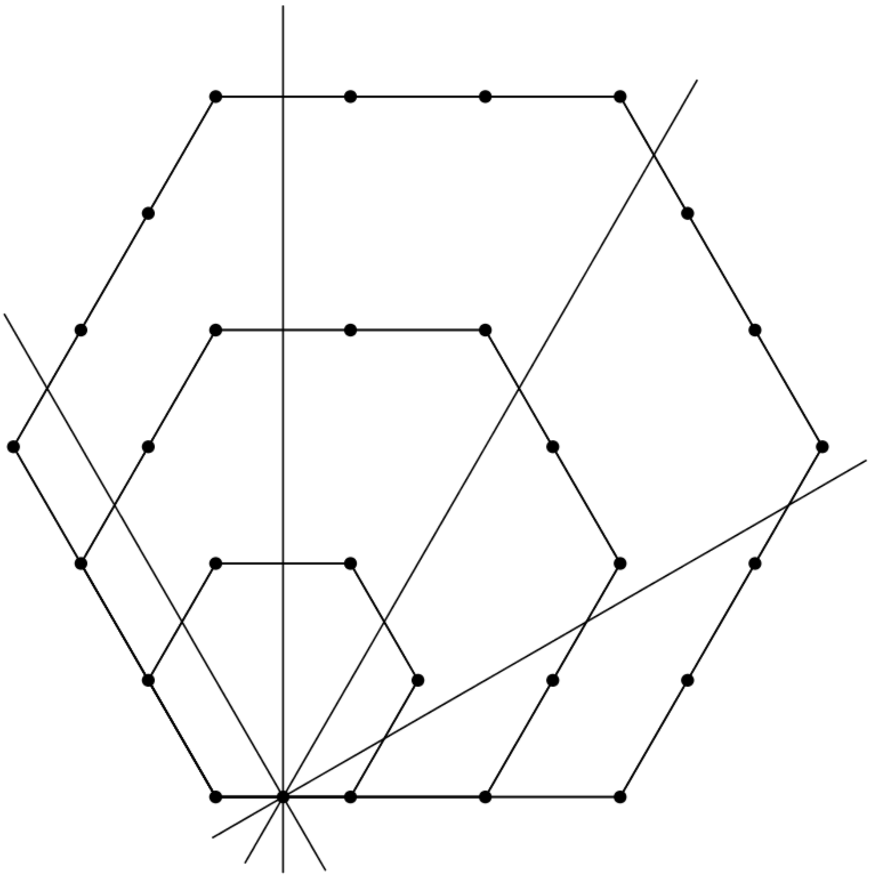
Jahrgang 37 Heft 130 Juni 2017

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.08.2017**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erschienen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“. Mehr darüber könnt Ihr auf der vorletzten Umschlagseite lesen.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Fibonacci und Pythagoras

von WJB und FR

Sind u und v zwei natürliche Zahlen mit $u > v$, so bilden $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ und $z = u^2 + v^2$ ein pythagoreisches Tripel.
Wir bezeichnen mit $F(n)$ das n-te Glied der Fibonacci-Folge:

$$F(1) = 1, F(2) = 1, F(3) = 2, F(4) = 3,$$
$$F(5) = 5, \cdots, F(n+2) = F(n+1) + F(n).$$

Wählen wir für u und v zwei aufeinander folgende Zahlen aus der Fibonacci-Folge, d.h. $u = F(n)$ und $v = F(n-1)$, so ergibt sich folgendes (für $n = 1$ setzen wir $v = F(0) = 0$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
v	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
x	1	0	3	5	16	39	105	272	715	1869	4896
y	0	2	4	12	30	80	208	546	1428	3740	9790
z	1	2	5	13	34	89	233	610	1597	4181	10946

Hier fallen einige Beziehungen auf, teils sofort, teils bei etwas näherem Hinschauen: Einige sieht man leicht ein, so sind $z(n) - y(n) = F^2(n-2)$ und $z(n) + y(n) = F^2(n+1)$ die Beziehungen $(u^2 + v^2) - 2uv = (u - v)^2$ bzw. $(u^2 + v^2) + 2uv = (u + v)^2$. $x(n) = u(n-2)u(n+1) = F(n-2)F(n+1)$ lässt sich einfach zeigen mit Hilfe der Rekursionsformel für die Fibonacci-Zahlen.

Dass $z(n)$ - konstruiert als $u^2(n) + v^2(n) = F^2(n) + F^2(n-1)$ gleich $F(2n-1)$ ist, wollen wir nun zeigen. Dazu gehen wir zurück zur ursprünglichen Konstruktion der Fibonacci-Folge als Modell für die Entwicklung einer Kaninchenpopulation: Jedes in der Generation k lebende „erwachsene“ Kaninchenpaar wird in der Generation $k+1$ ersetzt durch ein „junges“ Paar und ein „erwachsenes“. In Generation n haben wir dann $E(n) = F(n-1)$ „erwachsene“ und $F(n) - E(n) = F(n-2) = J(n)$ „junge“ Paare. Nun bemerken wir, dass $F(2n-1)$ gleich der Summe der Anzahlen der Nachkommenspaare dieser $E(n) + J(n) = F(n)$ Paare ist. Jedes der zur Zeit n vorhandene $J(n)$ Paare hat zur Zeit $2n-1$ so viele Nachkommen wie das ursprüngliche, zur Zeit 1 junge, Paar zur Zeit n hat, also $F(n)$. Dies ergibt also $J(n)F(n) = F(n-2)F(n)$ Paare. Jedes der zur Zeit n „erwachsenen“ Paare hat zur Zeit $(2n-1)$ so viele Nachkommen wie ein zur Zeit $(n-1)$ „junges“ Paar, also $F(n+1)$. Dies ergibt weitere $E(n)F(n+1) = F(n-1)F(n+1)$ Paare.

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} F(2n-1) &= F(n-2)F(n) + F(n-1)F(n+1) \\ &= F(n)(F(n-2) + F(n-1)(F(n-1) + F(n)) \\ &= F(n)(F(n-2) + F(n-1)) + F^2(n-1) = F^2(n) + F^2(n-1). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $F(2n-1) = F^2(n) + F^2(n-1)$.

Interessanterweise sind nicht nur Fibonaccizahlen mit ungerader Nummer die Summe von 2 Quadraten von Fibonaccizahlen, sondern Glieder mit gerader Nummer sind gleich der Differenz von 2 Quadraten von Fibonaccizahlen:

Konkret: Die Beziehung $F(2n) = F^2(n+1) - F^2(n-1)$ kann mit $n = m$ als Spezialfall der allgemeineren Gleichung

$$(*) \quad F(m+n) = F(n-1) \cdot F(m) + F(n) \cdot F(m+1) \text{ für alle } m > 0, n > 1$$

bewiesen werden. Damit lassen sich spätere Folgenglieder durch Zerlegung der laufenden Nummer auf deutlich kleinere laufende Nummern zurückführen, die ihrerseits aus Gliedern mit noch kleineren Nummern geschickt errechenbar sind usw., d.h. die Rekursionsformel muss nicht zwingend für alle kleineren Nummern ausgeführt werden!

Die letzte Gleichung wollen wir mit vollständiger Induktion nach n beweisen: Für $n = 2$ können wir die Behauptung als gültig ansehen: In der Tat gilt wegen der Rekursionsformel der Folge und den Startwerten $F(1) = F(2) = 1$:

$$F(m+2) = 1 \cdot F(m) + 1 \cdot F(m+1) = F(2-1) \cdot F(m) + F(2) \cdot F(m+1)$$

d.h. (*) ist für n=2 richtig. Induktionsschritt: Angenommen, (*) gilt für n, dann gilt es auch für $n+1$: $F(m+n+1) = F((m+1)+n) = F(n-1) \cdot F(m+1) + F(n) \cdot F(m+2)$, mit der Rekursionsformel für $m+2$:

$$F(m+n+1) = F(n-1) \cdot F(m+1) + F(n) \cdot (F(m) + F(m+1)),$$

nach Umstellung der Summanden und Ausklammern erhält man:

$$\begin{aligned} F(m+n+1) &= F(n) \cdot F(m) + F(m+1) \cdot (F(n-1) + F(n)) \\ &= F(n) \cdot F(m) + F(m+1) \cdot F(n+1) \end{aligned}$$

d.h. (*) gilt auch für $n+1$. Damit ist (*) für alle $m > 0, n > 1$ bewiesen!

Wohlgemerkt - die Formel (*) ist in jedem Schritt für beliebige ganze $m > 0$ betrachtet worden. Das erlaubt auch, m durch $m+1$ zu ersetzen, wie wir zu Beginn des vorigen Absatzes vorgegangen sind!

In unserem Fall ergibt sich mit $m = n$ in (*): $F(2n) = F(n-1) \cdot F(n) + F(n) \cdot F(n+1)$ und wiederum laut Rekursionsformel wegen $F(n) = F(n+1) - F(n-1)$ erhält man direkt:

$$\begin{aligned} F(2n) &= F(n-1) \cdot F(n+1) - F^2(n-1) + F(n) \cdot F(n+1) \\ &= F(n+1) \cdot (F(n-1) + F(n)) - F^2(n-1) \end{aligned}$$

und erneut laut Rekursionsformel schließlich: $F(2n) = F^2(n+1) - F^2(n-1)$, w.z.b.w.

Das bedeutet, dass jede Fibonaccizahl mit gerader Nummer gleich der Quadratdifferenz von 2 Folgengliedern mit Nummernabstand 2 ist. Daraus ergibt sich, dass solche Zahlen stets zusammengesetzt sind ($n > 2$), da nach der 3. Binomischen Formel $F(2n)$ als Produkt zweier Zahlen > 1 darstellbar ist:

$$\begin{aligned} F(2n) &= (F(n+1) - F(n-1)) \cdot (F(n+1) + F(n-1)) \\ &= F(n) \cdot (F(n+1) + F(n-1)), \end{aligned}$$

und da die Fibonaccifolge streng monoton steigt mit $F(n) > 1$ für $n > 2$, sind beide Faktoren größer als 1. Nebenbei ergibt sich eine weitere Feststellung: $F(2n)$ ist stets durch $F(n)$ teilbar, z.B. ist $F(2 \cdot 5) = F(10) = 55 = 5 \cdot 11 = F(5) \cdot 11$, andererseits aber auch:

$$F(2 \cdot 5) = F(10) = 55 = 64 - 9 = 82 - 32 = F^2(5+1) - F^2(5-1).$$

Übung 1: Untersucht einmal, ob $F(2n)$ auch eine Quadratzahl y^2 sein kann, denn dann könnten wir ausgehend von der bewiesenen Formel ein pythagoreisches Tripel ableiten: $(F(n-1), y, F(n+1))$.

Übung 2: Können die Glieder der Fibonaccifolge selbst ein pythagoreisches Tripel bilden?

Es wurde auch schon untersucht, welche Fibonaccizahlen prim sein können und welche es tatsächlich sind: bis heute ist unbekannt, ob sich in der Folge unendlich viele Primzahlen verbergen!

Übung 3: Sucht einmal Beispiel-Primzahlen in der Fibonaccifolge! Was lässt sich über die Nummer einer primen Fibonaccizahl aussagen?

Weitergehende Übungen zu pythagoreischen Tripeln (x,y,z):

(1) Man beweise, dass $(2 \cdot F(n) \cdot F(n-1), F^2(n) - F^2(n-1), F(2n-1))$ ein Tripel bildet, z.B. für $n = 4$ das Tripel $(2 \cdot 3 \cdot 2, 3^2 - 2^2, 13) = (12, 5, 13)$ d.h. $144 + 25 = 169$. Mit der Bezeichnung $(2uv, u^2 - v^2, z)$ steht das eigentlich schon ganz oben.

(2) Man beweise, dass $(F(n) \cdot F(n+3), 2 \cdot F(n+1) \cdot F(n+2), F^2(n+1) + F^2(n+2))$ ein Tripel bildet, z.B. für $n = 3$ das Tripel $(2 \cdot 8, 2 \cdot 3 \cdot 5, 3^2 + 5^2) = (16, 30, 34)$, d.h. $256 + 900 = 1156$ bzw. das Tripel ohne gemeinsame Teiler $(8, 15, 17)$.

Literaturhinweis:

[1] - Huberta Lausch, Fibonacci und die Folge(n), Oldenbourg-Verlag, 2009.

[2] - Alfred S.Posamentier u. Ingmar Bergmann, The (Fabulous) Fibonacci Numbers, Prometheus Books, 2007.

[3] - Marc Chamberland, Von Eins bis Neun, Springer, 2016.

Die Lösungen zu den Aufgaben findet ihr auf Seite 35.

Die Potenzen von ϱ und eine Eigenschaft der Fibonacci-Zahlen

von W. J. Bühler

Suchen wir zu der Rekursion $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ eine Lösung der Form $x_n = y^n$, so ergibt sich die Gleichung $y^{n+1} = y^n + y^{n-1}$, oder nach Division durch y^{n-1} die quadratische Gleichung $y^2 = y + 1$ (wg. $x_1 > 0$ ist $y \neq 0$). Diese hat zwei reelle Lösungen $\varrho = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ und $\sigma = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)$. Wir bemerken, dass $\varrho \cdot \sigma = -1$ und deshalb $\varrho^n \sigma^n = (-1)^n$. ϱ^n (und σ^n) lösen tatsächlich die Rekursion und alle Lösungen sind von der Form $x = a\varrho^n + b\sigma^n$.

Wählen wir die Anfangsbedingungen $x_0 = F_0 = 0$ und $x_1 = x_2 = F_1 = F_2 = 1$, so erhalten wir die Fibonacci-Folge $F_0, F_1, F_2, ... = 0, 1, 1, 2, ...$. Für diese bestimmen wir a und b aus

$0 = F_0 = a\varrho^0 + b\sigma^0 = a + b$, d.h. $b = -a$, und

$1 = F_1 = a\varrho + b\sigma = a(\varrho - \sigma) = a\sqrt{5}$, d.h. $a = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Wir untersuchen nun die Potenzen von ϱ und σ:

$$\varrho^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{4}(6 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$$

und

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right)^2 = ... = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

$$\varrho^3 = \varrho \cdot \varrho^2 = \frac{1}{4}(3 + 3\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{5}), \quad \sigma^3 = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{5})$$
$$\varrho^4 = (\varrho^2)^2 = \frac{1}{4}(9 + 6\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}), \quad \sigma^4 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})$$

Spätestens nach der Berechnung von zwei weiteren Potenzen sieht man, dass $\varrho^n = \frac{1}{2}(s_n + t_n\sqrt{5})$, wobei sich ergibt,

$$\varrho^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\frac{1}{2}(s_n + t_n\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(s_n + 5t_n) + \frac{1}{4}(s_n + t_n)\sqrt{5},$$

also $s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + 5t_n)$, $t_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + t_n)$. Die ersten Werte für s_n und t_n sind

$$(s, t) = (1, 1), (3, 1), (4, 2), (7, 3), (11, 5), (18, 8), ...$$

Es fällt auf, dass die t-Werte (so weit hier berechnet) den Anfang der Fibonacci-Folge bilden, und dass für alle s-Werte $1, 3, 4, 7, 11, 18$ ebenfalls die Fibonacci-Rekursion $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$ gilt.

Also muss es Konstanten c und d geben mit $s_n = c\varrho^n + d\sigma^n$. Man bestätigt leicht $\varrho + \sigma = 1$, $\varrho^2 + \sigma^2 = 3$, also $c = d = 1$ und $s_n = \varrho^n + \sigma^n$.

Ein anderer (naheliegender) Zugang zur Bestimmung von ϱ^n (und σ^n) ergibt sich aus der Darstellung $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varrho^n - \sigma^n)$ bzw. mit $\sigma = -\frac{1}{\varrho}$

$$\sqrt{5}F_n = \varrho^n - \frac{(-1)^n}{\varrho^n},$$

also die quadratische Gleichung für ϱ^n

$$(\varrho^n)^2 - \sqrt{5}F_n\varrho^n - (-1)^n = 0.$$

Diese hat die Lösung

(*) $\varrho^n = \frac{\sqrt{5}F_n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5F_n^2 + (-1)^n \cdot 4}$.

Nun ist

$$\begin{aligned} 5F_n^2 &= (\varrho^n - \sigma^n)^2 = \varrho^{2n} - 2\varrho^n\sigma^n + \sigma^{2n} \\ &= (\varrho^n + \sigma^n)^2 - 4\varrho^n\sigma^n = (\varrho^n + \sigma^n)^2 - 4(-1)^n. \end{aligned}$$

(*) bestätigt also, dass $t_n = F_n$ und dass $s_n = \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n} = \varrho^n + \sigma^n$ die Folge $1, 3, 4, 7, \ldots$ ergibt. Die Tatsache, dass für jede Fibonacci-Zahl F entweder $5F^2 + 4$ oder $5F^2 - 4$ eine Quadratzahl ist, fand ich überraschend. Es bleibt die Vermutung, dass die Gleichungen $5x^2 + 4 = z^2$ und $5x^2 - 4 = z^2$ keine anderen ganzzahligen Lösungen besitzen.

Die besondere Aufgabe
Eine Rechenaufgabe aus Pisa
von Wolfgang J. Bühler

Im Jahr 1225 wurde bei einem Rechenwettbewerb in Pisa folgende Aufgabe gestellt:

Man finde eine rationale Zahl, deren Quadrat um fünf vermindert bzw. um fünf vermehrt jeweils wieder das Quadrat einer rationalen Zahl ergibt.

Der Rechenmeister und Steuerschätzer der Stadt Leonardo, heute bekannt unter dem Namen Fibonacci, fand eine Lösung und gewann den Wettbewerb. Dies beeindruckte den anwesenden Kaiser Friedrich II so, dass er Leonardo einen Wunsch freigab. Dieser wünschte, der Kaiser möge sich für die Einführung des Rechnens mit den damals im Abendland noch wenig bekannten „arabischen“ Ziffern einsetzen, was der Kaiser auch tat, allerdings zunächst mit mäßigen Erfolg - noch 1299 waren diese Ziffern in Florenz verboten.

Wie Fibonacci das Problem löste, ist mir nicht bekannt. Hier folgt meine Lösung.

Wir erweitern die Ausdrücke $\frac{m^2}{n^2} + 5$ und $\frac{m^2}{n^2} - 5$ jeweils mit n^2 und erhalten so die Forderungen $m^2 + 5n^2 = s^2$ und $m^2 - 5n^2 = t^2$, mit $t, s \in \mathbb{Z}$. Wir suchen nun bei festem n nach einer Lösung der Gleichung $x^2 - y^2 = 5n^2$. Eine solche

Lösung (x, y) ist dann Kandidat für (t, m) bzw. (m, s). Um das Problem zu lösen, braucht man dann zwei solche Kandidaten (mit gemeinsamem n).

Man stellt schnell fest, dass dies für $n < 12$ nicht möglich ist. Wir versuchen es jetzt zuerst für $n = 12$, also $5n^2 = 720$. Wir setzen $x - y = a$ und $x + y = b$ und suchen eine Zerlegung $720 = a \cdot b$, aus der wir dann $x = \frac{a+b}{2}$ und $y = \frac{a-b}{2}$ bestimmen. Wäre $x - y$ ungerade, so auch $x + y$. Wir können uns also auf Zerlegungen beschränken, bei denen a und b gerade sind. Wir finden:

$$\begin{aligned}720 &= 2 \cdot 360 = (181 - 179)(181 + 179) = 4 \cdot 180 = (92 - 88)(92 + 88)\\ &= 6 \cdot 120 = (63 - 57)(63 + 57) = 8 \cdot 90 = (49 - \mathbf{41})(49 + \mathbf{41})\\ &= 10 \cdot 72 = (\mathbf{41} - 31)(\mathbf{41} + 31) \text{ usw.}\end{aligned}$$

Die beiden zuletzt gefundenen Zerlegungen ergeben $41^2 + 720 = 49^2$ und $41^2 - 720 = 31^2$. Wenn wir nun die Multiplikation mit n^2 rückgängig machen, erhalten wir für das ursprüngliche Problem die gleiche Lösung wie Fibonacci, nämlich $\frac{41}{12}$.

Was uns so über den Weg gelaufen ist

Fibonacci-Matrizen

von W.J. Bühler

Die Potenzen $A, A^2, A^3, \ldots$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

usw. Daraus ergibt sich die Vermutung (mit $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$), dass:

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \text{ für alle } n.$$

Diese Vermutung bestätigt man leicht durch vollständige Induktion. Daraus sehen wir

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} &= A^{2n}\\ &= A^n \cdot A^n\\ &= \begin{pmatrix} F_{n-1}^2 + F_n^2 & F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} \\ F_nF_{n-1} + F_{n+1}F_n & F_n^2 + F_{n+1}^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und deshalb $F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2$, $F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}$.

Was folgern wir allgemeiner aus $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$?

Im Zoo der Polygonalzahlen

von Hartwig Fuchs

Vor dem Besuch: Einige Informationen über den Zoo

Im Griechenland des 6./5. Jahrhunderts v. Chr. rechnete man noch mit Steinchen (psephoi) auf einem Rechenbrett (abakion). Aber es wurden mit Steinchen nicht nur Rechnungen ausgeführt. Die frühen griechischen Mathematiker benutzten sie auch zur Veranschaulichung von Zahlen *, indem sie die Steinchen in der Ebene zu polygonalen Figuren anordneten (Abb. 1) - und mit solchen Figuren** begründeten sie auch elementare Aussagen über Zahlen (Abb. 2).

Beispiel 1

1. Polygonale Zahlendarstellungen

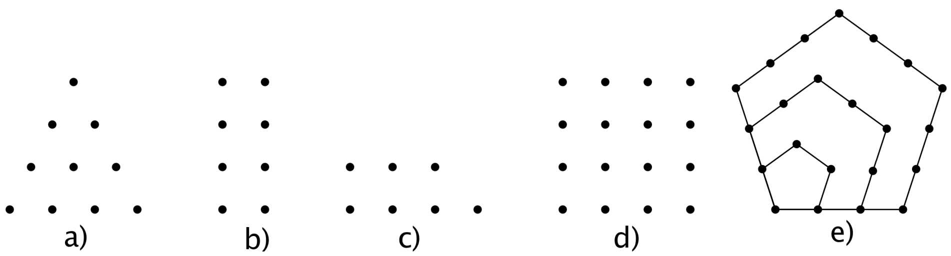


Abbildung 1:
a) Dreieckszahl 10 b) gerade Zahl 8 c) ungerade Zahl 7 d) Viereckszahl 16
e) Fünfeckszahl 22

2. Begründung einer elementaren Aussage durch einen Beweis ohne Worte

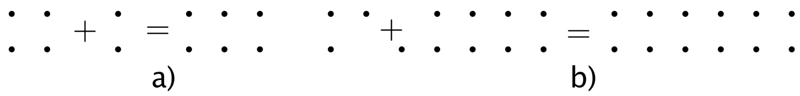


Abbildung 2:
a) Die Summe gerader Zahlen ist gerade. b) Die Summe zweier ungeraden Zahlen ist gerade.

Begeben wir uns nun in den Zoo der Polygonalzahlen und notieren, was uns so über den Weg läuft.

1. Abteilung: Dreieckszahlen

Man ordne in der Ebene nacheinander $d_2 = 3$, $d_3 = 6, d_4 = 10, \cdots$ Steinchen nach dem in Abb. 3. erkennbaren Dreiecksmuster an. Dann bezeichnet man die nach der Regel

(1) $d_1 = 1, d_{n+1} = d_n + n + 1$ oder auch $d_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

---

* „Zahl“ bedeutet im Folgenden stets „natürliche Zahl“.

** Es gibt Hinweise, dass bereits die Babylonier polygonale Zahlendarstellungen kannten.

festgelegten Zahlen d_n als *Dreieckszahlen*.

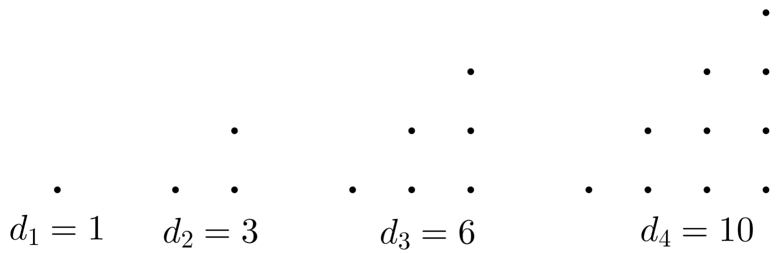


Abbildung 3: Die ersten vier Dreieckszahlen.

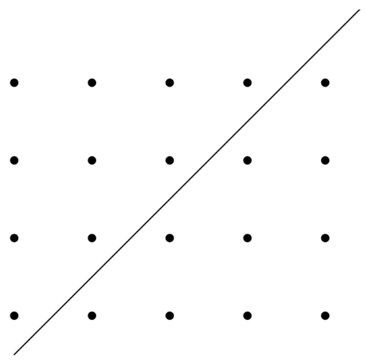
Die Folge der Dreieckszahlen beginnt mit

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
d_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	$\cdots$

Aufgabe 1: Gib eine Figur an, die als ein Beweis ohne Worte für die Behauptung dienen kann: Jede Zahl $n > 1$ ist die Differzen zweier Dreieckszahlen.

Wie groß ist die Dreieckszahl d_n für ein beliebig gewähltes n? Eine Hochgeschwindigkeits-Berechnungsformel von d_n lautet:

(2) $d_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ für ein beliebig gewähltes n, $n \geq 1$.



Zunächst gilt $d_n + d_n = n(n+1)$. In Abb. 4 hat man einen Beweis ohne Worte dieser Gleichung. Aus $2d_n = n(n+1)$ folgt die Behauptung (2) - ausführlicher gilt:

(2') $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Abbildung 4

Aus der Tabelle oben ergibt sich die Vermutung: Die Dreieckszahlen d_3 sowie d_{4n} und d_{4n+3} mit $n = 1, 2, 3, \cdots$ sind gerade und d_1, d_2 sowie d_{4n+1} und d_{4n+2} mit $n = 1, 2, 3, \cdots$ sind ungerade. Aus (2) folgt $d_{4n} = \frac{1}{2} \cdot 4n(4n+1)$ ist gerade. Daher gilt wegen (1): $d_{4n+1} = d_{4n} + 4n + 1$ sowie $d_{4n+2} = d_{4n} + 8n + 3$ sind ungerade und $d_{4n+3} = d_{4n} + 12n + 6$ ist gerade.

Jede Dreieckszahl > 1 kann durch andere Dreieckszahlen dargestellt werden. Beispiel: Dreieckszahlen als Summe von Dreieckszahlen. Mit der Tabelle oben berechnen wir additive Darstellungen einiger Dreieckszahlen mit möglichst wenigen Summanden.

d_n	3	6	10	15	21	28	$\cdots$
additive Darstellung	1+1+1	3+3	6+3+1	6+6+3	15+6	21+6+1	$\cdots$

Kann man jede Dreieckszahl als Summe von höchstens 3 Dreieckszahlen schreiben? Tatsächlich hat das Fermat vermutet und Gauß hat 1796 bewiesen, dass Fermats Vermutung zutrifft. Ein interessantes Beziehungsmuster von Dreieckszahlen:

$$d_1 + d_2 + d_3 = d_4$$
$$d_5 + d_6 + d_7 + d_8 = d_9 + d_{10}$$
$$d_{11} + d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{15} = d_{16} + d_{17} + d_{18}$$

und so immer weiter.

Aufgabe 2: Begründe mit (2), dass für $n = 2, 3, 4, \cdots$ gilt:

a) $2d_{n-1}d_n = d_{n^2-1}$

b) $d_{n^2} = d_{n-1}d_{n+1} + d_n$

Mit Dreieckszahlen lassen sich einige nützliche Zahleneigenschaften herleiten, etwa diese: Es ist $d_m + d_{m+1} = m^2$, denn

$$d_m + d_{m-1} = \frac{1}{2}(m(m+1) + (m-1)m) = \frac{1}{2}m \cdot 2m = m^2.$$

Daraus folgt wegen

$$(d_n + d_{n-1}) - (d_{n-1} + d_{n-2}) + (d_{n-2} + d_{n-3}) - + \cdots \pm d_1 = d_n$$

mit $d_1 = 1$ und $+d_1$ für gerades n und $-d_1$ für ungerades n, dass

$$n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - + \cdots \pm 1^2 = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Weil $d_m^2 - d_{m-1}^2 = m^3$ ist wegen

$$\begin{aligned} d_m^2 - d_{m-1}^2 &= \frac{1}{4}m^2(m+1)^2 - \frac{1}{4}(m-1)^2m^2 \\ &= \frac{1}{4}m^2((m+1)^2 - (m-1)^2) \\ &= \frac{1}{4}m^2 \cdot 4m \end{aligned}$$

folgt aus $d_1^2 + (d_2^2 - d_1^2) + (d_3^2 - d_2^2) + \cdots + (d_n^2 - d_{n-1}^2) = d_n^2$, dass gilt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Mit Dreieckszahlen lässt sich auch zeigen, dass:

$$\begin{aligned} 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 &= \frac{1}{3}d_n^2(4d_n - 1) \\ \text{also} \quad &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Eine Zahl p heißt perfekt, wenn die Summe ihrer echten Teiler p ist. Euklid und Leonhard Euler haben bewiesen: Eine Zahl p ist genau dann perfekt, wenn gilt $p = (2^n - 1)2^{n-1}$, wobei $n > 1$ und $2^n - 1$ prim ist. So etwa ist $28 = (2^3 - 1)2^2$ perfekt wegen $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Man zeige, dass jede perfekte Zahl eine Dreieckszahl ist.

2. Abteilung: Viereckszahlen

Man ordne so wie in Abb. 5 nacheinander $v_2 = 4$, $v_3 = 9$, $v_4 = 16, \cdots$ Steinchen in quadratischen Vierecken an. Dann nennt man die Zahlen $v_n = n^2$ mit $v_1 = 1$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ Viereckszahlen - üblicherweise auch Quadratzahlen.

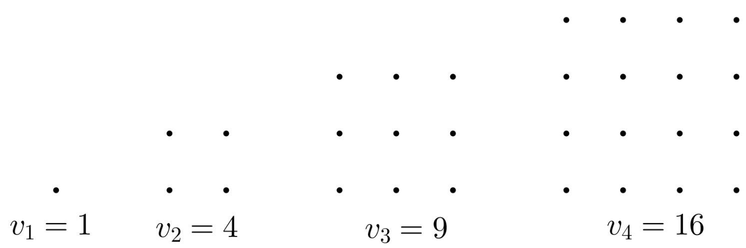


Abbildung 5: Die ersten vier Viereckszahlen.

Für jede Viereckszahl v_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ gilt: $v_n = n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$ - siehe den Beweis ohne Worte in Abb. 6. Ferner gilt für zwei aufeinanderfolgende Viereckszahlen v_n und v_{n+1}, $n \geq 1$: $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$ - betrachte Abb. 7 als Beweis ohne Worte.

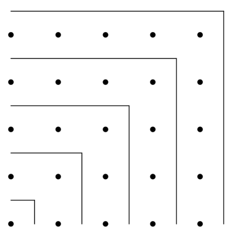


Abbildung 6

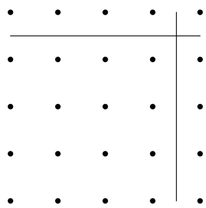


Abbildung 7

Ohne Beweis sei erwähnt: Man kann jede Viereckszahl als eine Summe von höchstens 4 Viereckszahlen schreiben.

Zwischen Vierecks- und Dreieckszahlen bestehen vielfältige Zusammenhänge, etwa diese: Jede Viereckszahl v_n ist Summe der Dreieckszahlen d_{n-1} und d_n, $n > 1$: $v_n = d_{n-1} + d_n$ - Abb. 8 als Beweis ohne Worte.

Aufgabe 4:

$$\begin{array}{lccccccc}
1^2 = & & & & 1 & & & \\
2^2 = & & & 1 & +2 & +1 & & \\
3^2 = & & 1 & +2 & +3 & +2 & +1 & \\
4^2 = & 1 & +2 & +3 & +4 & +3 & +2 & +1
\end{array}$$

Begründe, dass man das Gleichungssystem beliebig weit fortsetzen kann.

Bereits Theon von Smyrna, der gegen Ende des 1. Jahrhunderts lebte, war bekannt, dass gilt: Für jede ungerade Viereckszahl v_{2n+1}, $n \geq 1$, ist

$$v_{2n+1} = 8d_n + 1, \quad \text{also auch} \quad (2n+1)^2 = 8d_n + 1,$$

was unmittelbar aus $8d_n + 1 = 8 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$ folgt. Einen Beweis ohne Worte zeigt die Abbildung 9.

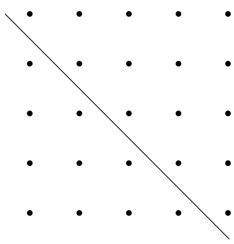


Abbildung 8

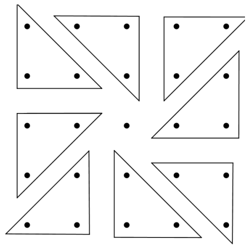


Abbildung 9

Aufgabe 5: Für bestimmte Viereckszahlen gelten die Gleichungen

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \tag{1}$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 \tag{2}$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 \tag{3}$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \tag{4}$$

Untersuche, ob man das Gleichungssystem nach dem vorgegebenen Muster beliebig weit fortsetzen kann. Hinweis: Die Folge der ersten Summanden links der Gleichungen beginnt mit $d_2^2, d_4^2, d_6^2, d_8^2$.

3. Abteilung: Fünfeckszahlen

Aus $f_2 = 5, f_3 = 12, f_4 = 22$ Steinchen seien geometrische Figuren wie in Abb. 10 gebildet und nach diesem Muster sei die Figurenfolge beliebig weit fortgesetzt. Dann bezeichnet man die Anzahlen $f_1 = 1, f_2, f_3, f_4, \cdots$ der Steinchen als Fünfeckszahlen.

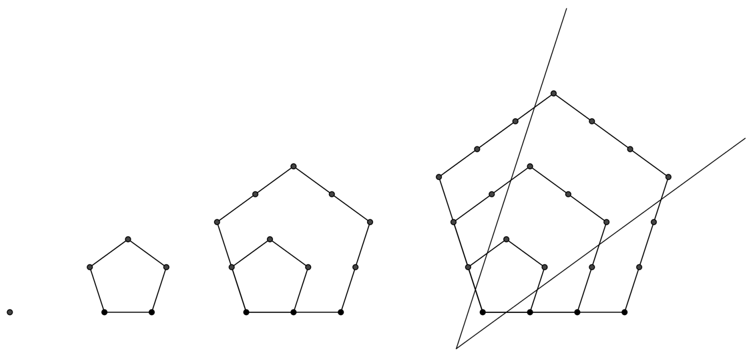


Abbildung 10: Die ersten vier Fünfeckszahlen.

Wie groß ist die n-te Fünfeckszahl?
Ein Fünfeck mit f_n Steinchen, $f_n > 1$, kann man in drei Dreiecke mit d_{n-1}, d_{n-1} und d_n Steinchen zerlegen - die Figur rechts in Abb. 10 ist dafür ein Beweis ohne Worte. Für f_n ist also wegen (2):

$$f_n = 2d_{n-1} + d_n = 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(3n-1).$$

Weil nun auch $f_1 = \frac{1}{2}(3-1) = 1$ ist, gilt:

(4) $f_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$ für $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Die Folge der Fünfeckszahlen beginnt mit $1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, \cdots$.

Die Zahlen f_n treten - nach einer noch vorzunehmenden Verallgemeinerung - in einigen unerwarteten Zusammenhängen auf. Wir verallgemeinern (4) so, dass wir dort auch die ganzen Zahlen $0, -1, -2, \cdots$ als n-Werte zulassen. Wir erweitern die Folge $f_1, f_2, f_3, \cdots$ zur Zahlenfolge

(4*) $f_n^* = \frac{1}{2}(3n-1)$ für $n = 0, 1, -1, 2, -2, \cdots$.

n	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	$\cdots$
f_n^*	0	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	$\cdots$

Als Beispiele für das Auftreten eines Anfangs bzw. der gesamten Folge der f^*-Zahlen nennen wir drei Sätze, die Leonhard Euler entdeckt und bewiesen hat. Eine Zahl $n > 1$ kann man auf $p(n)$ Arten,

(a) $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - + \cdots$

durch andere positive Zahlen darstellen***, wobei die Summe (a) abbricht, sobald $n - i < 0$ für eine f^*-Zahl i ist; falls $n - i = 0$ ist, setzt man $p(0) = 1$. Beispiel: $p(6) = p(6-1) + p(6-2) - p(6-5) = 7 + 3 + 1 = 11$.

Es sei $\sigma(n)$ die Summe der Teiler von n. Dann gilt:

(b) $\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - + \cdots$,

wobei die Summe (b) abbricht, sobald $n - i < 0$ ist für eine f^*-Zahl i; falls $n - i = 0$ ist, setzt man $\sigma(0) = n$. Beispiel:

$$\sigma(12) = \sigma(11) + \sigma(10) - \sigma(7) - \sigma(5) + \sigma(0) = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

Man kann das unendliche Produkt $(1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots$ in eine unendliche Reihe transformieren. Es gilt nämlich:

(c) $(1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots = x^0 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - + \cdots$.

4. Abteilung: Sechseckszahlen

Die Anzahlen $s_1, s_2, s_3, \cdots$ der Steinchen, die man benötigt, um die nach dem Muster von Abb. 11 gebildeten Figuren zu legen, heißen *Sechseckszahlen*.

*** Summen, die sich nur durch vertauschte Summanden unterscheiden, werden nur ein Mal gezählt.

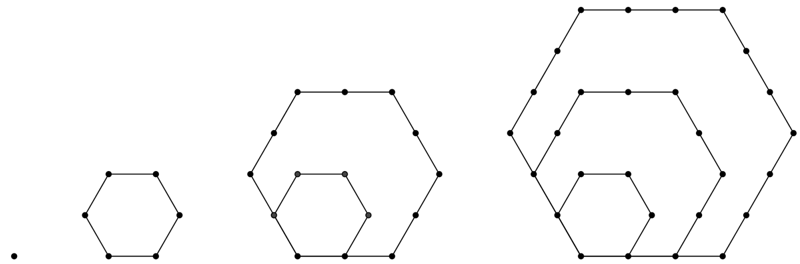


Abbildung 11: Die ersten vier Sechseckszahlen.

Die n-te Sechseckszahl s_n ergibt sich aus der Gleichung

(5) $s_n = (2n-1) \cdot n$ für $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Beweis durch vollständige Induktion: (5) gilt für $n = 1$ und (5) sei bewiesen für n - es gelte also $s_n = 2n^2 - n$. Die Figur rechts in Abb. 11 sei ein Beweis ohne Worte für die Aussage: Die $(n+1)$-te Figur hat $4n+1$ Steinchen mehr als die n-te Figur. Daher ist

$$s_{n+1} = s_n + 4n + 1 = 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2(n+1) - 1),$$

also gilt (5) für $n+1$.

Die Folge der Sechseckszahlen beginnt mit $1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, \cdots$.

Vergleicht man die Anfänge der Folgen der Sechsecks- und der Dreieckszahlen, dann darf man vermuten: Jede Sechseckszahl ist eine Dreieckszahl. Tatsächlich gilt: $s_n = d_{2n-1}$, denn wegen (2) und (5) ist $d_{2n-1} = \frac{1}{2}(2n-1) \cdot 2n = s_n$. Weiter gilt: $s_n = 4d_{n-1} + n$, denn

$$4d_{n-1} + n = 4 \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)n + n = 2((n-1)+1)n = (2n-1) \cdot n = s_n.$$

Aufgabe 6: Finde für die Aussage $s_n = 4d_{n-1} + n$ eine Figur als Beweis ohne Worte.

Die Abteilung der p-Eckszahlen, auch Polygonalzahlen genannt

Wenn man sich die Berechnungsformeln der p-Eckszahlen für $p = 3, 4, 5$ und 6 genauer anschaut, dann erkennt man, dass sie eine strukturelle Gemeinsamkeit besitzen, die sie nicht nur zu einer einzigen Formel zusammenfassbar macht sondern die darüberhinaus zu einer naheliegenden Definition von p-Eckszahlen p_n auch für $p \geq 7$ führt.

$(p = 3)$ Dreieckszahlen $p_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, vgl. (2)

$(p = 4)$ Viereckszahlen $v_n = \frac{1}{2}n(2n+0)$, wegen $v_n = n^2 = \frac{1}{2}n(2n+0)$

$(p = 5)$ Fünfeckszahlen $f_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$, vgl. (4)

$(p = 6)$ Sechseckszahlen $s_n = \frac{1}{2}n(4n-2)$, wegen $s_n = (2n-1)n = \frac{1}{2}(4n-2)$

$$\vdots$$

Definition:
$(p \geq 7)$: p-Eckszahlen: $p_n = \frac{1}{2}n((p-2)n-(p-4))$, $p = 3, 4, 5, \cdots$.

Ein Muster für die Konstruktion der Folge der p-Ecke, $p \geq 7$, die die Folge der Polygonalzahlen p_n veranschaulicht ist mit der Figur rechts in Abb. 11 gegeben. Durch vollständige Induktion lässt sich zeigen, dass die Anzahlen der Steinchen in den so konstruierten p-Ecken tatsächlich die Folge $p_1, p_2, p_3, \cdots$ bilden. Mathematiker wie P. de Fermat, L. Euler und C.F. Gauß sind der Frage nachgegangen, wie sich eine natürliche Zahl n durch p-Eckszahlen, $p \geq 3$, darstellen lässt. Dazu hat A.L. Cauchy 1821 den grundlegenden Satz bewiesen: Jede natürliche Zahl n ist jeweils:

die Summe aus höchstens 3 Dreieckszahlen,

die Summe aus höchstens 4 Viereckszahlen,

die Summe aus höchstens 5 Fünfeckszahlen,

$\vdots$

die Summe aus höchstens p p-Eckszahlen, $p \geq 3$.

Wir beschließen unseren Rundgang durch den Zoo der Polygonalzahlen mit der
Aufgabe 7: Bestimme zu jedem p, $p = 3, 4, 5$ und 6 jeweils eine Zahl, zu deren Summendarstellung man die Höchstzahl p von Summanden benötigt.

Die Lösungen zu den Aufgaben findet ihr auf Seite 36.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Eine Zahl und ihr Dreifaches

Peter und Paul sind wieder einmal zum Kino verabredet. Bekanntlich zahlt der Verlierer ihrer Wette für beide das Eintrittsgeld.

Heute bittet Paul seinen Freund, eine positive ganze Zahl und ihr Dreifaches aufzuschreiben, selbstverständlich in der gewöhnlichen Dezimalschreibweise. Peter liest vor: 36 und 108.

Paul sagt: „Ich wette, Du kannst keine Zahl und ihr Dreifaches aufschreiben, ohne eine der Ziffern 1, 2 oder 9 zu verwenden. In dem Beispiel hast Du für 108 die 1 gebraucht.“ Peter nimmt die Herausforderung an und vertieft sich sogleich in seine Rechnungen.

Wer muss diesmal den anderen ins Kino einladen? (Die Lösung soll auch eine kurze Begründung enthalten.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. August 2017 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 128

In Heft 128 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Der Fleck in der Decke

„Das schaffen wir nie,“ schluchzte Tick ganz verzweifelt. „Doch, es muss doch eine Möglichkeit geben,“ versuchte ihn Trick zu beruhigen. „Um was geht es denn?“ fragte Track, der sich zu seinen Brüdern gesellte.

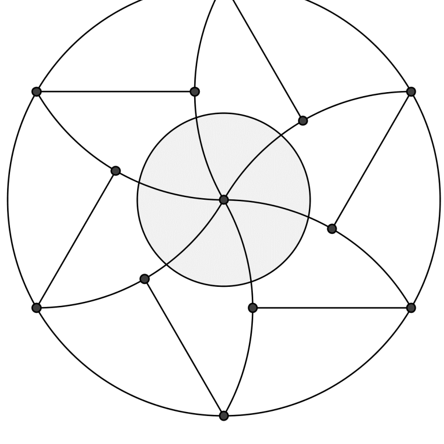
„Wir haben doch von Onkel Dagobert die kreisrunde Decke bekommen, die auf seinem ersten Tisch gelegen hatte,“ krähte Tick. „Ja, und wir durften sie in lauter kongruente Teile zerschneiden, die wir auf dem Weihnachtsmarkt des Fähnleins Fieselschweif verkaufen wollten,“ ergänzte Trick. „Na und?“ fragt Track. „Aber Onkel Dagobert wollte eines der Teile für sich selber behalten. Und jetzt ist genau in der Mitte ein kreisrunder Tintenfleck. Das darf er nie erfahren,“ jammerte Tick. „Dann zerschneidet doch die Decke so, dass wenigstens einer der Teile den Fleck nicht enthält,“ forderte Track seine Brüder auf. „Aber das können wir nicht!!“ erwiderten sie völlig aufgelöst.

Kann man eine kreisförmige Decke in eine solche Anzahl kongruenter Teile zerschneiden, dass wenigstens ein Teil nichts von dem kreisrunden Fleck in der Mitte enthalten soll? Der Radius des Fleckes soll ein Viertel des Radius der Decke betragen.

Lösung

Entgegen der auch von Einsendern geäußerten Meinung, dass eine Zerlegung einer Kreisscheibe in kongruente Teilstücke nur möglich sei, wenn jedes der Teilstücke vom Rand bis zum Mittelpunkt reicht, können die drei Großneffen ihrem Großonkel Dagobert sehr wohl eine Freude bereiten und auf dem Weihnachtsmarkt noch einigen Umsatz erzielen.

Die Figur zeigt eine Zerlegung des Kreises in 12 offensichtlich kongruente Teilstücke. Dazu muss man dem äußeren Kreis ein Sechseck einbeschreiben und mit jeweils einem Eckpunkt des Sechsecks als Mittelpunkt Kreisbögen vom Mittelpunkt des Kreises zu einem benachbarten Eckpunkt ziehen.



Aufgrund der Symmetrie des Kreises und des Sechsecks sind die so entstehenden sechs Teile kongruent und besitzen jeweils eine Spiegelachse. An dieser teilt man sie und erhält wie in der Figur zwölf kongruente Stücke. Die äußeren sechs Stücke sind fleckfrei.

Eine vollständig richtige Lösung hat Silas Rathke eingeschickt.

In der Figur ist der Radius des Flecks sogar größer als ein Viertel des Radius der Decke. Wie groß lässt er sich machen, und gibt es die Möglichkeit, dass die drei Neffen die Decke in mehr als 12 kongruente Stücke zerschneiden? Das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe!

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 129

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Division durch 13

Man dividiere jede natürliche Zahl n, $n = 1, 2, 3, \cdots, 2017$ durch 13. Die dabei entstehenden Divisionsreste addiere man. Wie groß ist ihre Summe? (H.F.)

Lösung:

Wegen $155 \cdot 13 = 2015$ gibt es 155 Vielfache von 13 - natürlich mit dem Divisionsrest 0 unterhalb von 2016; ebenso gibt es 155 Zahlen mit Divisionsrest 1 unterhalb von 2015 (nämlich $1, 13 + 1, 26 + 1, \cdots, 2002 + 1 = 13 \cdot 154 + 1$); ferner gibt es 155 Zahlen <2015 mit Divisionsrest $2, \cdots$ und schließlich gibt es 155 Zahlen <2015 mit Divisionsrest 12. Zuletzt haben noch Divisionsreste 1 und 2 2016 und 2017. Deswegen ist die Summe der Reste also

$$155 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots 12) + (1 + 2) = 12093.$$

II. Buchstaben-Rätsel

Ersetze in der Gleichung

$$\begin{array}{rrr} & A & A \\ & B & B \\ + & & B \\ \hline A & A & B \end{array}$$

alle Buchstaben A durch dieselbe Ziffer und alle Buchstaben B durch eine davon verschiedene Ziffer, sodass eine numerisch richtige Gleichung entsteht. Die Ziffern seien beide $\neq 0$. (H.F.)

Lösung:

$$\begin{array}{ccc} & A & A \\ & B & B \\ + & & B \\ \hline A & A & B \end{array}$$

Aus der rechten Spalte der Additionsfigur entnimmt man: Weil $A + B + B = B$ wegen $B \neq 0$ nicht möglich ist, folgt aus $A + B + B \leq 8 + 2 \cdot 9 < 30$, dass

(1) $A + 2B = 10 + B$ oder

(2) $A + 2B = 20 + B$.

Aus (2) folgt $A + B = 20$, was wegen $A, B \leq 9$ nicht möglich ist. Also gilt (1). Damit folgt aus der mittleren Spalte der Figur $A + B + 1 = AA = 10A + A$, woraus folgt:

$$B + 1 = 10A.$$

Also ist $A = 1$ und daher $B = 9$. Damit lautet die gesuchte numerische Gleichung $11 + 99 + 9 = 119$.

III. Ergebnis einer Prüfung

An einer Prüfung nehmen 36 Studenten teil. Die dabei durchgefallenen Studenten erreichen im Durchschnitt 42 Punkte, die erfolgreichen Studenten im Durchschnitt 60 Punkte, während die durchschnittliche Punktzahl für alle Studenten 53 Punkte sind.

Wie viele Studenten haben die Prüfung bestanden? (H.F.)

Lösung:

Es seien d und e die Anzahl der bei der Prüfung durchgefallenen bzw. erfolgreichen Studenten.

Ferner seien D und E die Gesamtzahlen der von den durchgefallenen bzw erfolgreichen Studenten erhaltenen Punktzahlen. Dann gilt:

(1) $d + e = 36$,

(2) $\frac{D}{d} = 42$, $\frac{E}{e} = 60$, $\frac{D+E}{d+e} = 53$.

Daraus folgt mit (1):

(3) $\frac{42d+60e}{36} = 53$.

Ersetzt man nun in (3) d durch $36 - e$, so ist $42 \cdot 36 - 42e + 60e = 53 \cdot 36$, woraus folgt: $e = 22$. Also haben 22 Studenten die Prüfung bestanden.

IV. Im Wirtshaus

Die älteren Herren Smilo, Truco, Ullo und Vulgo sitzen an einem runden Tisch im Wirtshaus.

a) Der Biertrinker sitzt zwischen dem Rotweintrinker und Herrn Truco.

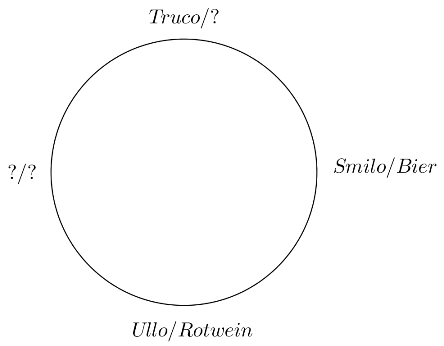
b) Der Safttrinker sitzt zwischen dem Weißweintrinker und Herrn Ullo.

c) Weder Herr Ullo noch Herr Vulgo trinken Bier.

Welcher Herr trinkt welches Getränk? (H.F.)

Lösung:

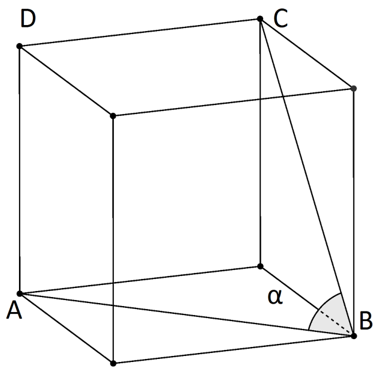
Aus (a) und (c) folgt: Der Biertrinker heißt weder Ullo noch Vulgo noch Truco; also heißt er Smilo.
Aus (b) folgt: Ullo trinkt weder Saft noch Weißwein und nach (a) auch kein Bier. Daher trinkt Ullo Rotwein.



Nach der Figur ist Vulgo Nachbar von Ullo und von Truco und nach (b) ist dann Vulgo ein Safttrinker. Folglich trinkt Truco Weißwein.

V. Dreieck im Würfel

In einen Würfel ist das Viereck ABCD eingezeichnet. Wie groß ist der Winkel α? (Eva Kaufholz)

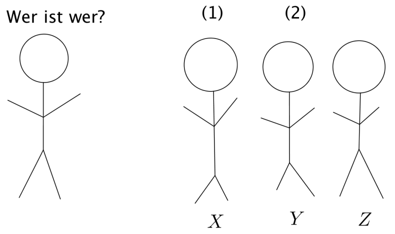


Lösung:

Der Winkel α beträgt 60°. Das Dreieck ABC ist gleichseitig, also haben alle Innenwinkel 60°, somit auch α.

VI. Logelei

Ein Wanderer begegnet auf einem Pfad den drei Jungen GE, LO und LEI. Er fragt sie nach ihren Namen. Ihre Antworten lauten:



X sagt: (1) Der in der Mitte ist LEI.
Y behauptet: (2) Ich bin entweder GE oder LO.
Z sagt nichts.

Da nun LO immer und GE manchmal lügt, während LEI stets die Wahrheit sagt, überlegt der Wanderer: Wer ist denn nun wer? (H.F.)

Lösung:
X ist nicht LEI wegen (1), denn LEI lügt nicht $\Longrightarrow$ LEI ist entweder Y oder Z. Wegen (2) kann LEI nicht Y sein $\Longrightarrow$ Z ist LEI. Dann aber ist (2) wahr. Da GE manchmal die Wahrheit sagt, folgt aus (2): Y ist GE und deshalb ist X LO. Also gilt:

X	Y	Z
LO	GE	LEI

VII. Geschwindigkeiten

Zwei Städte M und N sind 45km voneinander entfernt. Zwei Radfahrer, einer in M, der andere in N, starten gleichzeitig. Die beiden treffen sich 24km von M entfernt. Wenn der Radfahrer aus M $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$ schneller als der aus N fährt, mit welcher Geschwindigkeit fährt dann jeder? (H.F.)

Lösung:
Es seien x beziehungsweise $x + 4$ die Geschwindigkeiten des Radfahrers aus N beziehungsweise aus M. Dann benötigt (in Stunden) der Radfahrer aus M beziehungsweise aus N bis zum Treffpunkt:
$t_M = \frac{24}{x+4}$ beziehungsweise $t_N = \frac{21}{x}$.
Aus $t_M = t_N$ folgt dann:

$$\frac{24}{x+4} = \frac{21}{x} \Rightarrow 24x = 21x + 84 \Rightarrow x = 28.$$

Also fährt der Radler aus N mit $28\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und der aus M mit $32\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Produkt von Ziffern

Gibt es Zahlen, für die
a) das Produkt ihrer Ziffern gleich 2520 ist?

b) das Produkt ihrer Ziffern gleich 2340 ist? (WJB)

II. ggT

Der größte gemeinsame Teiler von 144 und 33383495724 lässt sich ohne großen Rechenaufwand bestimmen. Wie? (WJB)

III. Eine lange Rechnung

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen x und $x+1$ wird mit 13 multipliziert. Danach addieren wir 213, dann dividieren wir durch 4, subtrahieren dann 9, multiplizieren anschließend mit 15 und subtrahieren schließlich 254. Das Ergebnis ist 1111. Finde x. (WJB)

IV. Primzahlen gesucht

Bestimme alle Primzahlen p^2+2, wenn p eine Primzahl ist. (H.F.)

V. Verbindungswege

Jedes von vier benachbarten Häusern ist mit den anderen drei Häusern durch einen Weg so verbunden, dass sich keine zwei Wege kreuzen. Ein fünftes Haus wird nun in der Nähe gebaut. Zeige: Dieses Haus kann man nicht durch Wege mit den anderen vier Häusern so verbinden, dass der neue Weg keinen der alten Wege kreuzt. (H.F.)

VI. Spielerei

a) Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine richtige Rechnung entsteht (verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern): (WJB)

$$\begin{array}{rr} & \text{EINS} \\ + & \text{VIER} \\ \hline & \text{SECHS} \end{array}$$

b) Findest du noch eine Lösung?

Falls man diese Aufgabe mit einem Computer löst und **alle** Lösungen findet, kann man die Programme an Herrn Gemmer schicken.

VII. Zerlegung eines Dreiecks

Zerlege ein Dreieck in vier Parallelogramme und fünf gleiche – dem ursprünglichen Dreieck ähnliche – Dreiecke. (WJB)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Bitte beachten Sie, dass in Monoid-Heft 128/129, die neuen Aufgaben leider falsch nummeriert waren. Die richtige Nummerierung wäre 1169-1175 im Heft 128 und folglich 1176-1182 im Heft 129. Wir nummerieren jetzt weiter mit 1183 und bitten um Entschuldigung.

Aufgabe 1183: Prozente

a) Wieviel % von $\sqrt{\frac{5}{2}}$ sind $\sqrt{\frac{2}{5}}$?

b) Wieviel % von $\sqrt{\frac{5}{k}}$ sind $\sqrt{\frac{k}{5}}$? (H.F.)

Aufgabe 1184: Summe zweier Quadrate

Zwei Zahlen sind gleich weit von 10 entfernt. Die Summe ihrer Quadrate ist 232. Finde die beiden Zahlen! (WJB)

Aufgabe 1185: Eine Frage der Teilbarkeit

Es seien n, k natürliche Zahlen > 1.

a) Sei $S = k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+n)$ die Summe von $n+1$ unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste k sei. Für welche n ist S durch n teilbar?

b) Wie viele Lösungen hat das Problem für $k = 2017$?

c) Wann hat das Problem genau eine Lösung? (H.F.)

Aufgabe 1186: Sinus

Zeige, dass $\sin(15°)$ eine irrationale Zahl ist! (WJB)

Hinweis: $sin(30°) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 1187: Abstandsberechnung

In der Ebene liegt ein Punkt außerhalb eines Rechtecks $ABCD$ im Gebiet zwischen den Verlängerungen seiner Seiten AB und CD. Es können nur die Entfernungen a, b und c des Punktes P von den Eckpunkten A, B und C des Rechtecks gemessen werden. Kann man den Abstand x der Punkte P und D bestimmen, auch wenn die Seitenlängen des Rechtecks nicht bekannt sind? (H.F.)

Aufgabe 1188: Quadrate

$9x$ ist soviel wie $21y$. $x + y$ ist eine Quadratzahl. Bestimme ein Lösungspaar x und $y < 100$. (WJB)

Aufgabe 1189: 10 Punkte im Kreis

In einem Quadrat der Seitenlänge s seien 730 Punkte beliebig verteilt. Es gibt dann einen Kreis K vom Radius $r = \frac{1}{9}s$, in dem sich mindestens 10 Punkte befinden. Zeige dies. Bemerkung: Der Kreis darf auch teilweise außerhalb des Quadrates liegen. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 129

Klassen 9–13

Aufgabe 1169: Brüche, Wurzeln und Folgen

Janina macht sehr gerne Mathematik. Ihre Lieblingsthemen im Unterricht sind Brüche, Wurzeln und Folgen. Diese verbindet sie nun und untersucht die Folge der Zahlen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Die Folge beginnt also mit $a_1 = 1$, $a_2 \approx 1{,}4142$, $a_3 \approx 1{,}7321$.

a) Berechne die nächsten drei Folgenglieder (bis jeweils vier Nachkommastellen).

b) Janina glaubt, eine Gesetzmäßigkeit in den Folgengliedern entdeckt zu haben, mit der sich die Folgenglieder recht einfach berechnen ließen statt mit den langen Summen. Wie lautet diese einfache Folgenvorschrift? Begründe Deine Antwort, indem Du deren Richtigkeit mithilfe einer Rechnung zeigst.

c) Wie groß ist a_{2017}? Für welches Folgenglied gilt $a_n = 2017$? (MG)

Lösung:

a) Es sind $a_4 = 2{,}0000$, $a_5 \approx 2{,}2361$ und $a_6 \approx 2{,}4495$.

b) Janina glaubt, dass das n-te Folgenglied genau $\sqrt{n}$ ist. Dies zeigen wir. Wegen

$$\tfrac{1}{\sqrt{i-1}+\sqrt{i}} = \tfrac{\sqrt{i}-\sqrt{i-1}}{(\sqrt{i}+\sqrt{i-1})(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})} = \tfrac{\sqrt{i}-\sqrt{i-1}}{\sqrt{i}^2-\sqrt{i-1}^2} = \tfrac{\sqrt{i}-\sqrt{i-1}}{i-(i-1)} = \sqrt{i}-\sqrt{i-1}$$

gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \tfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \tfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \\ &= (\sqrt{1}-\sqrt{0}) + (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \\ &= -\sqrt{0}+\sqrt{1}-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}\ldots-\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \\ &= -\sqrt{0}+\sqrt{n} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Die Folgenvorschrift lässt sich also vereinfachen zu $a_n = \sqrt{n}$.

c) Damit ist $a_{2017} = \sqrt{2017} \approx 44{,}9110$ und für $n = 2017^2 = 4\,068\,289$ gilt $a_{4\,068\,289} = 2017$.

Aufgabe 1170: Abschätzung einer Summe

Es sei $b_n = bb\ldots b$ eine n-ziffrige Zahl mit n Ziffern b und ab_nc sei die $n+2$-ziffrige Zahl mit erster Ziffer a und letzter Ziffer c. Gib nun eine geschlossene

Formel für die Summe $S(n)$ an:

$$S(n) = 13 + 14_1 3 + 14_2 3 + 14_3 3 + ... + 14_n 3,\ \text{n} \geq 1.$$

Begründe: $10^{2017} < S(2016) < 10^{2018}$. (H.F.)

Lösung:

Es ist $14_i 3 = 13 \cdot 1_{i+1}$ für $i = 1, 2, 3, ...$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
S(n) &= 13\,(1_1 + 1_2 + 1_3 + ... + 1_n + 1_{n+1}) \\
&= \frac{13}{9}\,(9_1 + 9_2 + 9_3 + ... + 9_n + 9_{n+1}) \\
&= \frac{13}{9}\,\big((10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + ... + (10^{n+1}-1)\big) \\
&= \frac{13}{9}\,\big(10 \cdot (1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n - (n+1)\big) \\
&= \frac{13}{9}\left(10 \cdot \frac{10^{n+1}-1}{9} - (n+1)\right) \\
&= \frac{13}{81}\,\big(10^{n+2} - 10 - 9n - 9\big) \\
&= 10^{n+2}\left(\frac{13}{81} - \frac{(9n+19)\cdot 13}{10^{n+2}\cdot 81}\right)
\end{aligned}$$

Wegen $0{,}1 < (\frac{13}{81} - \frac{(9n+19)\cdot 13}{10^{n+2}\cdot 81}) < 1$ haben wir $10^{n+1} < S(n) < 10^{n+2}$, also ist $10^{2017} < S(n) < 10^{2018}$.

Aufgabe 1171: Quersumme

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine durch neun teilbare, dreistellige Zahl die Quersumme 18 besitzt? (Silas Rathke)

Lösung:

Eine Zahl ist genau dann durch neun teilbar, wenn die Quersumme durch neun teilbar ist. Folglich kann eine durch neun teilbare, dreistellige Zahl nur die Quersumme 9, 18 oder 27 besitzen.

Es gibt nur eine dreistellige Zahl mit der Quersumme 27, nämlich 999.

Um nun herauszufinden, wie viele dreistellige Zahlen die Quersumme 9 besitzen, stellen wir fest, dass die Einerziffer so einer Zahl immer eindeutig durch die ersten beiden Ziffern definiert ist. Die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit der Quersumme 9 ist also gleich der Anzahl der zweistelligen mit der Quersumme kleiner gleich 9, denn die letzte Ziffer ist dann nur der Rest zur Quersumme 9. Beginnt die zweistellige Zahl mit einer 1 als Zehnerziffer, gibt es 9 mögliche Einerziffern, wo die Quersumme kleiner oder gleich 9 ist. Wird die Zehnerziffer um 1 erhöht, sinkt die Anzahl der möglichen Einerziffern offensichtlich um 1. Folglich ist die Anzahl der zweistelligen Zahlen mit der Quersumme kleiner gleich 9:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45.$$

Von den 900 dreistelligen Zahlen, sind $\frac{1}{9}$ davon durch neun teilbar, also 100. Alles in allem ist somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$1 - \frac{1+45}{100} = \frac{54}{100} = 54\%.$$

Aufgabe 1172: Das Alter dreier Geschwister

„Wie alt sind deine drei Töchter?" fragt Dr. Quaoar seinen Kollegen Pfiffig.
„Ich will es dir einfach machen" - war die Antwort - „nämlich: Das Produkt ihrer Jahre (in ganzen Zahlen) beträgt 72 und die Summe ihrer Jahre stimmt mit meiner Hausnummer überein."
Dr. Quaoar geht zur Tür, registriert die Hausnummer und nach einer Weile des Überlegens sagt er: „Ich habe zu wenig Information, um das Alter deiner Kinder berechnen zu können."
Darauf Pfiffig: „Die jüngste meiner drei Töchter hat morgen Geburtstag."

Nach einiger Zeit nennt Dr. Quaoar das richtige Alter der Kinder. Wieviel Jahre alt sind Pfiffigs Töchter? (H.F.)

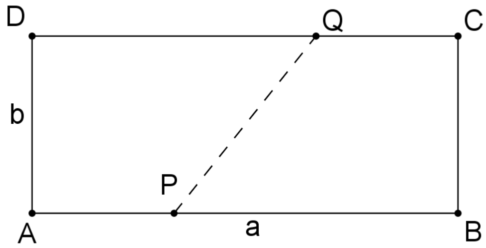
Lösung:
Die Zerlegungen von 72 in ein Produkt aus drei ganzzahligen Faktoren gibt die Möglichkeiten für das Alter der Mädchen an:

1. Tochter	2. Tochter	3. Tochter	Hausnummer
72	1	1	74
36	2	1	39
24	3	1	28
18	4	1	23
18	2	2	22
12	6	1	19
12	3	2	17
9	8	1	18
9	4	2	15
8	3	3	14
6	6	2	14
6	4	3	13

Beispiel: Die Hausnummer sei 17. Dann sind die Mädchen 12, 3 und 2 Jahre alt. Das Beispiel macht klar: Die Hausnummer muss 14 sein, denn nur dann kann Dr. Quaoar mit der Tabelle das Alter der Kinder nicht eindeutig bestimmen. Aber: Durch die Zusatzinformation, dass es eine jüngste Tochter gibt, wird der Fall ausgeschlossen, dass die Mädchen 8, 3 und 3 Jahre alt sind. Also sind sie 6, 6 und 2 Jahre alt.

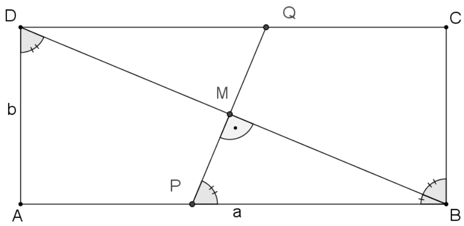
Aufgabe 1173: Länge einer Knickfalte

Ein rechteckiges Stück Papier $ABCD$ (Seitenlängen $a = 12$ und $b = 5$) wird so gefaltet, dass die Punkte B und D zusammenfallen. Wie lang ist die Knickfalte PQ? (H.F.)



Lösung:

Die Spur der Bewegung von B in den Punkt D in der Rechteckebene ist die Diagonale BD. Für sie gilt:$|BD| = \sqrt{a^2 + b^2}$; M ist der Mittelpunkt von BD und $BD \perp PQ$.



Die Dreiecke PMB und ABD sind ähnlich, da ihre Innenwinkel übereinstimmen. Deshalb ist

$$\frac{|MP|}{|MB|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{b}{a}$$

Somit ist

$$|MP| = \frac{b}{a}|MB| = \frac{b}{a}\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Da die Vierecke $APMD$ und $CQPB$ deckungsgleich sind, ist $|MP| = |MQ|$. Deshalb hat PQ die Länge

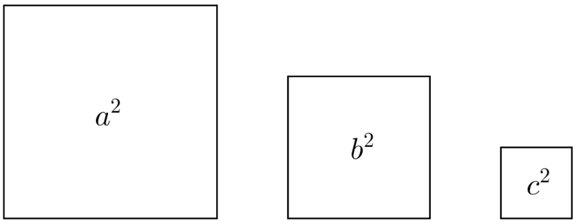
$$2|MP| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{65}{12}.$$

Aufgabe 1174: Differenz von Quadraturen

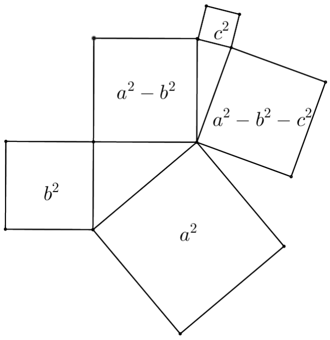
Gegeben seien drei Quadrate mit den Seitenlängen $a > b > c$, konstruiere ein Quadrat des Inhalts $a^2 - b^2 - c^2$. (A. Köpps)

Lösung:

Seien drei verschieden große Quadrate mit $a^2 > b^2 > c^2$ gegeben.



Füge a^2 und b^2 zu einer Pythagoras-Figur zusammen. Das Ergebnis führt zu $a^2 - b^2$.



Die wiederholte Anwendung des Satzes von Pythagoras führt zu $a^2 - b^2 - c^2$.

Aufgabe 1175: Eine Aufgabe von Erdös

Unter $n + 1$ positiven ganzen Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, von denen jede $\leq 2n$ ist, gibt es (mindestens) eine Zahl z_i, die ein Teiler einer Zahl z_j, $j \neq i$ ist. Man zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Gilt $z_i = z_j$ für ein i mit $i \neq j$, so trifft die Behauptung zu.
Deshalb sei nun $z_i \neq z_j$ für $j \neq i$ vorausgesetzt.
Jede Zahl z_k, $1 \leq k \leq n+1$ kann als ein Produkt $z_k = 2^{e_k} c_k$ mit e_k eine positive ganze Zahl oder 0 und c_k eine positive ungerade Zahl $< 2n$ dargestellt werden. (Ist z_k ungerade, so ist $e_k = 0$.)
Da die Anzahl der ungeraden Zahlen, die $< 2n$ sind, genau n ist, gibt es unter den $n + 1$ Zahlen c_k mindestens zwei gleiche Zahlen $c_i = c_j = c$. Dann ist $2^{e_i} c$ ein Teiler von $2^{e_j} c$ oder $2^{e_j} c$ ein Teiler von $2^{e_i} c$, also z_i ein Teiler von z_j oder umgekehrt.

Mathematische Entdeckungen

Kleinste Nicht-Teiler

Wir wollen $K(n)$ die kleinste natürliche Zahl berechnen, die kein Teiler der natürlichen Zahl n ist, $n \geq 3$. Beispiele: $K(120) = 7$, $K(121) = 2$, $K(122) = 3$. Untersuche nun $K(n)$, indem du etwa folgenden Fragen nachgehst:

a) Bestimme $K(n)$
   - falls $n = 3, 4, 5, \cdots 20$ ist;
   - falls n eine ungerade Zahl ist;
   - falls n eine Potenz, z.B. $n = 2^m$ oder $n = 6^m$ ist;
   - falls n eine Primzahl ist, $n \geq 3$.

b) Bestimme möglichst alle Zahlen n, für die z.B. $K(n) = 3$; $K(n) = 7$; $K(n) = 10$, usw. ist.

c) Kann $K(n)$ beliebig große Werte annehmen? (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. August 2017 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 128

In Heft 128 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Binäres Sudoku

Auf wie viele Weisen kann man n Kreuzchen in ein großes Karopapier zeichnen, so dass in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Anzahl von Kreuzchen sind? Dabei sind Lösungen, die durch Spiegeln, Drehen oder Vertauschen zweier Zeilen oder zweier Spalten auseinander hervorgehen, nur einmal zu zählen.

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe (Zerlegung eines Quadrats in Quadrate) haben sich beschäftigt Tobit Roth, Klasse 6c, Gymnasium Calvarienberg und Silas Rathke, Klasse 12, Alexander von Humboldt-Gymnasium.

Tobit hat beobachtet, dass aus einer Lösung beliebig viele werden, indem man die gegebene Lösung nach rechts, links, oben oder unten spiegelt oder diagonal an einer Ecke noch einmal ansetzt.

Silas übersetzt die Fragestellung in einen Zeilen- und einen Spaltenvektor mit gradzahligen Einträgen und kann dadurch die Anzahl Möglichkeiten abschätzen:

Die Anzahl der Kreuzchen in einer Spalte soll gerade sein. Folglich ist auch die Summe dieser Anzahlen gerade. Da dabei jedes Kreuzchen genau einmal mitgezählt wurde, muss n gerade sein.Für n ungerade ist daher die Anzahl der Möglichkeiten 0.

Für $n = 0$ gibt es offensichtlich genau eine Möglichkeit.

Für $n = 2$ müssen die Kreuzchen in einer Zeile sein, damit dessen Kreuzchenanzahl gerade ist. Dann sind aber in zwei Spalten deren Anzahlen ungerade, weswegen es hier keine Möglichkeiten gibt.

Für alle anderen geraden n muss man alle Möglichkeiten betrachten, n als Summe von geraden Summanden darzustellen, die alle jeweils maximal $\frac{n}{2}$ sind. Da man Zeilen und Spalten tauschen darf, kann man die Summanden der Größe nach ordnen. Wir suchen immer zwei solcher Summandendarstellungen heraus, welche dann einmal die Kreuzchenanzahlen der Spalten und einmal die Kreuzchenanzahlen der Zeilen darstellen sollen. Da das Papier gedreht werden darf, spielt es auch keine Rolle, welche der Darstellungen für die Zeilen und welche für die Spalten vorgesehen ist.

Ein Darstellungspaar lässt sich genau dann realisieren, wenn der maximale Summand der einen Darstellung kleiner oder gleich der anderen Darstellung ist und umgekehrt.

Beispiel: $n = 8$: Hier gibt es folgende Summandendarstellungen: $4 + 4, 4 + 2 + 2, 2 + 2 + 2 + 2$. Die erste und die zweite Darstellung lassen sich nur mit der dritten realisieren und die dritte noch zusätzlich mit sich selbst. Das Ergebnis ist allerdings i.a. nicht eindeutig. Folglich ist die Anzahl der Möglichkeiten für $n = 8$ größer oder gleich 3.

N=8

	4	4
2	X	X
2	X	X
2	X	X
2	X	X

	2	2	2	2
2	X	X		
2		X	X	
2			X	X
2	X			X

	4	2	2
2	X	X	
2	X	X	
2	X		X
2	X		X

	2	2	2	2
2	X	X		
2	X	X		
2			X	X
2			X	X

So kann man für jedes n mit einem gewissen Rechenaufwand die Anzahl der Möglichkeiten abschätzen.

Die Vermutung von Leonhard Euler und das Ausschlussverfahren

von Hartwig Fuchs

Leonhard Euler (1707-1783), einer der produktivsten Mathematiker, der je gelebt hat, beherrschte nicht nur alle Teilgebiete seines Fachs, er war zugleich - was bei einem Mathematiker wohl nicht die Regel ist - ein Rechengenie, ein wandelnder Computer.

Und doch: Dieser mathematische Alleskönner sollte sich mit einer Vermutung irren, die eine Verallgemeinerung des „Großen Satzes“ von Fermat ist, welcher lautet

(1) Für jedes $n > 2$ hat die Gleichung $z^n = x^n + y^n$ keine Lösung mit natürlichen Zahlen x, y und z.

Eulers Vermutung (1769)

(2) Die Potenz z^n, $n \geq 3$, einer jeden natürlichen Zahl $z > 1$ kann nicht als Summe von m Potenzen $x_1^n, x_2^n, \cdots, x_m^n$ von natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \cdots, x_m$, $m \geq 2$, dargestellt werden, bei der $m < n$ ist.

Den Satz (1) von Fermat hat Andrew Wiles 1993 für jedes $n \geq 3$ bewiesen. Daher gilt die Euler-Vermutung für $n \geq 3$ und $m = 2$. Im Folgenden sei deshalb $m \geq 3$, $n \geq 4$.

Das Ausschluss-Verfahren

Euler und nach ihm viele hervorragende Mathematiker haben keinen Beweis für (2) gefunden. Daher entstand irgendwann der Verdacht, (2) könne falsch sein - und das lässt sich „am leichtesten“ durch ein einziges möglicherweise existierendes Gegenbeispiel begründen. Also hat man die Jagd nach Gegenbeispielen eröffnet. Dabei wird man nicht einfach drauflos gerechnet haben. Vielmehr wird man sich zunächst überlegt haben, für welche Zahlen z und n es garantiert kein Gegenbeispiel zu (2) gibt. Eine solche Vorgehensweise, die darauf abzielt, aus einer Menge M, in der alle Lösungen eines Problems enthalten sind, diejenigen Elemente herauszufiltern, die als eine Lösung nicht in Frage kommen, nennt man ein *Ausschluss-Verfahren*. Dieses Arbeitsprinzip stellt ein wichtiges Werkzeug des Mathematikers dar - insbesondere dann, wenn die Menge M so umfangreich ist, dass man bei ihr nicht Element nach Element daraufhin prüfen kann, ob es eine Lösung ist oder nicht - bei einer unendlichen Menge M ist das sogar von vorneherein unmöglich.

Bearbeitung der Euler-Vermutung mit dem Ausschluss-Verfahren

Man wird die möglichen jeweiligen Wertemengen der in der Euler-Vermutung auftretenden Variablen z, n, x_i und m, $1 \leq i \leq m$, $3 \leq m < n$, durch schrittweisen Ausschluss von Elementen so stark einschränken, dass man schließlich eine Chance erhält, ein vielleicht existierendes Gegenbeispiel zu finden.

Eine naheliegende Einschränkung der x_i-Werte

(3) Jede der Zahlen $x_1, x_2, \cdots, x_m$ in (2) ist $\leq z - 1$.

Eine problembedingte Einschränkung der n-Werte

(4) Zu jeder Zahl $z \geq 2$ gibt es höchstens endlich viele Zahlen n, für die z^n ein Kandidat für ein Gegenbeispiel zu (2) ist.

Zum Nachweis von (4) leiten wir zunächst ein Kriterium für Gegenbeispiele zu (2) her. Es sei $z^n = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n$ mit $z \geq 2$ und $3 \leq m < n$ ein Gegenbeispiel zu (2). Dann gilt mit (3) für $n \geq 4$:

$$z^n \leq m(z-1)^n \leq (n-1)(z-1)^n, \text{ also auch } z^n : (z-1)^n \leq n-1.$$

Für ein Gegenbeispiel zu (2) muss somit notwendigerweise gelten

(5) $\frac{z}{z-1} \leq \sqrt[n]{n-1}$, $n \geq 4$.

Die Folge der Zahlen $\sqrt[n]{n-1}$, $n = 5, 6, 7, ...$ ist monoton abnehmend mit dem Grenzwert 1 (das beweisen wir nicht!) - n ist ≥ 5 wegen $\sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$. Dagegen hat der Term $z : (z-1)$ für ein gegebenes $z \geq 2$ einen festen Wert $c > 1$. Daraus folgt, dass es eine Zahl $n(c)$ gibt mit der Eigenschaft: Für jedes Folgenelement $\sqrt[n]{n-1}$ mit einer Nummer $n \geq n(c)$ ist $1 < \sqrt[n]{n-1} < c$, $c = z : (z-1)$. Also gilt:

(6) Das Kriterium (5) ist für ein gegebenes $z \geq 2$ nur dann erfüllt, wenn $n \leq n(c)$ ist.

Beispiel 1

a) Für $z = 2, 3$ und 4 ist $z : (z-1) > 1{,}33$, während $\sqrt[4]{3}$ sowie jede Zahl $\sqrt[n]{n-1}$, $n \geq 5$, jeweils $< 1{,}32$ ist; da also das Kriterium (5) für kein n, $n = 4, 5, ...$ erfüllt ist, befindet sich unter den Potenzen $2^n, 3^n$ und 4^n kein Gegenbeispiel zur Vermutung (2).

b) Für $z = 5$ gilt das Kriterium (5) nur für $n = 4, 5, \dots, 9$ (für $n \geq 10$ ist $\sqrt[n]{n-1} < 5 : 4$). Nach einigem Rechnen zeigt sich, dass es unter den 6 Potenzen 5^n, $n = 4, 5, \dots, 9$, kein Gegenbeispiel zu (2) gibt.

Aus (a) und (b) folgt: Die Euler-Vermutung (2) gilt für $z = 2, 3, 4$ und 5. Dies Ergebnis könnte auch Euler gekannt haben - was ihn möglicherweise zu seiner Vermutung führte. Mit (6) ist die in (4) behauptete wichtige Einschränkbarkeit der n-Werte nachgewiesen. Zugleich ist mit (5) der für jedes $z \geq 5$ größtmögliche n-Wert berechenbar- sofern überhaupt ein n-Wert existiert, vgl. Beispiel 1 (a).

Eine wahlbedingte Einschränkung der n-Werte

Beispiel 2

Es sei $n = 100$. Wie groß könnte dann der Rechenaufwand sein für die Untersuchung der Frage, ob eine der Gleichungen $z^{100} = x_1^{100} + \cdots + x_i^{100} + \cdots x_m^{100}$ eine die Euler-Vermutung widerlegende Lösung besitzt?

Mit (5) berechnet man zunächst, dass $4 \leq n \leq 643$ und daher $m \leq 642$ ist. Da jede der 99 Zahlen $1, 2, \dots, 99$ ein möglicher x_i-Wert ist, gilt:

> Für $z = 100$ gibt es für jedes m, $3 \leq m \leq 642$, jeweils 99^m Gleichungen $z^{100} = x_1^{100} + \cdots x_m^{100}$.

Im ungünstigsten Fall sind für eine Klärung der oben gestellten Frage daher $99^3 + 99^4 + \cdots + 99^{642}$ Gleichungen, also mehr als $99^{642} \cong 10^{1281}$ Gleichungen in Betracht zu ziehen. Damit ist auch der leistungsfähigste Computer überfordert.

Um trotz der in Bsp. 2 zu Tage getretenen numerischen Hürden doch noch eventuell ein Gegenbeispiel für (2) aufzutreiben, bleibt die Möglichkeit einer willkürlichen

Einschränkung der Werte der Variablen n auf kleine Zahlen oder sogar auf nur noch eine Zahl. Mit einer so massiven Einschränkung sollte sich der Rechenaufwand bei der Untersuchung der Euler-Vermutung beträchtlich verringern. *Beispiel 3*

In der Gleichung (2) sei $n = 5$ gewählt, so dass dort $m = 3$ oder $m = 4$ ist. Wenn nun die Euler-Vermutung bis hin zu einer Zahl Z^5 untersucht werden soll, dann hat man es mit den Gleichungen $z^5 = x_1^5 + \cdots + x_m^5$ mit $z = 6, 7, \ldots, Z$ und $m = 3, 4$ zu tun. Wie im Bsp. 2 sieht man: Für ein z, $6 \leq z \leq Z$, beträgt die Anzahl dieser Gleichungen $(z-1)^3$, falls $m = 3$, und $(z-1)^4$, falls $m = 4$ ist. Daraus folgt für die Anzahl $A(Z)$ aller Gleichungen mit $z = 6, 7, \ldots, Z$:

$$A(Z) = (5^3 + 5^4) + (6^3 + 6^4) + \cdots + ((Z-1)^3 + (z-1)^4).$$

Eine grobe Abschätzung von $A(Z)$ ergibt:

$$(7) \quad A(Z) < 2 \cdot (5^4 + 6^4 + \cdots + (Z-1)^4) < 2 \cdot (Z-5)(Z-1)^4 < 2 \cdot Z^5.$$

Damit kann man die Euler-Vermutung für kleine Zahlen Z mit überschaubarem Aufwand bearbeiten.

Widerlegung der Euler-Vermutung

Im Jahr 1966 suchten die beiden amerikanischen Mathematiker J.L. Lander und T.R. Parkin mit einem Computer nach nicht negativen Lösungen der Gleichung $z^5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5$, wobei sie zuließen, dass ein Summand x_i^5 auch den Wert 0 haben durfte. Sie fanden fünf Lösungen. Zu ihrer Überraschung war darunter eine Lösung mit dem Summanden 0^5. Damit hatten sie unbeabsichtigt ein Gegenbeispiel mit $n = 5$ und $m = 4$ für die Euler-Vermutung entdeckt:

$144^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5$. Sie haben dazu weniger als $1,3 \cdot 10^{11}$ Gleichungen berechnet - vgl. (7).

Ein zweites Gegenbeispiel für die Euler-Vermutung hat N. Elkies 1988 gefunden:

$$20615673^4 = 18796760^4 + 15365639^4 + 2682440^4.$$

Damit hat sich Eulers Vermutung, die 200 Jahre jedem Beweis- und Widerlegungsversuch widerstanden hatte, schließlich als im Allgemeinen falsch erwiesen.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Ein Steinhaus*-Problem

Was ist bemerkenswert an der Zahl 3435? Nun es gilt $3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$. Gibt es weitere Zahlen $z = z_n z_{n-1} \cdots z_1 z_0$ (Dezimaldarstellung), für die

$$z = z_n^{z_n} + z_{n-1}^{z_{n-1}} + \cdots z_1^{z_1} + z_0^{z_0}$$

gilt ($n \geq 1$)? Dabei wird $0^0 = 0$ gesetzt.

* Benannt nach dem polnischen Mathmatiker Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972), der sich als erster mit solchen Ziffernproblemen befasste.

a) Beweise theoretisch, daß es keine 11-ziffrigen Steinhauszahlen gibt!

b) Zeige, daß eine 10-ziffrige Steinhauszahl mindesten drei mal die Ziffer 9 enthalten muß!

c) Wieviele solche 10-ziffrige Zahlen gibt es höchsten, die genau 4x (5x, .. ,9x) die Ziffer 9 enthalten?

d) Schreibe ein Computerprogramm, welches alle Steinhauszahlen berechnet ! Dies ist im Prinzip möglich, da die theoretisch unendliche Zahlenmenge wegen (a) nach oben beschränkt ist. Beim Programm dürfen die Resultate aus (a+b) benutzt werden, auch wenn du sie nicht bewiesen hast. Wer (c) beantwortet und auch im Computerprogamm benutzt, um die Laufzeit erheblich zu verkürzen, erhält Extrapunkte. (W.G.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2017 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 128

Weihnachtsgrüße homophonisch verschlüsselt

Beispiel: Manchmal will man auch Privates geheim halten, z.B. indem man Weihnachtsgrüße homophonisch verschlüsselt. Der Klartext ADVENTSKALENDERAUFGABEVOMNIKOLAUS soll mit dem Schlüsselwort MAINZ zu einem Geheimtext kodiert werden. Das geht folgendermaßen. Kurz gesagt addiert man K buchstabenweise zu S. Um mit ihnen rechnen zu können, werden die 26 großen deutschen Buchstaben von A bis Z mit den Ordnungszahlen von 0 bis 25 durchnummeriert; nach Z geht es also wieder mit A weiter. Außerdem werden alle Leerzeichen und Interpunktionszeichen weggelassen.

```
 ADVENTSKALENDERAUFGABEVOMNIKOLAUS     ABC
+MAINZMAINZMAINZMAINZMAINZMAINZMAI     012
----------------------------------
 MDDRMFSSNKQNLRQMUNTZNEDBLZISBKMUA
```

Monoid-Aufgabe M128

Erstelle ein Computerprogramm, welches einen beliebigen Geheimtext mit einem vorgegebenen Schlüsselwort als Eingabe erlaubt und G. homophonisch dekodiert! Verwende dieses Programm, um

G='PSAQWPBIGSZIMBFJWQYCACQGIIRBAFTSVQPID-CUSEHUVAOKKFSANEHUHNIAHZRFSKKLSUBELXZLUMPYSE' damit zu entschlüsseln. Vom Schlüssel S. weiß man nur, daß er aus 6 Buchstaben besteht und daß alle, die hier mitmachen, ihn schon einmal gehört haben. (W.G.)

Ergebnisse

Beim Verschlüsseln wurden die Buchstaben von S zu denen von K addiert, dies lieferte G. Um nun umgekehrt K zu erhalten (G entschlüsseln), muß man die Buchstaben von S von denen von G subtrahieren. Dazu zwei Beispiele: (1)$R-D=$?,17 $\mapsto R$ und 3 $\mapsto D$ liefert 14 $\mapsto$?, daher $R-D=O$. (2) $E-W=$?, 4 $\mapsto E$ und 22 $\mapsto W$, daher $-18 \mapsto$?. Wie in der Aufgabenstellung erklärt, kommt beim Subtrahieren nach A wieder Z ($A-B=Z$, $A-D=X$ etc); in dem Beispiel muß man also von E aus 18 Schritte rückwärts gehen; nach 4 Schritten ist man bei A, nach 14 weiteren Rückwärtsschritten dann bei I: Daher $E-W=I$ (Kontrolle: $W+I=22+8=30==4 \mod 26=E$, also OK). Den 1-ten Buchstaben von K erhält man daher aus $P-M=D$, den zweiten mittels $S-O=E$, den dritten mit $A-N=N$, den vierten mit $Q-O=C$ usw. Diese Verschlüsselung ist allgemein unter dem Namen VIGENERE bekannt. In ein Programm umgesetzt liefert dies dann

```
G=PSAQWPBIGSZIMBFJWQYCACQGIIRBAFTSVQPIDCUSEHUVAOKKFSANEHUHNIAHZRFSKKLSUBELXZLUMPYSE
S=MONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMONOIDMON
K=DENCOMPUTERFANSVONMONOIDWUENSCHEICHFROHEWEIHNACHTENZWEITAUSENDSECHZEHNWILLYGEMMER
```

Die Schüler Maximilian Hauck, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey und Marcel Wittman, Karolinen-Gymnasium in Frankenthal haben diese Aufgabe erfolgreich bearbeitet.
Ein Programm zur Aufgabe liegt auf der MONOID-Homepage unter „Monoid-130 Computerfans Pythonprogramm“, in der auch obige Rechnungen wie zum Beispiel $E-W$ in allgemeiner Form enthalten sind.

Lösungen zu den Übungen aus „Fibonacci und Pythagoras“:

Übung 1: Die 12te Fibonaccizahl 144 ist eine Quadratzahl, sie ist gleichzeitig gleich dem Quadrat ihrer Nummer und ausgehend von der bewiesenen Formel für $F(2n)$ auch darstellbar als Differenz von Quadraten zweier anderer Fibonaccizahlen: $F(12)=F(2\cdot 6)=F^2(7)-F^2(5)=169-25=144$. In der Literatur haben wir keinen Hinweis auf weitere quadratische Fibonaccizahlen gefunden.

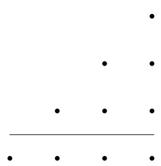
Übung 2: Die Folgenglieder können kein pythagoreisches Dreieck bilden, denn andernfalls würden die 3 Größen die Seitenlängen eines (rechtwinkligen) Dreiecks bilden können. D.h. es müsste auf jeden Fall die Dreiecksungleichung gelten, insbesondere müsste für das größte Glied $F(k)<F(n)+F(m)$ gelten, falls $F(k)$ die Hypotenuse ist. Dies lässt sich aber schnell widerlegen - wie? Wir erwarten dazu Eure Lösungen!

Übung 3: Prime Fibonaccizahlen gibt es zunächst überraschend viele, aber sie werden immer rarer: $2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597$, doch nach der nächsten Primzahl

$F(23) = 28.657$ wachsen solche Zahlen in rasantem Tempo an: die Primzahl $F(137)$ hat bereits 29 Stellen, $F(81830)$ sogar 17103 Stellen. Die größte bekannte prime Fibonaccizahl ist derzeit $F(201107)$ (siehe [3]). Mit weiteren interessanten Beziehungen zwischen der Nummer einer Fibonaccizahl und der Zahl selbst kann man nachweisen, dass alle Nummern von primen Fibonaccizahlen auch prim sein müssen, die Umkehrung ist allerdings falsch, z.B. ist $F(19) = 4181 = 37 \cdot 113$, also keine Primzahl, obwohl es die Nummer 19 ist.

Lösungen der Aufgaben aus „Im Zoo der Polygonalzahlen“

Aufgabe 1:



Für die Figur mit $n = 4$ gilt $4 = 10 - 6 = d_4 - d_3$. Aus der entsprechenden Figur mit beliebigem $n > 1$ folgt $n = d_n - d_{n-1}$.

Aufgabe 2:

a) $2d_{n-1}d_n = 2\frac{1}{2}(n-1)n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n^2-1)n^2 = d_{n^2-1}$.

b) $d_n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ und

$$\begin{aligned} d_{n-1}d_{n+1} + d_n &= \frac{1}{2}(n-1)n \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + \frac{2}{4}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)((n-1)(n+2)+2) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

$p = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2}(2^n - 1)2^n = d_{2^n-1}$.

Aufgabe 4: Zunächst ist $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) = d_n$ und $v_n = d_n + d_{n+1}$ (s.o.). Für die n-te Zeile des Gleichungssystems gilt damit:

$$\begin{aligned} &(1+2+3+\cdots+n) + (n-1+\cdots+1) = \\ &\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n-1)n = d_n + d_{n-1} = v_n = n^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung der Aufgabe 4 gilt also.

Aufgabe 5: Die n-te Zeile des Gleichungssystems lautet mit $d_{2n} = D$ und $D + n = E$

(1) $D^2 + (D+1)^2 + \cdots (D+n)^2 = (E+1)^2 + (E+2)^2 + \cdots + (E+n)^2$,

dies ist äquivalent zu:

(2) $(n+1)D^2 + 2D(1+2+\cdots+n) + (1^2+2^2+\cdots+n^2) = nE^2 + 2E(1+2+\cdots+n) + (1^2+2^2+\cdots+n^2)$ und

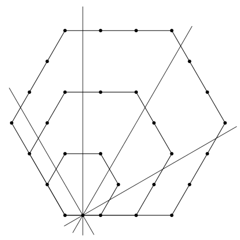
(3) $(n+1)D^2 = nE^2 + 2(E-D)(1+2+\cdots+n)$.

Wir haben auch $nE^2 = n(D+n)^2 = nD^2 + 2n^2D + n^3$ und $E - D = n$, $2(1+2+\cdots+n) = n(n+1)$. Mit $2D + n = 2 \cdot d_{2n} + n = 2n(2n+1) + n = 4n^2 + 3n$ und $n^2(2n+1)^2 = d_{2n}^2 = D^2$, ist (3) äquivalent zu (4):

(4) $D^2 = (2n^2D+n^3)+n^2(n+1) = n^2((2D+n)+(n+1)) = n^2(4n^2+4n+1) = n^2(2n+1)^2$.

Daraus folgt rückwärts schließend die Gültigkeit der Gleichung (1).

Aufgabe 6:



Aufgabe 7:

$$p = 3 : 5 = d_2 + d_1 + d_1 = 3 + 1 + 1$$
$$p = 4 : 7 = v_2 + v_1 + v_1 + v_1 = 4 + 1 + 1 + 1$$
$$p = 5 : 9 = f_2 + f_1 + f_1 + f_1 + f_1 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$p = 6 : 11 = s_2 + s_1 + s_1 + s_1 + s_1 + s_1 = 6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Martin Kramer und Marlin van Soest: Das Geheimnis der Analysis

„Mathematische Inhalte in einem Comic vermitteln, geht das denn überhaupt?“ mag sich mancher Leser und manche Leserin von Monoid jetzt fragen. Beispiele dafür gibt es durchaus, man denke z. B. an die Klassiker „Die Abenteuer des Anselm Wüßtegern“ von Jean-Pierre Petit oder die Mathe macchiato-Reihe (siehe Rezension in Monoid Heft 80 http://monoid.mathematik.uni-mainz.de/Monoid80.pdf).

Der Lehrkräften durch die sehr schöne Buchreihe „Mathematik als Abenteuer“ bekannte Mathematiklehrer und Didaktiker Martin Kramer hat sich mit seinem ehemaligen Schüler Marlin van Soest zusammengesetzt und über Analysis nachgedacht. Herausgekommen ist der Comic „Frederiks mathematisches Abenteuer. Das Geheimnis der Analysis.“ Der Protagonist Frederik stammt aus dem Lande Analysien, das, „für den einen oder anderen Leser ein weitgehend unerforschtes Gebiet“ darstelle; so heißt es zu Beginn der Geschichte.

Anhand von Frederiks Erlebnissen bekommen Leser oder Leserin einen spannenden Einblick in die Grundbegriffe der Analysis: So geht es im ersten Kapitel darum, was eigentlich eine Funktion ist. Es folgen ein Unfall beim Drachenfliegen (Null- und Schnittstellen), πraten und ein Hai (Sinusfunktion), die Null unterm Strich (Zahlbereichserweiterung und gebrochenrationale Funktionen), Frederiks unerreichbare

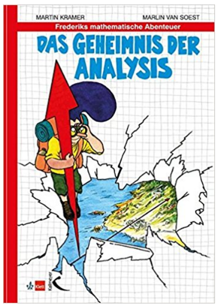
Liebe (der Limes als Grenzwert), wie Frederik seinen Führerschein verlor (Steigung und momentane Änderungsrate), Skifahren im Dunkeln (Lokale Extrema) und Frederik geht Baden (Die Integralrechnung). Anhand der relativ kurzen Kapitel erhält man jeweils einen sehr anschaulichen Einblick in die betreffenden Inhalte der Oberstufenanalysis.

Den einzigen Schönheitsfehler des Bandes sieht der Rezensent darin, dass der Protagonist - eines vornehmlich für eine jugendliche Zielgruppe erstellten Comics - über weite Strecken des Comics eine Zigarettenkippe im Mund hat. Auch wenn in der Realität glücklicherweise die Zahl von rauchenden Jugendlichen abnimmt, hält es der Rezensent für ungeschickt, einen liebenswerten Sympathieträger rauchen zu lassen; zumal sich der Autor - wie im Nachwort beschrieben - dieser Problematik durchaus bewusst ist. Abgesehen davon ist den beiden Autoren ein Comic gelungen, mit dem die zu Beginn dieser Rezension gestellte Frage eindeutig mit ja beantwortet werden muss.

Fazit:

Frederiks mathematisches Abenteuer „Das Geheimnis der Analysis“ lässt sich einfach nur als Comic von vorne bis hinten lesen. Als Oberstufenschüler kann man sich aber auch jeweils nach der Erarbeitung eines der angesprochenen Themen die entsprechende Geschichte von Frederiks Abenteuern vornehmen und den mathematischen Inhalt damit vertiefen. Oder noch besser: man macht einfach beides...

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Kramer, Martin/van Soest, Marlin: Frederiks mathematische Abenteuer. Das Geheimnis der Analysis, Kallmeyer 2017, ISBN 978-3-7727-1076-6, 18,95 Euro

Art des Buches:	Mathematischer Comic
Mathematisches Niveau:	gut verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Mitteilungen

- Die nächste Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) findet vom 5. bis 9. Oktober 2017 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  `www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`.
  Die Anmeldung findet man unter: `https://goo.gl/9jFVBM`
- Monoid gratuliert Prof. Wolfgang J. Bühler Ph.D. sehr herzlich zu seinem 80. Geburtstag.

Wolfgang Bühler hat als Mitglied der MONOID-Redaktion neben eigenen teils anspruchsvollen, aber immer unterhaltsamen mathematischen Artikeln viele, meist raffinierte Aufgaben zur Lösung für diese Schülerzeitschrift verfasst. Um eine kleine Kostprobe zu geben, sei auf seinen Aufsatz „Fibonacci in Echternach“ (MONOID Heft 102, Juni 2010) hingewiesen, wo er die Echternacher Springprozession stochastisch interpretiert und das Ganze in die Zeit von Friedrich II verlegt.

Für den Geist seiner Aufgabenstellung sei folgendes Problem erwähnt: Gegeben eine Tafel Schokolade, die durch sukzessives Brechen in seine 12 Einzelstucke zerlegt werden soll. Dabei darf man nicht zwei verschiedene Teilstücke gleichzeitig brechen. Gibt es eine minimale Strategie, und wenn, wie viele Brüche sind dann notwendig? (Antwort: Jede zulässige Strategie ist minimal, man benötigt 11 Brüche.)

Wir wünschen Wolfgang Bühler alles Gute, vor allem Gesundheit, Glück und Zufriedenheit, und dass uns sein geschätzter Rat noch lange erhalten bleibt. (H.-J. Schuh)

- MONOID gratuliert Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh sehr herzlich zu seinem 70. Geburtstag.

  Hans Schuh ist ein engagiertes und unentbehrliches Mitglied der MONOID-Redaktion. Neben eigenen Artikeln, die er für die MONOID-Ausgaben schreibt (zum Beispiel kürzlich über Eulers Berechnung von $\frac{\pi^2}{6}$ mit Hilfe von konvergenten Reihen), ist sein Einsatz beim kritischen Gegenlesen großer Teile des für bevorstehende Ausgaben vorliegenden Materials unersetzlich: sein scharfes Auge entdeckt immer wieder so einiges an Korrekturbedarf, und der Verbesserungsvorschlag wird von ihm gleich dazugeliefert. Seine kritische Mitarbeit ist eine der Voraussetzungen für die Qualität des MONOID; die Redaktion freut sich sehr, dass sie diese Qualität nicht nur durch die Zahl der MONOID-Leser, die Zahl der Einsender von Lösungen oder die große Zahl der Teilnehmer auf den MONOID -Jahrestreffen bestätigt findet, sondern auch durch den ganz explizit lobenden Zuspruch der Fachleute.

  In diesem Sinne wünschen wir Hans Schuh Gesundheit und alles Gute und freuen uns weiterhin auf seine verlässliche und konstruktive Mitarbeit. (Reinhard Höpfner)

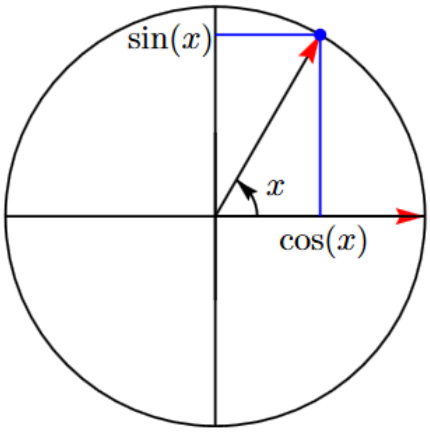
Mainzer Mathe-Akademie
6. – 10. September 2017

Bei der Mainzer Mathematik-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwoch-

abend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathematik-Akademie anzumelden, die vom 6.–10. September an der Universität Mainz stattfindet.
Ein genauerer Terminplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben.

Kurse

- **Wie rechnet ein Taschenrechner?** (Prof. Dr. Theo de Jong)

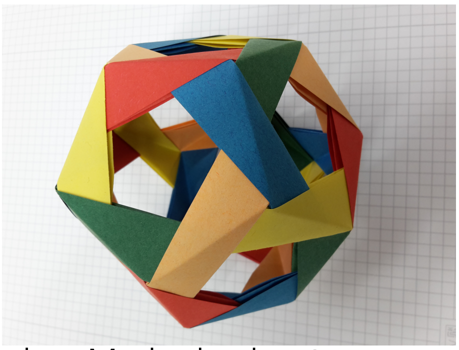
  

  Seit einigen Dekaden stehen den Schülern für den Unterricht in Mathematik und naturwissenschaftlichen Fächern Taschenrechner zur Verfügung. Den meisten ist dabei unbekannt, wie ein Taschenrechner intern die elementaren Funktionen $\sin(x), \cos(x)$, die Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktionen $\arcsin(x), \arccos(x)$und Logarithmus berechnet. Wie arbeitet der Taschenrechner?

  Wir werden die Hintergründe für die Berechnung elementarer Funktionen erklären. Es werden, wenn möglich, lediglich Additionen benutzt, denn multiplizieren ist aufwendig, wie jede(r) Schüler(in) weiss.

- **Origami macht das Unmögliche möglich** (Akad. Rat Dr. Cynthia Hog-Angeloni)

  Drei Probleme wurden von den Mathematikern der Hochkulturen vor über 2000 Jahren als besondere Herausforderung betrachtet:

  - Die Quadratur des Kreises
  - Die Drittelung des Winkels
  - Die Verdopplung des Würfels

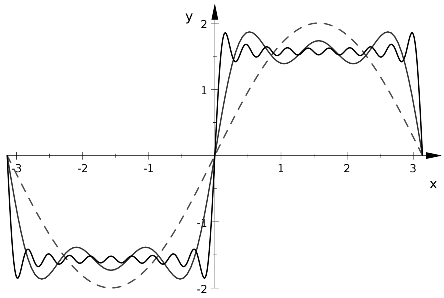
  Erst im 19. Jahrhundert konnte mit algebraischen Methoden bewiesen werden, dass diese Probleme nur mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals ohne Maßeinteilung nicht allgemein lösbar sind.

  Es zeigt sich aber, dass sich mit *Papierfalten* alle Punkte konstruieren lassen, die auch mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind - und sogar noch mehr! So sind sowohl die Winkeldreiteilung als auch die Verdopplung des Würfels mit nur wenigen Faltungen realisierbar (allerdings nicht: die Quadratur des Kreises).

Um diese Phänomene zu verstehen, tauchen wir in die Welt der Algebra ein und übersetzen das Konstruieren mit vorgegebenen Werkzeugen in die Bestimmung von Nullstellen von Polynomen.

- **Nichtlineare Schwingungen** (Prof. Dr. Manfred Lehn)

  Der Klang einer angeschlagenen Klaviersaite zerlegt sich in den Grundton, seine Quinte, Oktave und immer schwächere weitere Obertöne. Und worin unterscheidet sich eigentlich der Vokal a vom Vokal e, wenn man beide auf derselben Tonhöhe singt?

  Das mathematische Werkzeug, um solche physikalisch-musikalischen Verhältnisse zu untersuchen, ist die sogenannte Fourieranalysis. Sie hat wichtige Anwendungen in allen technischen und physikalischen Bereichen jenseits der bloßen akustischen Analyse. Wir wollen verstehen, wie man allgemeine periodische Funktionen mit Hilfe von Sinusfunktionen analysieren kann, und wie man eine Spektralanalyse, also die Zerlegung eines Klangs in seine Obertöne theoretisch und rechnerisch durchführt.

Unterbringung

Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie/`

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 128

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Katharina Beck 21, Julia-Michelle Butter 12, Tom Erkens 4, Lars Schall 8, Fabian Thater 7;
Kl. 6: Linus Kemmeter 10, Nils Koch 11;
Kl. 7: Lukas Born 23, Lea Daum 22, Paul Schall 23, Jonas Schneider 22, Trevor Schöller 17, Victoria Strunk 29;
Kl. 9: Torben Bürger 22, Virginia Fox 9,5, Maximilian Hauck 58, Sarah Kästner 12;
Kl. 13: Katharina Rößler 28.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 13: Nils Werner 12.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Privates Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg:
Kl. 6: Tobit Roth 12;
Kl. 8: Torben Hertrampf 8;
Kl. 11: Annika Bünnagel 11;
Kl. 12: Frauke Stoll 8.

Duisburg, FHG: Kl. 7: Lena Hirtz 2.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Philip Memmer 2;
Kl. 7: Noah Böhm 3, Jonah Hochbaum 4, Olivia Stachow 6, Simon Taubert 7;
Kl. 8: Tim Kruse 6;

Kl. 13: Adriana Stenger 8, Marcel Wittmann 20.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule:
Kl. 11: Patrick Riebe 19.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Aleksandra Herbst 39.

Friedrichsdorf,Main/Taunus International School
Kl. 3: Alice Hogan 4, Grace Yu 4;
Kl. 4: Jule Beinker 4, Ben Bergmann 4, Alessia Conte 4, Tim Pilger 4;
Kl. 5: Olivier de Vogel 4, Lina Decker 4, Ana Flores 4, Borja Garcia Serrar 4, Megan Song 4.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Maximilian Göbel 46.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule
Kl. 6: Jannik Hastedt 2, Justin Sehl 9;
Kl. 7: David Baldus 7;
Kl. 8: Yosra el Mahjoub 15;
Kl. 9: Dominik Horstkötter 18;
Kl. 10: Melanie Schuy 19;
Kl. 11: David Storzer 45.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 11: Melina Mayle 40.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:
Kl. 8: Beatrice Popescu 10.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 9: Dennis Mayle 51,5.

Linz, Martinus Gymnasium:
Kl. 6: Simon Waldek 10.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium
Kl. 5: Gregor Salaru 48.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:
Kl. 12: Silas Rathke 45,5.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jonathan Friedel 7,5, Daniel Roussev 9, Esther Schmeling 26;
Kl. 6: Max Budäus 18;
Kl. 7: Kathrin Bormann 15, Felix Halas 13, Paulina Herber 17, Alexandra Hünlein 15, Josephine Kaßner 20, Paul Keller 11;
Kl. 8: Anke Borrmann 15, Sönke Schneider 81, Arne Witt 9;
Kl. 9: Lennard Freud 31;
Kl. E1: Kristin Teichert 26, Jan Wabnig 36;

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 7: Miriam Büttner 37.

Wien, Sir Karl Popper Schule: Kl. 5: Lorenz Hübel 38.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 7: Raphael Gaedtke 9.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 6: Mareike Bühler 7.

Die Redaktion

Jahrgang 37 | Heft 130 | Juni 2017

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid