(2n+1)^2 - (n+1)$. Mit $n = 45$ gilt daher wegen $45^2 = 2025$: Im Punkt mit der Nummer 2016 liegt auf der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $(0, -22)$ mit der Nummer 2002 – die Koordinaten des Punktes mit der Nummer 2016 sind somit $(14, -22)$.

b) Nach a) hat der Punkt $(0, -n)$ die Nummer $(2n+1)^2 - (n+1)$. Für $n = 2016$ ergibt sich so: Die Zahl $(0, -2016)$ hat die Nummer 16263072.

VI. Teilbarkeit spezieller Zahlen

Bestimme alle achtstelligen Zahlen *abbbbbba*, die durch 36 teilbar sind. (WJB)

Lösung:

Die Quersumme $6b + 2a$ ist höchstens dann durch 9 teilbar, wenn a durch 3 teilbar ist. Da die Zahl außerdem gerade sein muss, ist $a = 6$. Außerdem muss die zweiziffrige Zahl ba durch 4 teilbar sein, also eine der Zahlen 16, 36, 56, 76, 96. Die Quersummen $6b + 2a$ sind dann $6 + 12 = 18$, $18 + 12 = 30$, $30 + 12 = 42$, $42 + 12 = 54$, $54 + 6 = 60$, also nur durch 9 teilbar für $b = 1$ und $b = 7$. Die gesuchten Zahlen sind 61111116 und 67777776.

VII. Produkt und Differenz

Das Produkt zweier ganzer Zahlen a und b ist 119, ihre Differenz ist 10. Finde alle möglichen Zahlenpaare (a, b) mit dieser Eigenschaft! (WJB)

Lösung:

Schreibt man 119 als Produkt von Primzahlen, so ergibt sich als einzige Möglichkeit $119 = 17 \cdot 7$ und es ist tatsächlich $17 - 7 = 10$, also $a = 17$, $b = 7$.
Aber es gibt die zweite Lösung $a = -7$, $b = -17$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Division durch 13

Man dividiere jede natürliche Zahl n, $n = 1, 2, 3, \cdots, 2017$ durch 13. Die dabei entstehenden Divisionsreste addiere man. Wie groß ist ihre Summe? (H.F.)

II. Buchstaben-Rätsel

Ersetze in der Gleichung

$$\begin{array}{ccc} & A & A \\ & B & B \\ + & & B \\ \hline A & A & B \end{array}$$

alle Buchstaben A durch dieselbe Ziffer und alle Buchstaben B durch eine davon verschiedene Ziffer, sodass eine numerisch richtige Gleichung entsteht. Die Ziffern seien beide $\neq 0$. (H.F.)

III. Ergebnis einer Prüfung

An einer Prüfung nehmen 36 Studenten teil. Die dabei durchgefallenen Studenten erreichen im Durchschnitt 42 Punkte, die erfolgreichen Studenten im Durchschnitt

60 Punkte, während die durchschnittliche Punktzahl für alle Studenten 53 Punkte sind.
Wie viele Studenten haben die Prüfung bestanden? (H.F.)

IV. Im Wirtshaus

Die älteren Herren Smilo, Truco, Ullo und Vulgo sitzen an einem runden Tisch im Wirtshaus.

a) Der Biertrinker sitzt zwischen dem Rotweintrinker und Herrn Truco.

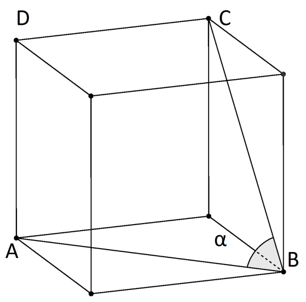
b) Der Safttrinker sitzt zwischen dem Weißweintrinker und Herrn Ullo.

c) Weder Herr Ullo noch Herr Vulgo trinken Bier.

Welcher Herr trinkt welches Getränk? (H.F.)

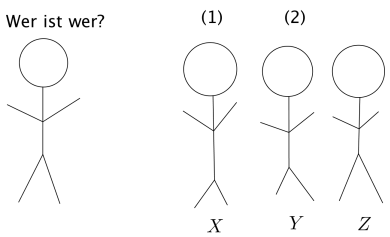
V. Dreieck im Würfel

In einen Würfel ist das räumliche Viereck ABCD eingezeichnet. Wie groß ist der Winkel α? (Eva Kaufholz)



VI. Logelei

Ein Wanderer begegnet auf einem Pfad den drei Jungen GE, LO und LEI. Er fragt sie nach ihren Namen. Ihre Antworten lauten:



X sagt: (1) Der in der Mitte ist LEI.
Y behauptet: (2) Ich bin entweder GE oder LO.
Z sagt nichts.

Da nun LO immer und GE manchmal lügt, während LEI stets die Wahrheit sagt, überlegt der Wanderer: Wer ist denn nun wer?

(H.F.)

VII. Geschwindigkeiten

Zwei Städte M und N sind 45km voneinander entfernt. Zwei Radfahrer, einer in M, der andere in N, starten gleichzeitig. Die beiden treffen sich 24km von M entfernt. Wenn der Radfahrer aus M $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$ schneller als der aus N fährt, mit welcher Geschwindigkeit fährt dann jeder? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1169: Brüche, Wurzeln und Folgen

Janina macht sehr gerne Mathematik. Ihre Lieblingsthemen im Unterricht sind Brüche, Wurzeln und Folgen. Diese verbindet sie nun und untersucht die Folge der Zahlen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Die Folge beginnt also mit $a_1 = 1$, $a_2 \approx 1{,}4142$, $a_3 \approx 1{,}7321$.

a) Berechne die nächsten drei Folgenglieder (gib jeweils vier Nachkommastellen an).

b) Janina glaubt, eine Gesetzmäßigkeit in den Folgengliedern entdeckt zu haben, mit der sich die Folgenglieder recht einfach berechnen ließen statt mit den langen Summen. Wie lautet diese einfache Folgenvorschrift? Begründe Deine Antwort, indem Du deren Richtigkeit mithilfe einer Rechnung zeigst.

c) Wie groß ist a_{2017}? Für welches Folgenglied gilt $a_n = 2017$? (MG)

Aufgabe 1170: Abschätzung einer Summe

Es sei $b_n = bb\dots b$ eine n-ziffrige Zahl mit n Ziffern b und ab_nc sei die $n+2$-ziffrige Zahl mit erster Ziffer a und letzter Ziffer c. Gib nun eine geschlossene Formel für die Summe $S(n)$ an:

$$S(n) = 13 + 14_1 3 + 14_2 3 + 14_3 3 + ... + 14_n 3, \text{ n} \geq 1.$$

Begründe: $10^{2017} < S(2016) < 10^{2018}$. (H.F.)

Aufgabe 1171: Quersumme

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine durch neun teilbare, dreistellige Zahl die Quersumme 18 besitzt? (Silas Rathke)

Aufgabe 1172: Das Alter dreier Geschwister

„Wie alt sind deine drei Töchter?“ fragt Dr. Quaoar seinen Kollegen Pfiffig.

„Ich will es dir einfach machen“ - war die Antwort - „nämlich: Das Produkt ihrer Jahre (in ganzen Zahlen) beträgt 72 und die Summe ihrer Jahre stimmt mit meiner Hausnummer überein.“

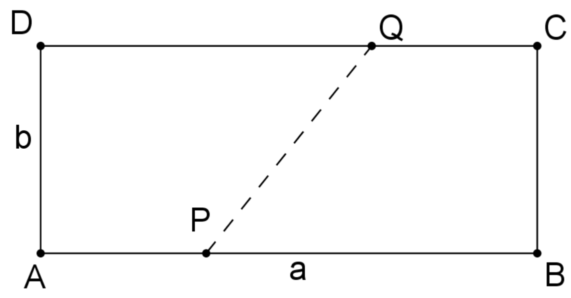
Dr. Quaoar geht zur Tür, registriert die Hausnummer und nach einer Weile des Überlegens sagt er: „Ich habe zu wenig Information, um das Alter deiner Kinder berechnen zu können.“

Darauf Pfiffig: „Die jüngste meiner drei Töchter hat morgen Geburtstag.“

Nach einiger Zeit nennt Dr. Quaoar das richtige Alter der Kinder. Wieviel Jahre alt sind Pfiffigs Töchter? (H.F.)

Aufgabe 1173: Länge einer Knickfalte

Ein rechteckiges Stück Papier $ABCD$ (Seitenlängen $a = 12$ und $b = 5$) wird so gefaltet, dass die Punkte B und D zusammenfallen. Wie lang ist die Knickfalte PQ? (H.F.)



Aufgabe 1174: Differenz von Quadraturen

Gegeben sind drei Quadrate mit Seitenlängen $a > b > c$. Konstruiere ein Quadrat des Inhalts $a^2 - b^2 - c^2$.

Aufgabe 1175: Eine Aufgabe von Erdös

Unter $n + 1$ positiven ganzen Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, von denen jede $\leq 2n$ ist, gibt es (mindestens) eine Zahl z_i, die ein Teiler einer Zahl z_j, $j \neq i$ ist. Man zeige dies. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 128

Klassen 9–13

Aufgabe 1155: Faktorisierung

Bestimme positive ganze Zahlen a, b mit $a < b$ so, dass die quadratischen Terme $x^2 + ax + b$ und $x^2 + bx + a$ als ein Produkt aus linearen Termen mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden können? (H.F.)

Lösung:

Es seien $x^2 + ax + b = (x + k)(x + l)$, k und l ganzzahlig, und $x^2 + bx + a = (x + m)(x + n)$, m und n ganzzahlig. Dann gilt einerseits

(1) $a = k + l$,

(2) $b = k \cdot l$

und andererseits:

(3) $b = m + n$,

(4) $a = m \cdot n$.

Aus (1) und (4) folgt nun $a = k + l = m \cdot n$, aus (2) und (3) $b = m + n = k \cdot l$. Wegen $a < b$ ist $m \cdot n < m + n$. Sind nun m und n beide ≥ 2, so wäre $m \cdot n \geq 2 \cdot \max(m, n) \geq m + n$, ein Widerspruch! Also ist $m = 1$ oder $n = 1$. Ist

$m = n = 1$, so ist $a = k + l = m \cdot n = 1$, ein Widerspruch zur Voraussetzung $a < b$.
Sei nun $m = 1$ und $n \neq 1$ (der Fall $n = 1$ und $m \neq 1$ führt zum gleichen Ergebnis. Nur m und n sind zu vertauschen.)
Wegen $k \cdot l = n + 1$ und $k + l = n$ ist $k \cdot l = k + l + 1$ Daher ist $k = l = 1$ nicht möglich. Auch k, l beide ≥ 3 ist nicht möglich: Dann wäre $k \cdot l \geq 3 \cdot \max(k, l) > 1 + 2\max(k, l) \geq k + l + 1$, ein Widerspruch!
Deshalb muss für eine der Zahlen k, l – zum Beispiel für k – gelten: $k = 2$, also $k \cdot l = 2l = k + l + 1 = l + 3$. Aus $2l = l + 3$ folgt $l = 3$.
Fazit: $k = 2$, $l = 3$, $a = 5$, $b = 6$ und damit $m = 1$, $n = 5$.

Aufgabe 1156: Eine seltsame Kürzungsregel

Es ist $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$; $\ldots$; $\frac{1\cancel{6}\cancel{6}\ldots\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}\ldots\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$.
Haben die ungekürzten Brüche tatsächlich den Wert $\frac{1}{4}$, sodass bei ihnen die angegebene Kürzungsregel zulässig ist? (H.F.)

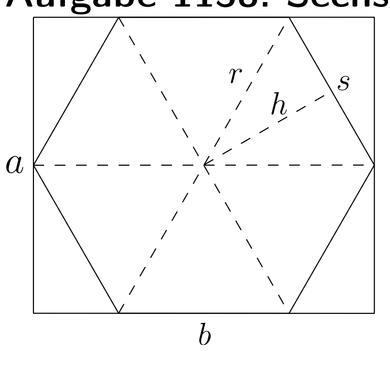
Lösung:
Wir schreiben die Zahl $x = 166\ldots66$ (mit n Ziffern 6) so: $x = 10^n + \frac{6}{9}(10^n - 1)$ sowie die Zahl $y = 66\ldots664$ (mit n Ziffern 6) so: $y = \frac{6}{9}(10^n - 1) \cdot 10 + 4$.
Dann gilt: $4 \cdot x = y$, denn $4x = 4 \cdot 10^n + \frac{24}{9}10^n - \frac{24}{9} = \frac{60}{9}10^n - \frac{24}{9}$ und $y = \frac{60}{9}10^n - \frac{60}{9} + 4 = \frac{60}{9}10^n - \frac{24}{9}$.
Aus $4x = y$ folgt sofort $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$, was die seltsame Kürzungsregel rechtfertigt.

Aufgabe 1157: Minimaler Abstand

Welcher Punkt der Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{\frac{145}{4} - x}$, $x \leq \frac{145}{4}$, hat den geringsten Abstand vom Nullpunkt $(0, 0)$?
Wie groß ist der Minimalabstand? (H.F.)

Lösung:
Sei d der Abstand des Kurvenpunktes $P = (x, y)$ vom Punkt $(0, 0)$. Dann ist $d^2 = x^2 + y^2$. Mit $y = \sqrt{\frac{145}{4} - x}$, also $y^2 = \frac{145}{4} - x$, ist $d^2 = x^2 + \frac{145}{4} - x = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{144}{4}$. d^2 ist dann am kleinsten, wenn $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$, also wenn $x = \frac{1}{2}$ ist.
Für $x = \frac{1}{2}$ ist $y = \frac{1}{2}\sqrt{143}$ und $d = 6$.

Aufgabe 1158: Sechseck im Rechteck



Ein reguläres Sechseck sei wie in der Skizze in ein minimales Rechteck einbeschrieben.

a) Wie groß ist die Fläche des Rechtecks, wenn das reguläre Sechseck den Umfang 12 hat?
b) Sei nun der Umfang des Rechtecks allgemein. Wieviel Prozent der Fläche des Rechtecks macht die Fläche des Sechsecks aus? (H.F.)

Lösung:

a) Es sei $U = 12$ der Umfang des Sechsecks. Dann ist $s = r = 2$, also $b = 2r = 4$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $r^2 = h^2 + (\frac{r}{2})^2$, also $h^2 = \frac{3}{4}r^2$ und damit $h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$. Also ist $a = 2h = \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}$. Damit ergibt sich für die Fläche des Rechtecks: $a \cdot b = 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$.

b) Es sei allgemein ein reguläres Sechseck der Seitenlänge s gegeben. Wie oben sind nun $b = 2s$, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ und $a = \sqrt{3}s$. Die Fläche F_1 des Rechtecks ist im Allgemeinen also: $F_1 = a \cdot b = 2s \cdot \sqrt{3}s = 2\sqrt{3}s^2$.
Die Fläche F_2 des regulären Sechsecks ist gegeben als das Sechsfache der Fläche der Teildreiecke also: $F_2 = 6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot s \cdot h) = 3s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{3}{2}\sqrt{3}s^2 = \frac{3}{4}F_1$. Die Fläche des regelmäßigen Sechsecks nimmt also 75% der Fläche des Rechtecks ein.

Aufgabe 1159: Das Rätsel der sieben Aussagen

Als Professor Quaoar den Vorlesungsraum betrat, las er die folgenden sieben Aussagen an der Tafel:

(1) Genau 1 der sieben Aussagen an der Tafel ist falsch.
(2) Genau 2 der sieben Aussagen an der Tafel sind falsch.

⋮

(6) Genau 6 der sieben Aussagen an der Tafel sind falsch.
(7) Genau 7 der sieben Aussagen an der Tafel sind falsch.

„Nun, Herr Professor, was sagen Sie dazu“, fragte ihn der Student Talentino.
Wie löst Professor Quaoar dieses Problem? (H.F.)

Lösung:

Professor Quaoar geht so vor:

Aussage (7) ist falsch. Denn wäre sie wahr, so wären nicht alle 7 Aussagen falsch, wie es von Aussage (7) behauptet wird. Somit kann die Aussage (7) nicht wahr sein.

Annahme: Die Aussage (6) ist falsch.

Aus der Falschheit der Aussagen (7) und (6) folgt:

Höchstens 5 Aussagen sind falsch, sodass mindestens 2 Aussagen wahr sind. Zwei wahre Aussagen (i) und (j), $i \neq j$, bilden jedoch einen Widerspruch, denn es können nicht gleichzeitig genau i und genau j Aussagen falsch sein. Die Annahme ist also falsch.

Somit ist die Aussage (6) wahr, woraus folgt, dass alle 6 übrigen Aussagen falsch sind.

Aufgabe 1160: Summengleiche Mengen

Die Menge der Primzahlen ≤ 23 sei P, also $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.
Zeige: P hat mindestens sechs nicht-leere Teilmengen, deren Elemente die gleiche Summe besitzen. (H.F.)

Lösung:

P hat neun Elemente und deshalb $2^9 - 1 = 511$ nicht-leere Teilmengen. Es sei $T \neq \{\}$ eine Teilmenge von P und $|T|$ sei die Summe der Elemente von T.
Für $T = \{2\}$ ist $|T| = 2$ und für $T = P$ ist $|T| = 100$.
Daher gilt für eine beliebige Teilmenge T: $2 \leq |T| \leq 100$ – also gibt es 99 Werte, die für T in Frage kommen. Nun ist $511 = 5 \cdot 99 + 16$. Daraus folgt nach dem Schubfach-Prinzip: Es gibt mindestens sechs verschiedene Teilmengen $T \neq \{\}$ mit gleicher Elemente-Summe.

Aufgabe 1161: Einerziffern von Summen dritter Potenzen

Die Einerziffern der nach der folgenden Regel gebildeten natürlichen Zahlen m^3, $m^3 + 1^3$, $m^3 + 2^3$, ..., $m^3 + 9^3$ sind – in anderer Reihenfolge – die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9.
Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Mit $[m]$ sei die Einerziffer der natürlichen Zahl m bezeichnet und $m^3 + i^3$ sei eine der Zahlen m^3, $m^3 + 1^3$, $m^3 + 2^3$, ..., $m^3 + 9^3$, m eine beliebige natürliche Zahl ≥ 1 mit $[m] = e$. Dann gilt:

(1) $[m^3 + i^3] =$ Einerziffer von $[m^3] + [i^3]$.

Nun ist $[m^3] = [e^3]$ und weil $[m] = e$ mit einer festen Zahl e ist, ist auch $[e^3]$ und damit $[m^3]$ eine feste Zahl, die mit f bezeichnet sei.
Damit lautet (1):

(2) $[m^3 + i^3] =$ Einerziffer von $f + [i^3]$.

Für die Einerziffern von i^3 gilt:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[i^3]$	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Aus der Tabelle folgt: Die Einerziffern von $[i^3]$ sind sämtlich verschieden für $i = 0, 1, 2, \dots, 9$.
Daraus folgt: Die Einerziffern von $f + [i^3]$ sind sämtlich verschieden für $i = 0, 1, 2, \dots, 9$. Sie sind also (eventuell in anderer Reihenfolge) die in der zweiten Reihe der Tabelle vorkommenden Ziffern. Wegen (2) ist damit die Behauptung bewiesen.

Bundeswettbewerb Mathematik 2017

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2017$ stehen an der Tafel. Amelie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amelie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amelie, ansonsten Boris.

Wer kann den Gewinn erzwingen?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung: Amelie kann den Gewinn erzwingen.

Beweis: Wir fassen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2016$ folgendermaßen in (ungeordneten) Paaren zusammen, nämlich

$$\{1008 - k, 1008 + k\} \text{ für } 1 \leq k \leq 1007 \text{ sowie } \{1008, 2016\}. \tag{1.1}$$

In diesen Paaren ist jede der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2016$ genau einmal enthalten.

Amelies Gewinnstrategie lässt sich wie folgt beschreiben: Amelie beginnt, indem sie die Zahl 2017 wegwischt. Boris und Amelie wischen nun abwechselnd je eine weitere Zahl weg. Wischt Boris eine Zahl z_B weg, so wischt Amelie direkt danach die zweite Zahl z_A des zugehörigen, in (1.1) definierten Paares $\{z_B, z_A\}$ weg.

Amelie kann diese Strategie stets befolgen: Vor Amelies erstem Zug stehen noch alle Zahlen an der Tafel, insbesondere die Zahl 2017. Nach dem ersten Zug von Amelie stehen nur noch vollständige Paare aus (1.1) an der Tafel. Boris kann also nur eine Zahl aus einem vollständigen Paar wegwischen; die andere Zahl aus diesem Paar steht noch an der Tafel, und Amelie kann sie wegwischen, das heißt, ihre Strategie befolgen. Danach stehen wiederum nur vollständige Paare aus (1.1) an der Tafel.

Die beschriebene Strategie führt zum Erfolg: Wegen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2016 = \frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2017 = 8 \cdot 126 \cdot 2017$$

ist die Summe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2016$ durch 8 teilbar. Die Paare $\{z_B, z_A\}$ in (1.1) sind so gewählt, dass $z_B + z_A$ entweder $2016 = 8 \cdot 252$ oder $3024 = 8 \cdot 378$ ergibt, also stets durch 8 teilbar ist. Damit ist die Summe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2016 - (z_B + z_A)$$

der Zahlen, die nach dem Wegwischen von z_B und z_A an der Tafel stehen, weiterhin durch 8 teilbar, und induktiv folgt, dass dann auch die Summe der letzten beiden Zahlen durch 8 teilbar sein muss, wenn Amelie diese Strategie die ganze Zeit verfolgt. □

Aufgabe 2

Wie viele spitze Innenwinkel kann ein überschneidungsfreies ebenes 2017-Eck höchstens haben?

Anmerkungen: Das 2017-Eck darf überstumpfe Innenwinkel besitzen. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung: Ein 2017-Eck wie in der Aufgabenstellung besitzt höchstens 1345 spitze Innenwinkel.

Beweis: Wir beweisen zunächst eine obere Schranke. Bekanntlich hat jedes überschneidungsfreie ebene 2017-Eck eine Innenwinkelsumme von $(2017-2)\cdot 180°$. Von den 2017 Innenwinkeln des 2017-Ecks seien s Innenwinkel spitz, das heißt, diese Winkel sind kleiner als $90°$ groß. Für das Gradmaß der $2017-s$ anderen Innenwinkel existiert die obere Schranke $360°$. Wir schätzen die Summe der Innenwinkel nach oben ab durch

$$\begin{aligned} 2015\cdot 180° < s\cdot 90° + (2017-s)\cdot 360° &\iff \\ s\cdot 270° < 2019\cdot 180° &\iff \\ s < 1346, & \end{aligned} \tag{2.1}$$

also ist die ganzzahlige Zahl $s \leq 1345$.

Diese obere Schranke kann nicht weiter verschärft werden. Denn wir zeigen nun, dass tatsächlich ein überschneidungsfreies ebenes 2017-Eck mit 1345 spitzen Innenwinkeln existiert.

1. Beweis der Existenz

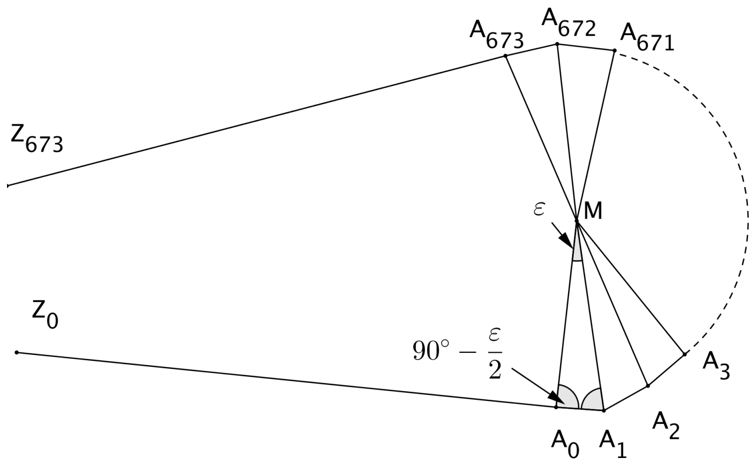
Sei $A_0A_1\cdots A_{671}A_{672}A_{673}\cdots A_{1340}A_{1341}$ ein reguläres 1342-Eck, dessen Umkreismittelpunkt wir mit M bezeichnen. Dann gilt für jedes der gleichschenkligen Dreiecke $\triangle A_iMA_{i+1}$ mit $0 \leq i \leq 1341$ und $A_{1342} = A_0$

$$\angle A_iMA_{i+1} = \frac{360°}{1342} = \frac{180°}{671} =: \varepsilon \tag{2.2}$$

und

$$\begin{aligned} \angle A_{i+1}A_iM = \angle MA_{i+1}A_i &= \frac{1}{2}(180° - \angle A_iMA_{i+1}) \\ &= \frac{335}{671}\cdot 180° = 90° - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir betrachten nun die Geraden A_0A_1 und $A_{672}A_{673}$.



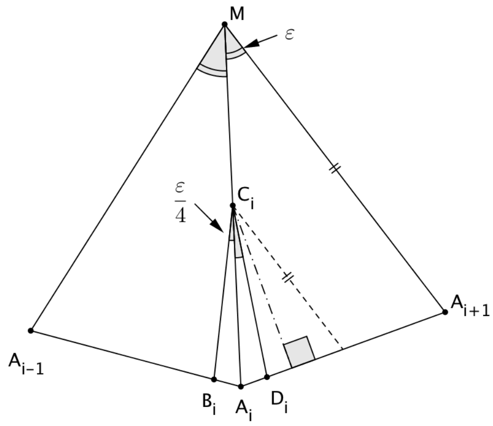
Sie schneiden sich in einem Punkt Z, denn mit einem Punkt Z_0 auf der Verlängerung der Seite A_0A_1 über A_0 hinaus und einem Punkt Z_{673} auf der Verlängerung der Seite $A_{672}A_{673}$ über A_{673} hinaus gilt

$$\begin{aligned}
&\angle Z_{673}A_{673}M + \angle A_{673}MA_0 + \angle MA_0Z_0 \\
&= 2\left(180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) + (1342 - 673)\cdot\varepsilon \qquad (2.4)\\
&= 180^\circ + 670\varepsilon = 2\cdot 180^\circ - \varepsilon < 360^\circ.
\end{aligned}$$

Aus (2.4) folgt insbesondere, dass

$$\angle A_1ZA_{672} = \frac{180^\circ}{671} = \varepsilon \qquad (2.5)$$

ein spitzer Winkel ist.



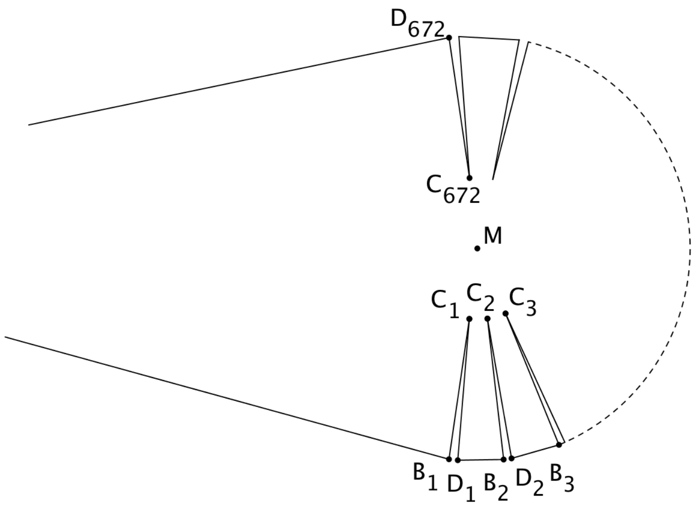
Für jedes i mit $1 \leq i \leq 672$ wähle nun wie in der nebenstehenden Skizze Punkte B_i, C_i, D_i mit den folgenden Eigenschaften: C_i ist der Mittelpunkt der Strecke A_iM, und die Punkte $B_i \in A_{i-1}A_i$ und $D_i \in A_iA_{i+1}$ werden so gewählt, dass

$$\angle B_iC_iA_i = \angle A_iC_iD_i = \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (2.6)$$

Hieraus folgt, dass

$$|B_iA_i| = |A_iD_i| < \frac{1}{4}\cdot|A_iA_{i+1}|. \qquad (2.7)$$

Wegen (2.7) ist $ZB_1C_1D_1B_2C_2D_2\cdots B_{671}C_{671}D_{671}B_{672}C_{672}D_{672}$ ein überschneidungsfreies ebenes Vieleck mit $1 + 3\cdot 672 = 2017$ Ecken.



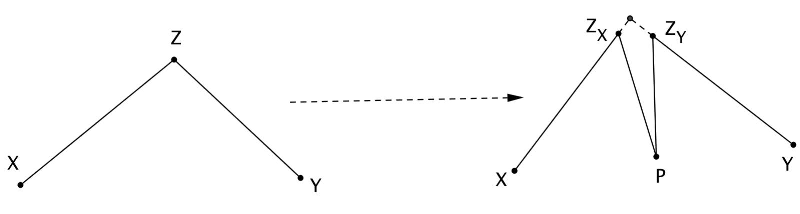
Die Winkel in den Eckpunkten B_i und D_i, $1 \leq i \leq 672$, sind spitz, denn wegen (2.6) ist

$$\angle C_i B_i A_{i-1} = 180° - \angle A_i B_i C_i = \angle B_i C_i A_i + \angle C_i A_i B_i = \frac{\varepsilon}{4} + 90° - \frac{\varepsilon}{2} < 90°, \quad (2.8)$$

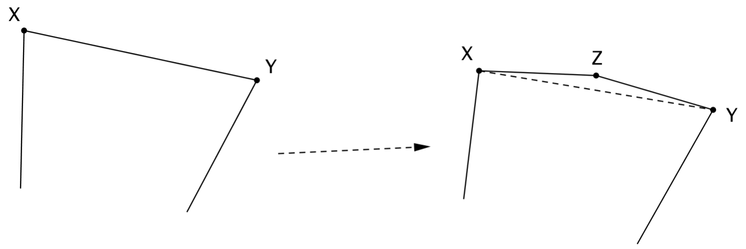
und analog $\angle A_{i+1} D_i C_i < 90°$. Zusammen mit (2.5) folgt: Das Vieleck hat spitze Innenwinkel in den Eckpunkten $Z, B_1, D_1, B_2, D_2, \ldots, B_{672}, D_{672}$, also in insgesamt $1 + 2 \cdot 672 = 1345$ Eckpunkten. $\square$

2. Beweis der Existenz (Skizze): Wir gehen hierzu von einem überschneidungsfreien ebenen Viereck mit drei spitzen Innenwinkeln aus und erweitern schrittweise die Anzahl der Ecken und die Anzahl der spitzen Winkel. Hierzu verwenden wir zwei Hilfssätze:

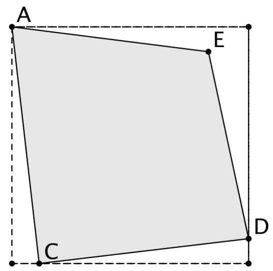
Hilfssatz 1 („Riss“): Gegeben sei ein m-Eck $\cdots XYZ \cdots$ mit einem Winkel $\angle XZY < 180°$. „Man sieht“, dass sich dann ein $(m+2)$-Eck $\cdots XZ_X PZ_Y Y$ so konstruieren lässt, dass $\angle XZ_X P$ und $\angle PZ_Y Y$ spitze Winkel sind; vgl. Skizze.



Hilfssatz 2 („Beule“): Gegeben sei die Kante XY eines m-Ecks, bei der die Winkel mit Scheiteln X und Y beide spitz sind. „Man sieht“, dass sich dann ein $(m+1)$-Eck $\cdots XZY \cdots$ so konstruieren lässt, dass die Winkel mit Scheiteln X und Y beide spitz bleiben und $\angle XZY$ stumpf ist; vgl. Skizze.



Iteration: Wir beginnen mit dem Viereck $ACDE$ wie in der Skizze, das drei spitze Innenwinkel und einen stumpfen Innenwinkel besitzt, etwa $\angle CAE = \angle EDC = 80°$, $\angle DCA = 89°$ und $\angle AED = 111°$.



Durch eine Anwendung des Hilfssatzes 1 (im Punkt E) und des Hilfssatzes 2 an einer der beiden Kanten, die von Punkt A ausgehen, entsteht ein 7-Eck, das fünf spitze Innenwinkel, einen stumpfen Innenwinkel und einen überstumpfen Innenwinkel besitzt. Das lässt sich noch 670-mal anwenden und führt übers 10-Eck mit sieben spitzen Innenwinkeln, ... zum 2017-Eck mit $3 + 2 \cdot 617 = 1345$ spitzen Innenwinkeln. □

Bemerkung: Der Beweis der oberen Schranke in (2.1) führt allgemeiner für die Anzahl s_k der spitzen Winkel in einem überschneidungsfreien ebenen $(3k+1)$-Eck, $k \geq 1$, zur Abschätzung

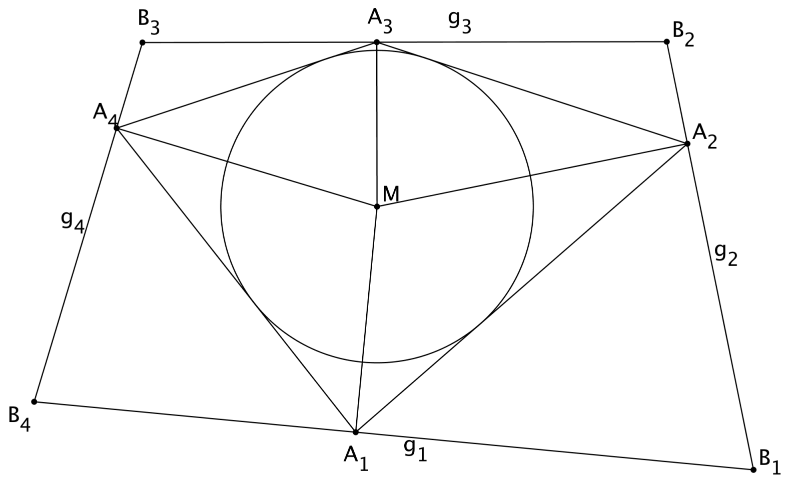
$$\begin{aligned}(3k-1)\cdot 180° < s_k \cdot 90° + (3k+1-s_k)\cdot 360° \iff \\ s_k \cdot 270° < 3(k+1)\cdot 180° \iff \\ s_k \leq 2k+1;\end{aligned} \tag{2.9}$$

wir konstruieren also auf die im 2. Beweis beschriebene Art für alle betrachteten überschneidungsfreien ebenen $(3k+1)$-Ecke, $k \geq 1$, solche mit der maximalen Anzahl spitzer Winkel.

Aufgabe 3

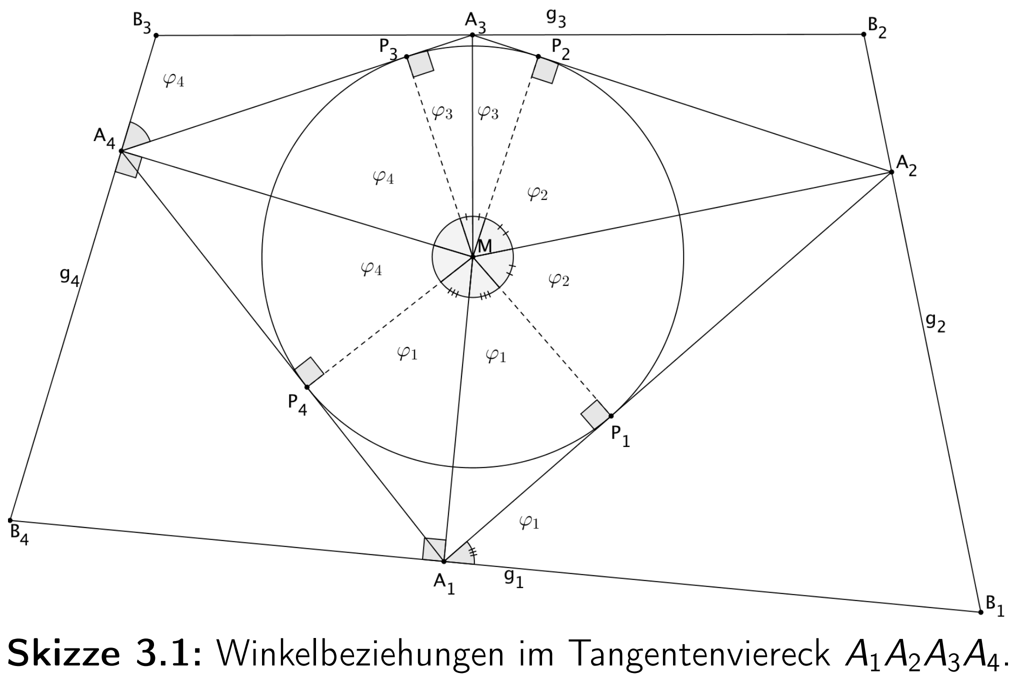
In einem konvexen Tangentenviereck $A_1A_2A_3A_4$ sei M der Mittelpunkt des Inkreises, der die Seiten des Vierecks berührt. Weiter sei g_1 die Gerade durch A_1, die senkrecht auf der Strecke A_1M steht; entsprechend seien g_2, g_3 und g_4 festgelegt. Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 bestimmen ein weiteres Viereck $B_1B_2B_3B_4$, wobei B_1 der Schnittpunkt von g_1 und g_2 ist; entsprechend bezeichnet B_2, B_3 bzw. B_4 den Schnittpunkt von g_2 und g_3, g_3 und g_4 bzw. g_4 und g_1.

Beweise, dass sich die Diagonalen des Vierecks $B_1B_2B_3B_4$ im Punkt M schneiden.



Beweis: Die Diagonale B_1B_3 verläuft durch den Punkt M, wenn $\angle B_1MB_3 = 180°$; die Diagonalen im Viereck $B_1B_2B_3B_4$ schneiden sich im Punkt M, wenn auch $\angle B_4MB_2 = 180°$.

Zum Beweis von $\angle B_1MB_3 = 180° = \angle B_4MB_2$ betrachten wir im Tangentenviereck $A_1A_2A_3A_4$ auch die Punkte P_1, P_2, P_3 bzw. P_4, an denen der Inkreis die Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 bzw. A_4A_1 berührt; vgl. Skizze 3.1.



Skizze 3.1: Winkelbeziehungen im Tangentenviereck $A_1A_2A_3A_4$.

Die beiden Dreiecke $\triangle A_1MP_4$ und $\triangle MA_1P_1$ sind kongruent auf Grund des Kongruenzsatzes *Ssw*. Denn die beiden Seiten P_1M, MP_4 sind gleich lang, weil sie Inkreisradien im Tangentenviereck $A_1A_2A_3A_4$ sind; außerdem sind $\angle A_1P_4M = \angle MP_1A_1 = 90°$ (nach Definition der Berührpunkte P_4, P_1) und $A_1M > P_4M =$

MP_1, weil A_1 nach Konstruktion außerhalb des Inkreises des Tangentenvierecks $A_1A_2A_3A_4$ liegt. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt

$$\angle P_4MA_1 =: \varphi_1 = \angle A_1MP_1, \tag{3.1}$$

und aus der Winkelsumme im Dreieck $\triangle MA_1P_1$ folgt $\angle P_1A_1M = 90^\circ - \varphi_1$. Auf Grund der Orthogonalität von $g_1 = (A_1B_1)$ zu A_1M gilt damit auch

$$\angle B_1A_1A_2 = \angle B_1A_1P_1 = \angle B_1A_1M - \angle P_1A_1M = \varphi_1. \tag{3.2}$$

Analog weisen wir

$$\begin{aligned} \angle P_1MA_2 &= A_2MP_2 =: \varphi_2, \\ \angle P_2MA_3 &= A_3MP_3 =: \varphi_3 \text{ und} \\ \angle P_3MA_4 &= A_4MP_4 =: \varphi_4 \end{aligned} \tag{3.3}$$

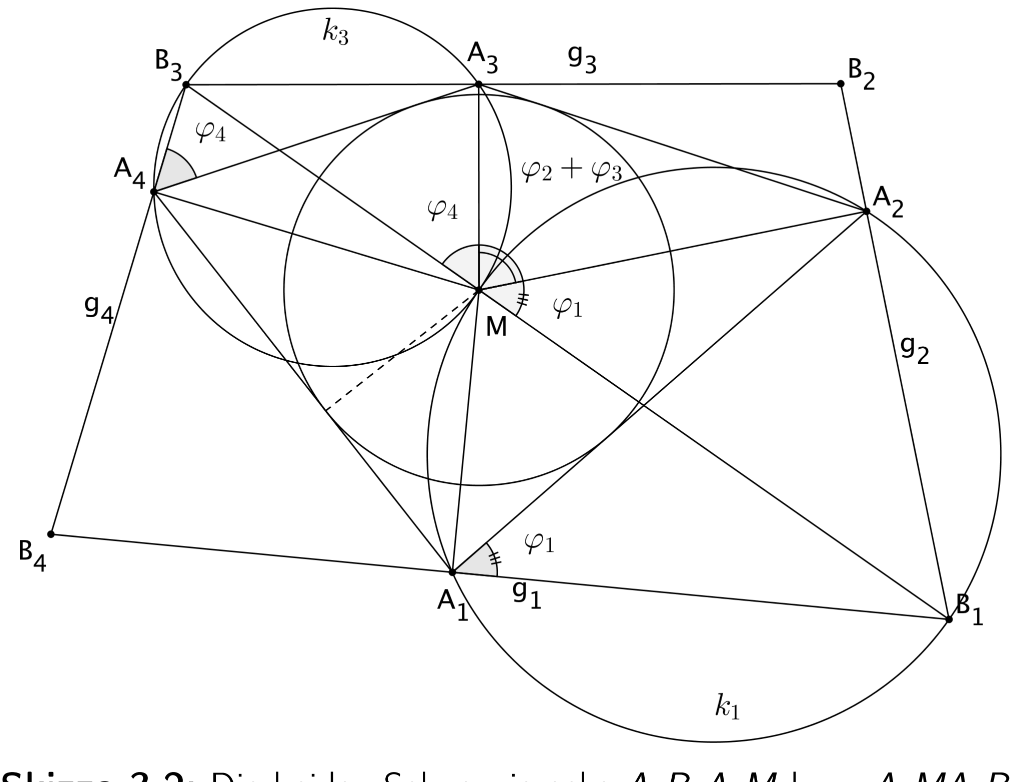
nach; außerdem ist, analog zu (3.2), auch

$$\angle A_3A_4B_3 = \varphi_4. \tag{3.4}$$

Wir schließen zudem aus (3.1) und (3.3), dass

$$2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = 360^\circ \iff \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180^\circ. \tag{3.5}$$

Wir betrachten nun die beiden Vierecke $A_1B_1A_2M$ bzw. $A_4MA_3B_3$: Nach Konstruktion in der Aufgabenstellung sind die jeweils gegenüberliegenden Winkel mit den Scheiteln A_1, A_2 bzw. A_3, A_4 rechte Winkel, addieren sich also zu 180°, und beide Vierecke sind daher Sehnenvierecke. Es existieren also Umkreise k_1 bzw. k_3, der Vierecke $A_1B_1A_2M$ bzw. $A_4MA_3B_3$; vgl. Skizze 3.2.



Skizze 3.2: Die beiden Sehnenvierecke $A_1B_1A_2M$ bzw. $A_4MA_3B_3$.

Wir wenden nun zweimal den Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel an: Im Sehnenviereck $A_1B_1A_2M$ sind $\angle B_1A_1A_2$ und $\angle B_1MA_2$ Umfangswinkel über dem Kreisbogen $k_{B_1A_2}$ von k_1, es ist also

$$\angle B_1MA_2 = \angle B_1A_1A_2 = \varphi_1, \tag{3.6}$$

analog folgt für die Umfangswinkel $\angle A_3MB_3$ und $\angle A_3A_4B_3$ über dem Kreisbogen $k_{A_3B_3}$ von k_3 mit (3.4), dass

$$\angle A_3MB_3 = \angle A_3A_4B_3 = \varphi_4. \tag{3.7}$$

Aus (3.6),(3.3), (3.7) folgt zusammen mit (3.5), dass

$$\begin{aligned}\angle B_1MB_3 &= \angle B_1MA_2 + \angle A_2MP_2 + \angle P_2MA_3 + \angle A_3MB_3\\ &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180^\circ;\end{aligned}$$

das wollten wir zeigen. Die Tatsache $\angle B_4MB_2 = 180^\circ$ wird analog zu (3.8) durch Betrachtung der Sehnenvierecke $MA_2B_2A_3$ und $B_4A_1MA_4$ bewiesen:

$$\angle B_4MB_2 = \angle B_4MA_1 + \angle A_1MP_1 + \angle P_1MA_2 + \angle A_2MB_2 = \varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 180^\circ.$$

$\square$

Aufgabe 4

Die Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sei rekursiv definiert durch die Vorschrift:

$a_0 := 1$ und $a_n := a_{n-1} \cdot (4 - \frac{2}{n})$ für $n \geq 1$.

Beweise, dass für jedes $n \geq 1$ gilt:

a) a_n ist eine natürliche Zahl.

b) Jede Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ ist Teiler von a_n.

c) Wenn n eine Primzahl ist, dann ist $a_n - 2$ durch n teilbar.

Beweis: Wir erinnern an die Bezeichnungen $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, genannt n *Fakultät*, wobei $0! := 1$ und

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

für $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$ (*Binomialkoeffizient „n über k“*), also für $n \geq 0$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{4.1}$$

und

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ für } 0 \leq k \leq n, \tag{4.2}$$

sowie als rekursive additive Beziehung (*Pascalsches Dreieck*) für $n \geq 2$ und $1 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{4.3}$$

Der Artikel „Ein arithmetisches Abenteuer“ von Herrn Dr. Fuchs diskutiert in MONOID 128 (2016) auf den Seiten 29-36 verschiedene Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&\mathbf{1}&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&\mathbf{2}&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&\mathbf{6}&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&\mathbf{20}&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&\mathbf{70}&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

Skizze: Pascalsches Dreieck mit den zeilenweisen Einträgen $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$ für $0 \leq n \leq 8$; fettgedruckt sind, von oben nach unten, die Einträge $a_0, a_1, \dots, a_4$.

Wir beweisen zunächst induktiv eine explizite Formel für a_n, nämlich

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \text{ für } n \geq 0. \tag{4.4}$$

Wegen $a_0 = 1 = \binom{0}{0}$ ist die Induktionsverankerung gegeben. Für den Induktionsschluss $n-1 \rightarrow n$ für $n \geq 1$ bezüglich (4.4) sei also $a_{n-1} = \binom{2n-2}{n-1}$ vorausgesetzt. Dann folgt sofort aus der rekursiven Definition der Aufgabenstellung, dass

$$a_n := a_{n-1} \cdot \left(4 - \frac{2}{n}\right) = \frac{(2n-2)(2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)} \cdot \frac{2(2n-1)}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Wir beweisen damit die drei Aussagen der Aufgabenstellung.

a) Es folgt (durch Induktion über n) aus den Eigenschaften (4.1) und (4.3) der Binomialkoeffizienten, dass jeder Binomialkoeffizient und damit auch $a_n = \binom{2n}{n}$ eine natürliche Zahl ist.

b) Wir betrachten den Quotienten aus (4.4): Jede Primzahl p mit $n < p \leq 2n$, also $n + 1 \leq p$, ist als Faktor im Produkt des Zählers enthalten, nicht jedoch im Produkt des Nenners. Damit ist p ein Teiler von a_n.

c) Es sei $n \geq 2$ eine Primzahl. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$: es ist $a_2 - 2 = 4$ durch 2 teilbar. Es gilt für eine Primzahl $p = n \geq 3$ stets $n - 1 < p \leq 2(n-1)$, also ist nach der Aussage unter b), die wir eben bewiesen haben, p ein Teiler von a_{n-1}. Nach der rekursiven Definition von a_n gilt

$$a_n - 2 = 4a_{n-1} - 2\left(\frac{a_{n-1}}{n} + 1\right) =: 4a_{n-1} - 2b_{n-1}, \tag{4.5}$$

also ist $p = n$ ein Teiler von $a_n - 2$, wenn wir zeigen, dass p nicht nur Teiler von

a_{n-1}, sondern auch von b_{n-1} ist. Weil $p = n$ prim ist, ist hierzu gleichwertig, dass p Teiler von $b_{n-1} \cdot (n-1)!$ ist.

Mit (4.4) folgt

$$\begin{aligned} b_{n-1} \cdot (n-1)! &= \frac{1}{n} \cdot (2n-2) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n + (n-1)! \\ &= (2n-2) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot (n+1) + (n-1)! \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wir betrachten zunächst den ersten der beiden Summanden in (4.6); mit $p = n$ und Ausmultiplizieren ergibt sich

$$\begin{aligned} (2n-2) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot (n+1) &= (p+n-2) \cdot (p+n-3) \cdot \ldots \cdot (p+1) \\ &= B_{n-1} \cdot p + (n-2)! \end{aligned}$$

mit einer natürlichen Zahl B_{n-1}. Zusammen mit (4.6) folgt damit

$$\begin{aligned} b_{n-1} \cdot (n-1)! &= B_{n-1} \cdot p + (n-2)! + (n-1)! \\ &= B_{n-1} \cdot p + (n-2)!(1 + n - 1) \\ &= (B_{n-1} + (n-2)!) \cdot p, \end{aligned}$$

und das war zu beweisen. □

Beweis (Variante zu c): Es sei $n \geq 2$. Durch mehrfache Anwendung von (4.3) auf jeweils den rechten Term der Summe in (4.3) folgt für $1 \leq k \leq n-1$, dass

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j}. \tag{4.7}$$

Es ist nach (4.3) und (4.2)

$$a_n - 2 = \binom{2n}{n} - 2 = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} - 2 = 2\left[\binom{2n-1}{n-1} - 1\right]. \tag{4.8}$$

Wir wenden (4.7) auf den Term $\binom{2n-1}{n-1}$ in (4.8) an und erhalten wegen (4.1) für den Ausdruck in der eckigen Klammer

$$\binom{2n-1}{n-1} - 1 = -1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-2-j}{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{2n-2-j}{n-1-j}. \tag{4.9}$$

Wenn $n \geq 2$ eine Primzahl ist, ist jeder der Summanden auf der rechten Seite von (4.9) ein Vielfaches von n: Denn für $0 \leq j \leq n-2$ sind im Bruch auf der rechten Seite von

$$\binom{2n-2-j}{n-1-j} = \frac{(2n-2-j) \cdot (2n-3-j) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2-j) \cdot (n-1-j)} \tag{4.10}$$

alle Faktoren des Nenners kleiner als n und können somit kein Teiler des Primfaktors n im Zähler des Bruchs sein. Damit ist auch die Summe $\binom{2n-1}{n-1} - 1$ in (4.9) selbst ein Vielfaches von n, und wegen (4.8) muss $a_n - 2$ durch n teilbar sein. □

Bemerkung: Mann kann zum Nachweis von c) auch die Expansion von (4.3), also die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_n = \binom{2n}{2} &= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} \\ &= \binom{2n-2}{n} + \binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2} \\ &= \binom{2n-3}{n} + \binom{3}{1}\binom{2n-3}{n-1} + \binom{3}{2}\binom{2n-3}{n-2} + \binom{2n-3}{n-1} \\ &= \cdots = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n-n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

verwenden, wobei die letzte Gleichung aus (4.2) folgt. Für $1 \leq k \leq n-1$ wird dann wie in (4.10) für jeden der Terme $\binom{n}{k}$ die Teilbarkeit durch n nachgewiesen (auch hier geht ein, dass n als prim vorausgesetzt ist); die beiden „äußeren" Terme werden durch die Subtraktion von 2 aufgehoben. Damit beweist dieser Ansatz sogar, dass $a_n - 2$ durch n^2 teilbar ist, wenn n prim ist.

Wir danken Herrn Prof. Quaisser und Herrn StD Fegert für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Markus Weeks: „Wie viele Elefanten wiegt ein Blauwal?"

Ein durchschnittlicher Blauwal hat eine Masse von ca. $150t = 150.000$ kg. Will man mit Dingen aus dem Alltag einen Eindruck für diese gigantische Masse gewinnen, so könnte man sich überlegen, dass eine normale Milchtüte eine Masse von ca. 1 kg hat. Damit entspricht das Gewicht eines Blauwals also dem Gewicht von 150.000 Milchtüten. Leider kann man sich dieses auch nicht wirklich vorstellen. An dieser Stelle kommt das Buch von Marcus Weeks ins Spiel.

Aufgeteilt in 11 Kapitel nimmt sich der Autor verschiedene Größen vor: Länge, Fläche, Höhe, Gewicht, Volumen, Bevölkerung, Zeit, Geschwindigkeit, Temperatur, Energie und Schall. Ausgehend von etwas Alltäglichem konstruiert Weeks „Grundeinheiten", mit denen er dann verschiedene für uns eigentlich unvorstellbare Größen fassbar macht. Mit einem *Doppelbett* als Flächeneinheit lässt sich eine Wohnungsgröße verstehen, ein *Autostellplatz* oder ein *Boxring* = 4 Autostellplätze lässt zum Beispiel die Größe eines Fußballfeldes klarer erscheinen.

Das Schöne an dem Buch ist es vor allem, dass darin Vergleiche gezogen werden, an die man von alleine wahrscheinlich niemals gedacht hätte; oder wer wäre auf die Idee gekommen, das Ladevolumen eines Supertankers mit der Größe von Olympiaschwimmbecken zu vergleichen? Durch diese und ähnliche Bezüge bringt der Autor seine Leserinnen und Leser dazu, über im Alltag ganz selbstverständlich auftauchende Größenangaben intensiver nachzudenken.

Der zu Beginn angesprochene Blauwal hat in etwa das gleiche Gewicht wie 25 ausgewachsene afrikanische Elefanten. Ein Elefant wiegt genauso viel wie 75 durchschnittliche männliche Erwachsene („Otto Normalverbraucher“). Wer Lust hat, kann sich nun ausrechnen, wie viel ein „Otto Normalverbraucher“ auf die Waage bringt.

Fazit:

Marcus Weeks ist ein schönes Buch gelungen, in das man immer wieder gerne einmal reinsehen wird. Um die wahre Größe von Größeneinheiten besser zu verstehen, bietet es sich - vor allem aber nicht nur für jüngere Schülerinnen und Schüler - an gerade im Mathematik- oder Physikunterricht neu gelernte Einheiten mit Hilfe von Weeks Vergleichsgrößen vorstellbarer zu machen.

Ein kleiner Schönheitsfehler besteht allerdings darin, dass man bei einigen der ausgewählten Größen merkt, dass die ursprüngliche Fassung des Buches aus dem englischen Sprachraum kommt, so wenn Baseballfelder, Bundesstaaten der USA oder die Royal Albert Hall angesprochen werden.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Weeks, Marcus: Wie viele Elefanten wiegt ein Blauwal? Spektrum Sachbuch 2011, ISBN 978-3-8274-2893-6, geb. 128 Seiten

Art des Buches:	Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 10 Jahren

Mitteilungen

- Die nächste Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) findet vom 6. bis 10. September 2017 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  `www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 127

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Katharina Beck 13, Julia-Michelle Butter 3, Tom Erkens 4, Lars Schall 6, Fabian Thater 7;
Kl. 6: Linus Kemmeter 7, Nils Koch 6;
Kl. 7: Lukas Born 13, Lea Daum 9, Paul Schall 13, Jonas Schneider 9, Trevor Schöller 9, Victoria Strunk 13;
Kl. 9: Torben Bürger 9,5, Virginia Fox 9,5, Maximilian Hauck 27, Sarah Kästner 12;
Kl. 13: Katharina Rößler 15.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 13: Nils Werner 12.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Privates Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg:
Kl. 6: Tobit Roth 8;
Kl. 11: Annika Bünnagel 8;
Kl. 12: Frauke Stoll 8.

Duisburg, FHG: Kl. 7: Lena Hirtz 2.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 7: Noah Böhm 3, Olivia Stachow 6;
Kl. 13: Adriana Stenger 8, Marcel Wittmann 20.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule:
Kl. 11: Patrick Riebe 19.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Aleksandra Herbst 18.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Maximilian Göbel 22.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 11: Melina Mayle 21.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:
Kl. 8: Beatrice Popescu 10.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 9: Dennis Mayle 23,5.

Linz, Martinus Gymnasium:
Kl. 6: Simon Waldek 6.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium
Kl. 5: Gregor Salaru 20.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:
Kl. 12: Silas Rathke 22.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jonathan Friedel 7,5, Daniel Roussev 9, Esther Schmeding 15;
Kl. 8: Sönke Schneider 40, Arne Witt 9;
Kl. 9: Lennard Freud 17;
Kl. E1: Kristin Teichert 17, Jan Wabnig 21;

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 7: Miriam Büttner 18.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 7: Raphael Gaedtke 9.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 6: Mareike Bühler 7.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Verena Lucas, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Emily Searle-White, Bettina Wiebe
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 37 | Heft 129 | März 2017

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid