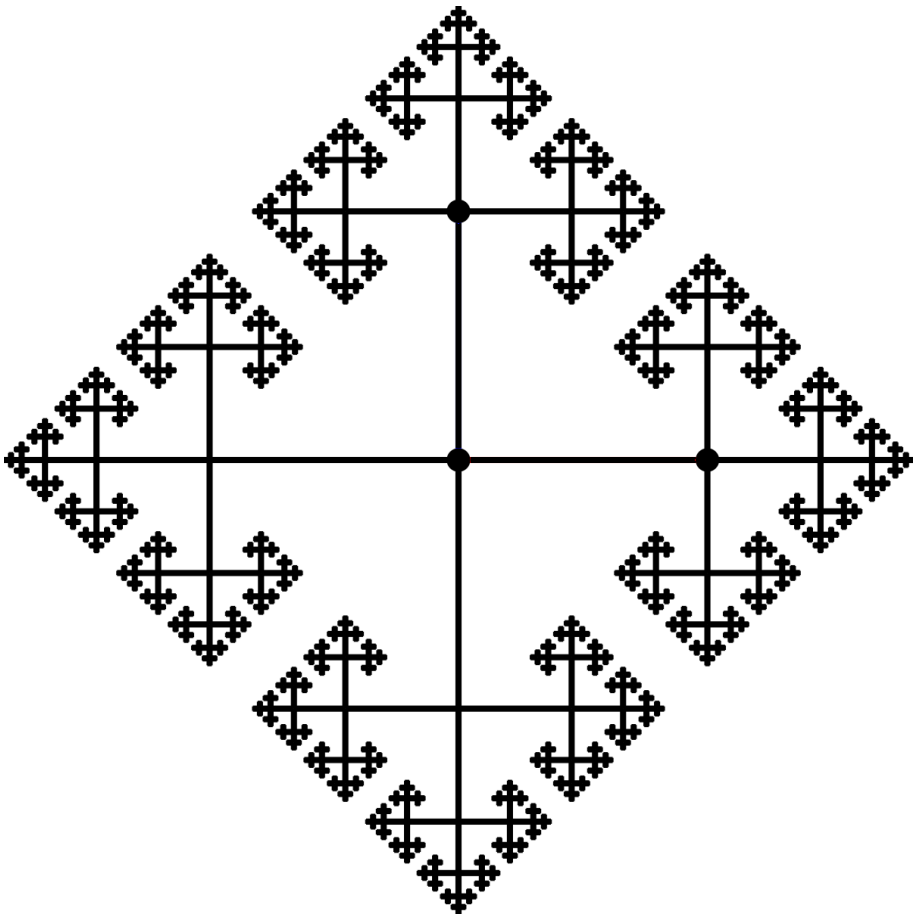
Jahrgang 37 Heft 131 September 2017

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.11.2017.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

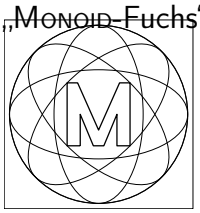
Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“.



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2017

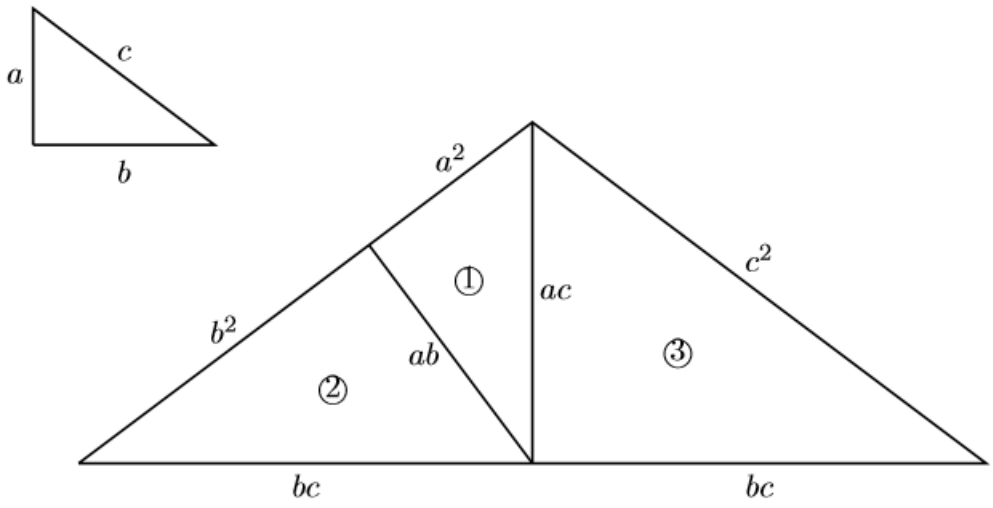
mit der Preisvergabe
an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2016/2017
am Samstag, dem 2. Dezember 2017, Beginn 10 Uhr,
im Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Röntgenplatz 5, 67227 Frankenthal.

Den Festvortrag wird Herr Prof. Dr. Wolfram Decker, TU Kaiserslautern, halten.
Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.
Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite
`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`.

Ein weiterer einfacher Beweis ...

von Steffen Fröhlich, Margarita Kraus

... des Pythagoräischen Lehrsatzes stammt vom US-amerikanischen Mathematiker Frank Burk (1942-2007*) aus dem Jahr 1996 in [1] und lässt sich wie folgt veranschaulichen:



Das ist die Vorgehensweise:

- Bilde das zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreieck ① mit den Seitenlängen a^2, ab und ac.
- Bilde das zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreieck ② mit den Seitenlängen ab, b^2 und bc.

* Siehe www.ams.org/news/in-memory/inmemory-2006-2007

- Bilde das zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreieck ③ mit den Seitenlängen ac, bc und c^2.

Ein geschicktes Aneinanderlegen dieser drei neuen, durch Skalierung gewonnenen Dreiecke zu einem gleichschenkligen Dreieck liefert, wie im Bild ersichtlich, die gesuchte Identität $c^2 = a^2 + b^2$. Dazu skizzieren wir eine mögliche
Beweisidee: Die Dreiecke ① und ② lassen sich entlang ihrer beiden Seiten ab zu einem neuen Dreieck ①+② mit den Seiten ac, a^2+b^2 und bc „verkleben". Dabei bilden a^2 und b^2 tatsächlich eine Seite (eine gerade Linie) dieses neuen Dreiecks (Begründung?). Entsprechend werden die Dreiecke ① + ② und ③ entlang ac „verklebt" zu dem abgebildeten großen Dreieck. Die Seiten ac und bc von ①+② bzw. ③ schließen jeweils einen rechten Winkel ein (Begründung?). Ein Kongruenzsatz liefert dann die Gleichheit der diesen rechten Winkeln gegenüberliegenden Seiten von ①+② und ③, also

$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

Das war zu zeigen.□
Verzichtet man auf eine Begründung, dass sich nach Zusammensetzen der Dreiecke ①, ② und ③ tatsächlich wieder ein Dreieck ergibt, lässt sich wegen der eingangs erwähnten Ähnlichkeit der Dreiecke natürlich auch sofort auf die Gleichheit der Winkel zwischen b^2 und bc bzw. c^2 und bc schließen und damit auf die Gleichheit der Hypotenusen von ①+② und ③.
Burks Idee eignet sich hervorragend zum Experimentieren (siehe hierzu Roscoe [3]): Schneiden Sie die drei größeren Dreiecke auf dem Beiblatt zu diesem Heft aus, und legen Sie diese zu verschiedenen (!) Figuren zusammen.
Zum Schluss dürfen wir unsere Argumentation mit dem von H. Fuchs in der März-Ausgabe von Monoid geführten Beweis des Pythagoreischen Satzes nach Bhāskara vergleichen. Unser Bild suggeriert einen sehr einfachen Beweis. Aber ist er wirklich so einfach? Welchen Beweis finden Sie eleganter?
Oder kennen Sie weitere, leichtere oder vielleicht sogar interessantere Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes?

Literatur

[1] Burk, F.: Behold: The Pythagorean Theorem. The College Mathematics Journal 27, No. 5, 409, 1996

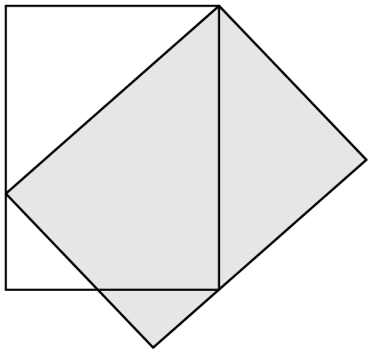
[2] Fuchs, H.: Beweis mit einem Wort. Monoid 129, 2, 2017.

[3] Roscoe, M.B.: Reasoning and sense making with Pythagoras. Mathematics Teacher 108, No. 3, 177–182, 2014.

Lösung ohne Worte: Ein Postkarten-Problem

gefunden von Hartwig Fuchs

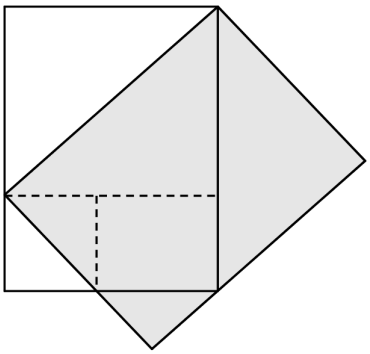
Man lege zwei gleich große (deckungsgleiche) Postkarten so aufeinander, dass eine der langen Seiten der oberen Postkarte von einer Ecke der unteren Karte bis zu einer Ecke ihrer langen Seiten verläuft (vgl. die Abbildung).



Was gilt dann: Die obere Karte verdeckt

a) mehr als die Hälfte
b) genau die Hälfte
c) weniger als die Hälfte der unteren Karte?

Lösung ohne Worte



Es gilt die Aussage a).

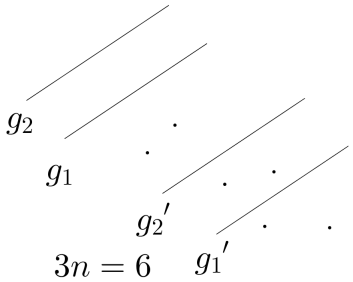
Präsidenten-Wahl in Laputa

von H. Fuchs

Jonathan Swift* veröffentlichte 1726 im Gewand einer fiktiven Reisebeschreibung eine bitterböse Satire auf die Gesellschaft und die Zustände seiner Zeit und auf die Menschheit insgesamt - sein später berühmt gewordenes Buch „Gullivers Reisen“. In diesem Buch besucht Gulliver auch die Inselrepublik Laputa: eine kleine Welt, in der realitätsferne Gelehrte regieren, die versuchen, alle Lebensbereiche der Inselbewohner nach wissenschaftlichen Prinzipien zu regulieren. Die Logik, die als Königin aller Wissenschaften gilt, spielt in diesem System eine alles bestimmende Rolle. Das belegen Dokumente, die wir kürzlich im geheimen Staatsarchiv von Laputa entdeckten.

* Jonathan Swift (1667-1745), irischer Gestlicher und Literat.

So etwa musste jeder Beamte weitreichende Kenntnisse der Logik nachweisen. Und das galt insbesondere für den Präsidenten der Republik, der - um in das höchste Staatsamt gewählt zu werden - eine Prüfung zu bestehen hatte, bei der drei logische Probleme zu lösen waren.
Aus den ebenfalls gefundenen Unterlagen zur Wahl des Präsidenten Laput-Lazuli I kennen wir sogar die Aufgaben, die ihm gestellt wurden: Es handelt sich zwar um geometrische Probleme, zur deren Lösung jedoch nur elementare geometrische Kenntnisse, dafür aber umso mehr logische Fähigkeiten erforderlich sind.
Aufgabe 1: In der Ebene seien $3n$ Punkte, $n \geq 1$, beliebig verteilt. Dann gibt es zwei Geraden, die die Ebene so in drei Gebiete zerlegen, dass in jedem Gebiet gleich viele Punkte liegen.
Aufgabe 2: In der Ebene seien mindestens vier Punkte so gegeben, dass die Abstände zwischen jeweils zwei Punkten sämtlich verschieden sind. Man verbinde nun jeden Punkt durch eine Strecke mit dem ihm am nächsten liegenden Punkt. Zeige: Die geometrische Figur aus den Punkten und Strecken enthält kein Viereck.
Aufgabe 3: Unter fünf Punkten der Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, gibt es stets vier Punkte, die ein konvexes** Viereck bilden.
Hättest auch du Präsident von Laputa werden können? Dann löse selbst die Aufgaben 1-3, bevor du weiterliest.
Lösung der Aufgabe 1: Es gibt in der Ebene stets zwei parallele Geraden g_1 und g_2, für die gilt: g_1 und g_2 sind zu keiner der möglichen endlich vielen Verbindungsstrecken von jeweils zweien der gegebenen $3n$ Punkte parallel und sämtliche $3n$ Punkte liegen auf der selben Seite sowohl von g_1 als auch von g_2. Wenn man nun g_1 und g_2 parallel in die Halbebene mit den $3n$ Punkten verschiebt, dann kann auf keiner Parallelen g_1' von g_1 und g_2' von g_2 mehr als einer der $3n$ Punkte liegen - lägen nämlich zum Beispiel auf g_1' zwei Punkte, so wäre g_1 parallel zur Verbindungsstrecke der beiden Punkte, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.

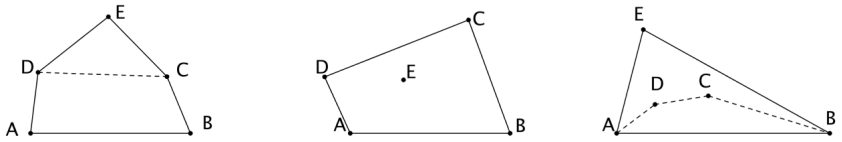


Man verscheibe nun g_1 parallel so weit, bis $2n$ Punkte passiert sind und g_2 so weit, bis n Punkte passiert sind. Durch die so erhaltene Parallele g_1' von g_1 und g_2' von g_2 wird die Ebene in 3 Gebiete zerlegt und in jedem dieser Gebiete befinden sich n der gegebenen Punkte.

Lösung der Aufgabe 2: Annahme: Es sei $ABCD$ ein Viereck aus beliebigen vier der gegebenen Punkte. Da die Viereckseiten sämtlich verschieden lang sind, gibt es unter ihnen eine längste Seite - es sei die Seite AB. Dann gilt für die Seite AD, dass $|AD| < |AB|$ ist. Damit aber sind nach Voraussetzung die Punkte A und B nicht durch eine Strecke verbunden - also ist die geometrische Figur $ABCD$ kein Viereck im Widerspruch zur Annahme. Es gilt also die Behauptung.

** Ein Viereck heißt konvex, wenn seine sämtlichen Innenwinkel $< 180°$ sind.

Lösung der Aufgabe 3: Man denke sich eine Gummischnur straff um fünf Punkte gespannt. Dann berührt die Schnur entweder 5,4 oder 3 Punkte „von außen“. Damit sind alle Fälle, die sich aus den möglichen Positionen von fünf Punkten in der Ebene ergeben, zurückgeführt auf die drei in der Figur beschriebenen Situationen - in denen die Punkte A, B, C und D jeweils ein konvexes Viereck bilden.



Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

Mit *MON* und *OID* seien zwei jeweils 3-ziffrige positive ganze Zahlen bezeichnet - wobei gleichen und auch verschiedenen Buchstaben gleiche oder verschiedene Ziffern entsprechen.

Es sei $MON \leq OID$. Ferner sei *MONOID* die 6-ziffrige Zahl, die man durch Nebeneinanderschreibung der Ziffern von *MON* und *OID* erhält.

Bestimme dann die Zahlen *MON* und *OID* so, dass gilt:

(1) $MON, OID, OID - MON, MONOID$ und $\frac{MONOID}{OID}$ sind sämtlich Quadratzahlen.

Die Lösung dieser Knobelei findest du auf Seite 15.

Die besondere Aufgabe

Hänsel und Gretel verirren sich im Wald

von H. Fuchs

Hänsel (H) und Gretel (G) haben sich in einem sehr großen Wald verirrt. Sie wissen nur: Sie befinden sich an einer Stelle S, die 1 km vom Waldrand r entfernt ist, der - von S ausgesehen - eine nach beiden Seiten unabsehbar lange gerade Linie bildet.

Man zeige:

> Es gibt stets einen Weg, auf dem H und G mit **Sicherheit** zum Waldrand r gelangen, wobei sie weniger als 6,398 km gehen müssen.

Da H und G keinerlei Informationen haben, wo sich der Waldrand r befindet, bleibt ihnen nur, in einer beliebig gewählten Richtung von der Stelle S aus loszugehen. Ihr erstes Wegstück sei eine Strecke ST.

Die von H und G gewählte Strecke ST sei 1km lang, ihr Endpunkt T sei der Mittelpunkt der Seite eines Quadrates $ABCD$ mit 2km langen Seiten, dessen Zentrum der Punkt S ist - so dass ST orthogonal einer Quadratseite ist (Abb. 1, Abb. 2).

Der simple Fall

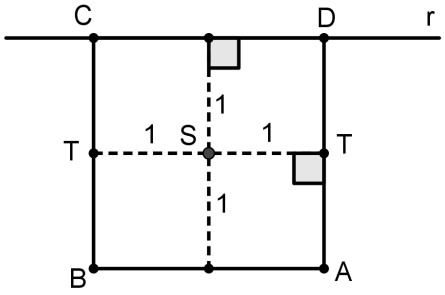


Abb. 1

Wenn H und G die Startstrecke ST **zufällig** so wählen, dass ST orthogonal oder parallel zum Waldrand r ist, dann brauchen sie nur von S nach T und dann längs des quadratischen Wegs $ABCDA$ zu gehen, um mit Sicherheit aus dem Wald hinauszukommen. Dabei legen sie höchstens 6km zurück (vgl. Abb. 1).

Um diesen nur **zufällig** vorkommenden Fall auszuschließen, setzen wir daher im Folgenden voraus, dass ST weder orthogonal noch parallel r ist.

Der allgemeine Fall

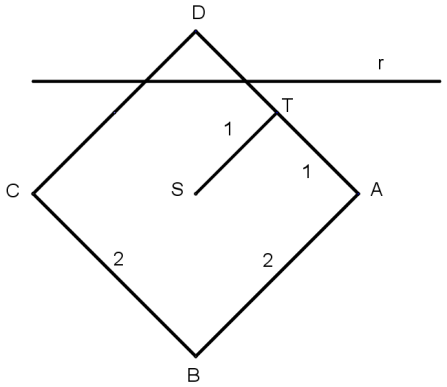


Abb. 2

Dreht man das Quadrat $ABCD$ der Abb. 1 in eine Position wie in Abb. 2 und liegt der Eckpunkt T der von H und G gewählten Startstrecke ST auf einer Seite dieses Quadrats, so sieht man: Der Punkt D und die Punkte A, B, C liegen auf verschiedenen Seiten von r. Daraus folgt:

(1') Der Waldrand r hat mit dem Weg $ABCDA$ zwei Punkte gemeinsam.

Wegen (1') können H und G mit Sicherheit den Waldrand r erreichen, wenn sie von S nach T gehen und dann dem Rundweg $TABCDA$ folgen. Dabei werden sie weniger als 8km zurücklegen, denn ihr Weg ist kürzer als der Weg $w_1 = STABCD$, für den gilt:

(1) $|w_1| = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8\text{km}$.

Gibt es einen Weg, der mit Sicherheit aus dem Wald führt, der jedoch kürzer als w_1 ist?

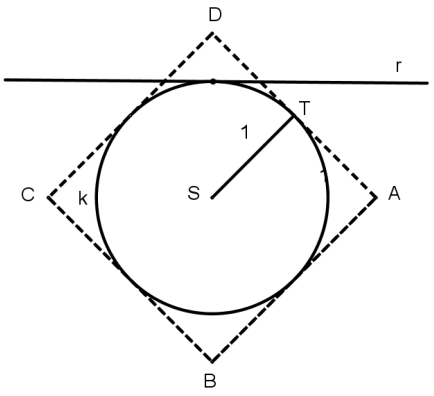


Abb. 3

Wenn man in der Konstruktion des Weges w_1 das Quadrat $ABCD$ durch den Kreis k mit Mittelpunkt S und einem Radius von 1 km Länge ersetzt (Abb. 3), dann kann man die Seiten des Quadrats durch kürzere Kreisbögen ersetzen. Weil nun für den Waldrand r gilt:

(2') r ist eine Tangente an den Kreis k,

werden H und G auf dem Weg w_2, der aus der Strecke ST und dem Rundweg k besteht, mit Sicherheit zum Waldrand r gelangen.

Wegen

$$(2)\quad |w_2| = 1 + 2\pi < 7,284\text{km}$$

legen sie dabei weniger als 7,284km zurück.

Eine Verkürzung des Weges w_2 zu einem Weg w_3 ergibt sich, wenn man ein Quadrat $STDC$ so festlegt (Abb. 4):

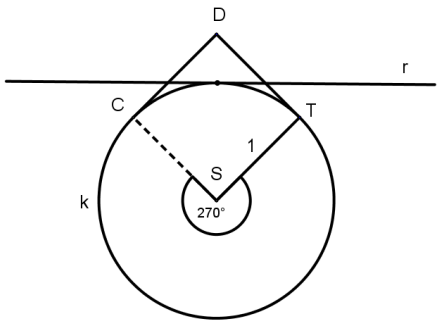


Abb. 4

Man wähle den Punkt C auf dem Kreis, so dass der längere Bogen TC ein $\frac{3}{4}$-Kreis ist und ergänze dann den Streckenzug CST zum Quadrat $STDC$. Für den Waldrand r gilt (2'). Da der Punkt D und die Punkte C und T auf verschiedenen Seiten von r liegen, hat r mit dem Rundweg $STCD$ zwei Punkte gemeinsam. Daher können H und G mit Sicherheit auf dem Weg $w_3 = STCD$ den Wald verlassen und zwar nach weniger als 6,713km, weil für den Weg w_3 gilt:

$$(3)\quad |w_3| = 1 + \tfrac{3}{2}\pi + 1 < 6,713\text{km}.$$

Der Weg w_3 ist verkürzbar. Es sei ST eine $\sqrt{2}$km lange Strecke in beliebiger Richtung. Wenn ST zufällig den Waldrand r schneidet, ist das Problem von H und G gelöst.

Es seien daher nun S und T auf der gleichen Seite von r.

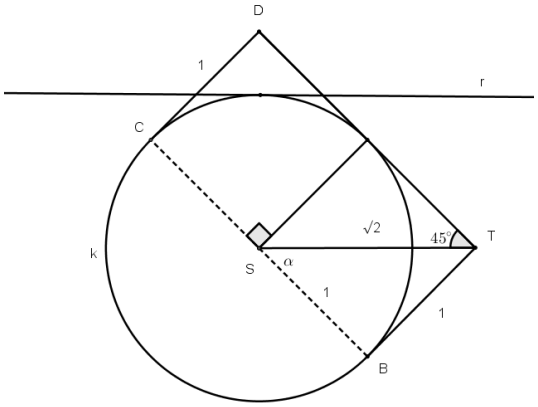


Abb. 5

t sei eine Strecke, die mit ST einen Winkel von 45° bildet und B sei der Fußpunkt des Lotes von S auf t. Dann ist $\alpha = 45°$ und das Dreieck BTS ist gleichschenklig mit $|TB| = |SB|$; da es auch rechtwinklig ist, gilt: $|ST|^2 = |TB|^2 + |SB|^2 = 2|SB|^2$. Wegen $|ST|^2 = 2$ ist $|SB| = 1$. Folglich ist B der Punkt des Kreises k mit Mittelpunkt S und einem 1km langen Radius, in dem die Strecke t den Kreis berührt.

$TDCB$ sei nun das in Abb. 5 angegebene Reckteck.

Wegen (2) hat dann r zwei gemeinsame Punkte mit dem Rundweg $TBCDT$. Wenn also H und G dem Weg $w_4 = STBCD$ folgen, werden sie nach weniger als 6,556 km wegen

(4) $|w_4| = \sqrt{2} + 1 + \pi + 1 < 6,556\text{km}$

dem Wald entrinnen.

Lässt sich der Weg w_4 zu einem Weg w_5 verkürzen, in dem man die in Abb. 5 eingetragenen 45°-Winkel abändert und danach w_5 nach dem gleichen Muster wie w_4 konstruiert?

Der Winkel zwischen ST und TB sei 60° und TB berühre den Kreis k im Punkt B.

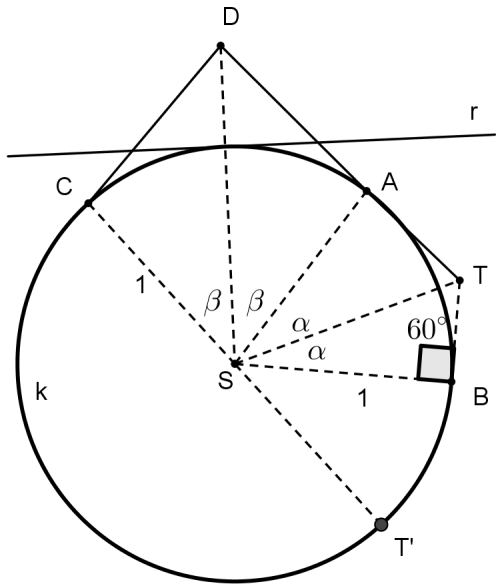


Abb. 6

Dann ist $\alpha = \angle BST = 30°$. Es sei $2\beta = 90°$. Da nach Voraussetzung ST nicht orthogonal zu r ist und somit auch r nicht schneidet, so ergibt sich nach der gleichen Überlegung wie bei w_4: der Weg $w_5 = STBCD$, BC der größere Bogen, führt mit Sicherheit aus dem Wald hinaus.

Wie lang ist der Weg $w_5 = STBCD$? Es sei $ST'B$ das an SB gespiegelte Dreieck SBT. Im gleichseitigen Dreieck $ST'T$ gilt: $|TB| = \frac{1}{2}|ST|$ und daher ist $|ST|^2 = 1^2 + |TB|^2 = 1 + \frac{1}{4}|ST|^2$. Folglich ist $|ST| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $|TB| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Für den Weg $w_5 = STBCD$ gilt daher:

(5) $|w_5| = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} + (2\pi - \frac{1}{6}2\pi - \frac{1}{4}2\pi) + 1 = \sqrt{3} + \frac{7}{6}\pi + 1 < 6,398(\text{km}).$

Das Ergebnis lässt sich nicht dadurch verbessern, dass man die Winkel $\alpha = 30°$ und $\beta = 45°$ in Abb. 6 verändert!
Es seien α und β spitze Winkel - im Bogenmaß gemessen seien sie a und b. Für den Weg $w = STBCD$ gilt dann:

$$|w| = |ST| + |TB| + |\text{Bogen } BC| + |CD|$$

wobei

$|ST| = \frac{1}{\cos a}$ wegen $\cos a = \frac{|SB|}{|ST|}$, $|TB| = \tan a$, $|\text{Bogen } BC| = 2\pi - 2a - 2b$ und $|CD| = \tan b$.

Damit ist

$$(6)\quad |w| = \left(\frac{1}{\cos a} + \tan a - 2a\right) + (\tan b - 2b) + 2\pi.$$

Welches ist dann der kürzeste Weg w, der mit Sicherheit zum Waldrand führt? Wir setzen $|w| = f(a) + g(b) + 2\pi$. Dann ist $|w|$ minimal, wenn f und g minimal sind, wofür $f' = 0$ und $g' = 0$ notwendige Bedingungen sind.
Es gelte daher

$$f'(a) = \frac{\sin a}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a} - 2 = 0 \text{ und } g'(b) = \frac{1}{\cos^2 b} - 2 = 0.$$

Im 1. Fall folgt wegen $\cos^2 a \neq 0$, dass $\sin a + 1 - 2\cos^2 a = 0$ und wegen $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, dass $2\sin^2 a + \sin a - 1 = 0$ ist. Somit gilt: $\sin a = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{1+8}\right)$.

Nach Voraussetzung ist a ein spitzer Winkel, so dass $\sin a = \frac{1}{4}(-1+3) = \frac{1}{2}$ und somit $a = \frac{\pi}{6}$, also $\alpha = 30°$ ist.
Im 2. Fall folgt wegen $\cos^2 b \neq 0$, dass $\cos^2 b = \frac{1}{2}$ ist. Für den spitzen Winkel b gilt daher $\cos b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mithin ist $b = \frac{\pi}{4}$, also $\beta = 45°$. Da $\cos^2 a$ auf dem Intervall $0 < a < \frac{\pi}{2}$ streng monoton wächst, gilt:

$$f'(a) < f'(\tfrac{\pi}{4}) \text{ für } a < \tfrac{\pi}{6} \text{ und } f'(a) > f'(\tfrac{\pi}{6}) \text{ für } a > \tfrac{\pi}{6}.$$

sowie

$$g'(b) < g'(\tfrac{\pi}{4}) \text{ für } b < \tfrac{\pi}{4} \text{ und } g'(b) > g'(\tfrac{\pi}{4}) \text{ für } b > \tfrac{\pi}{4}.$$

In den Stellen $a = \frac{\pi}{6}$ und $b = \frac{\pi}{4}$ wechseln daher $f'(a)$ und $g'(b)$ ihr Vorzeichen von - zu +; somit haben $f(a)$ und $g(b)$ an diesen Stellen ein Minimum, so dass auch der Weg w für diese Winkel minimal ist. Zugleich ergibt sich, dass die Wege w und w_5 übereinstimmen.

Es stellt sich nun die Frage: Wenn man bei der Konstruktion von Wegen anders als bisher vorgeht, gibt es dann Wege w, die kürzer als w_5 sind? Die Antwort hat John R. Isbell 1957 gefunden, als er bewies*, dass jeder Weg w der mit Sicherheit aus dem Wald hinausführt - wie auch immer er konstruiert ist - mindestens so lang wie w_5 ist. Damit haben H und G Entscheidungshilfe:
Wenn sie die Wahl eines Weges nicht dem Zufall überlassen und möglicherweise

* John R. Isbell: An optimal research pattern. Naval Research Logistics Quarterly, 4/1957.

so übermäßig lange Wege** Kauf nehmen wollen, sollten sie einem Weg w_5 folgen, auf dem sie nach weniger als $\sqrt{3}+1+\frac{7}{6}\pi$Km zum Wald hinaus gelangen.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Herr Pommer hatte in diesem Jahr eine reichhaltige Apfelernte. Seine Nichte Eva half ihm, alle Äpfel im Keller einzulagern. Da sämtliche Äpfel den gleichen Durchmesser von 10 cm besaßen, passten sie genau in die Vorratsregale. Diese waren 160 cm breit und 90 cm tief.

Während Eva die Äpfel zunächst in 9 Reihen zu 16 Früchten nebeneinander anordnete, kam ihr plötzlich eine Idee. „Glaubst Du, dass ich auch mehr als 144 Äpfel in einem Regal unterbringen kann?“ fragte sie ihren Onkel. „Dann liegen aber nicht mehr alle Äpfel auf dem Boden des Regals,“ entgegnete dieser. „Doch, doch, das geht trotzdem,“ beharrte Eva. „Hier, schau einmal!“ Herr Pommer schaute sich das von seiner Nichte gefüllte Regal an und begann zu zählen... Lassen sich mehr als 144 Äpfel dieser Größe auf den Boden eines Regals mit der angegebenen Fläche legen? (Die Lösung soll auch eine kurze Begründung enthalten.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. November 2017 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 129

In Heft 129 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Der Zug auf der Brücke

Es gibt Eisenbahnbrücken mit einem Fußweg. Stefanie und Nora gingen gemeinsam über eine solche, 225 m lange Brücke, als sie den entgegenkommenden Zug bemerkten. Er fuhr in genau 27 Sekunden über die Brücke, wobei die Zeit von der Auffahrt der Lokomotive bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke gemeint ist.

An den beiden Mädchen fuhr der Zug mit konstanter Geschwindigkeit in genau 9 Sekunden vorüber. Während dieser Zeit hatten die beiden - ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit - genau 9 Meter zurückgelegt. „Puh, diese Begegnungen geben mir immer ein flaues Gefühl“, sagte Nora. „Dafür hatte ich keine Zeit, denn ich habe überlegt, wie lang der Zug ist“, entgegnete Stefanie. „Kann man das denn ausrechnen?“ fragte Nora. Wie lang war dieser Zug?

** Jeder Weg führt letztendlich aus einem Wald, der ja ein endliches Gebiet bedeckt.

Lösung

Dem ersten Absatz entnehmen wir, dass der Zug für eine Strecke von (225 m + Eigenlänge) genau 27 Sekunden benötigt. Dem zweiten Absatz entnehmen wir, dass der Zug für eine Strecke von (Eigenlänge − 9 m) genau 9 Sekunden benötigt.

Beide Beziehungen beschreiben dieselbe, konstante Geschwindigkeit des Zuges. Daher können wir sie kombinieren; am Einfachsten durch Multiplikation der zweiten Beziehung mit 3. Dann lautet der zweite Satz: Der Zug benötigt für eine Strecke von (3 Eigenlängen − 27 m) genau 27 Sekunden.

Da wir nun die gleiche Zeitspanne haben wie im ersten Satz, müssen auch die Strecken übereinstimmen. Wir setzen also gleich und erhalten mit der Abkürzung *EL* für Eigenlänge:

$$\begin{aligned} 225\text{m} + 1EL &= 3EL - 27\text{m} \\ 252\text{m} &= 2EL \\ 126\text{m} &= 1EL \end{aligned}$$

Der Zug ist also 126 m lang.

Eine vollständig richtige Lösung haben Maximilian Göbel, Melina Mayle, Dennis Mayle und Sönke Schneider eingesandt. Einige der anderen Teilnehmer haben bei der Übertragung des ersten Absatzes die Eigenlänge nicht berücksichtigt.

Der nächste Zug überholte die beiden Mädchen auf der Brücke von hinten; alle anderen Angaben blieben gleich. Sicher könnt Ihr die Länge dieses Zuges jetzt im Kopf ausrechnen, aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Wettrennen von Primzahlen

Zwei „Läufer“ L1 und L2 erzeugen Primzahlen nach den Formeln $4n+1$ bzw. $4n-1$; dabei läuft n von 1 bis zu einer größten Stelle n_{max}. Gewonnen hat derjenige, der dabei die meisten Primzahlen erhalten hat. Berechnet man die Anzahl der jeweiligen Primzahlen für n von 1 bis $n_{max} = 20$, so haben die beiden am Ende 9 (L1) bzw. 12 (L2) Primzahlen erzeugt; L2 hat also gewonnen. Überraschend ist dabei, daß L2 nie hinten liegt ($1 <= n <= 20$). Lediglich sind beide Anzahlen ab und zu gleich; d.h. L1 hat L2 zwar eingeholt, nie aber überholt.

a) Zeige dies mit einem Computer-Programm!

b) Wann wird L2 erstmals von L1 überholt? Wie lange bleibt danach L1 vor L2?

c) Wann wird L2 das zweite Mal von L1 überholt? Wie groß war zwischendurch der maximale Vorsprung von L2 vor L1?

d) Wird L2 ein drittes Mal von L1 überholt?

Es bleiben einige theoretische Fragen, die mit Computer-Simulationen nicht geklärt werden können: Wie oft überholt L1 seinen Gegner L2 auf lange Sicht ($n = \infty$)? Erzeugen die beide Läufer jeweils unendlich viele Primzahlen? (W.G.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2017 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 129

Kimberling-Folge

Der amerikanische Mathematiker Clark Kimberling hat eine Folge natürlicher Zahlen $k(n)$, $n \in \mathbb{N}$ folgendermaßen definiert: Für $n = 1$ gelte $k(1) = 1$. Ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die $\leq x$ ist, so gilt für $n > 1$:

$$k(n) = \begin{cases} \lfloor 0,5 \cdot k(n-1) \rfloor & \text{falls } \lfloor 0,5 \cdot k(n-1) \rfloor \notin \{0, k(1), k(2), \ldots, k(n-1)\} \\ 3 \cdot k(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zwei Beispiele für den Anfang der Kimberlingfolge FOLGE mit n Elementen zeigen ihr grundsätzliches Verhalten: Dabei sind diese bei SORTF nach Größe „sortiert"; es fehlen die Folgenglieder, die größer als n sind.

```
n=18 FOLGE=[ 1, 3, 9, 4, 2, 6, 18, 54, 27, 13, 39, 19, 57, 28, 14, 7, 21, 10]
n=19 FOLGE=[ 1, 3, 9, 4, 2, 6, 18, 54, 27, 13, 39, 19, 57, 28, 14, 7, 21, 10, 5]
n=18 SORTF=[ 1, 2, 3, 4, 0, 6, 7, 0, 9, 10, 0, 0, 13, 14, 0, 0, 0, 18],
     luecke1= 5
n=19 SORTF=[ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 9, 10, 0, 0, 13, 14, 0, 0, 0, 18, 19],
     luecke1= 8
```

Man erkennt, dass SORTF der Beginn der Folge der natürlichen Zahlen ist, wobei einige mit Null gekennzeichnete Stellen noch fehlen. Die erste solche Lücke wird mit `luecke1` bezeichnet. Mit zunehmender Anzahl n scheinen sich Lücken zu schließen; im angegebenen Beispiel wird `luecke1`$= 5$ von $n = 18$ auf $n = 19$ aufgefüllt und es bleibt 8 als erste Stelle, die fehlt. Diese wiederum ist schon ab $n = 26$ nicht mehr vorhanden etc. Aus dieser Beobachtung ergeben sich Fragen, die für spezielle n-Werte mit einem Computer-Programm beantwortet werden können.

a) `luecke1`$= 242$ tritt zum ersten Mal bei $n = 765$ auf. Wird sie überhaupt wieder geschlossen? Wenn ja, ab welcher Folgenlänge n?

b) Gibt es eine Anfangsfolge, die mindestens die ersten 1000 (2017) natürlichen Zahlen enthält ? Wenn ja, ab $n =$?

Zusätzliche Fragen, die in voller Allgemeinheit nur durch einen theoretischen Beweis beantwortet werden können:

c) Enthält die Folge eine Zahl mehrfach?

d) Ist jede der Zahlen $1, 2, 3$ usw. ein Element der Folge? (W.G.)

Ergebnisse

Lösung mit einem Pythonprogramm

a) Ab $n = 1992$ wird `luecke1`$= 242$ zum ersten Mal geschlossen.

b) Ab $n = 12493$ enthält die Folge mindestens die ersten 1000 natürlichen Zahlen, es sind sogar die ersten 1006 natürlichen Zahlen; dies ist so bis $n = 14353$; ab $n = 14354$ sind es dann sogar die ersten 1007 natürlichen Zahlen.

Mit dem PYTHON-Programm des Schülers Maximilian Hauck, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey lassen sich diese Ergebnisse leicht ermitteln:

```
import math
Kimberling=[1];  test=1;  n=1
#Benutzereingabe der Obergrenze, bis zu der zu testen ist
bound=int(input("Obere Grenze eingeben: "))
print("Programm-Lauf fuer die ersten",bound,"Zahlen")
#erst wenn die Testvariable test die eingegebene Grenze ueberschreitet,
#sind alle natuerlichen Zahlen bis zur eingegebenen Grenze Elemente der Folge (siehe unten)
while(test<=bound):
    #Neues Element der Folge wird generiert
    t=math.floor(0.5*Kimberling[n-1])
    if(t not in Kimberling+[0]): default=0
    else: t=3*Kimberling[n-1]
    Kimberling.append(t)
    #tester durchlaeuft alle natuerlichen Zahlen und wird immer
    #genau dann inkrementiert, wenn die zu testende Zahl in ein Element von Kimberling ist
    success=True
    n+=1
    while(success):
        if(test in Kimberling):
            test+=1
        else: success=False
        print("Ab n=", len(Kimberling),"enthaelt die Folge mindestens die ersten",
        bound,"natuerlichen Zahlen")
```

Lösung der Knobelei

Da $MONOID : OID$ eine Quadratzahl Q^2 ist, gilt:

$$MONOID = MON \cdot 1000 + OID = Q^2 \cdot OID$$

also ist

(2) $MON \cdot 1000 = (Q^2 - 1) \cdot OID$.

a) Es sei $OID = MON$. Nach (2) ist dann $1001 = Q^2$ - ein Widerspruch. Daher ist im Folgenden $MON < OID$ vorausgesetzt.

b) Es sei $\mathrm{ggT}(MON, OID) = 1$. Aus (2) folgt dann, dass OID ein Teiler von 1000, also $OID \in \{100, 125, 200, 250, 500\}$ ist. Wegen $MON < OID$ ist $OID \neq 100$; die übrigen vier Zahlen sind keine Quadratzahlen. Also gibt es im Fall b) keine Lösungszahlen für MON und OID.

c) Es sei $\mathrm{ggT}(MON, OID) = T^2$, $T^2 \neq 1$. Dann gibt es Zahlen x^2, y^2 so, dass $MON = T^2 \cdot x^2$ und $OID = T^2 \cdot y^2$, $x^2 \neq 1$, $y^2 \neq 1$ und x^2, y^2 teilerfremd. Aus (2) erhält man damit $T^2 \cdot x^2 \cdot 1000 = (Q^2 - 1)T^2 \cdot y^2$. Es gilt also

(3) $x^2 \cdot 1000 = (Q^2 - 1)y^2$

Wegen der Teilerfremdheit von x^2 und y^2 ist y^2 ein quadratischer Teiler von 1000 und da $y^2 \neq 1$ ist gilt $y^2 \in \{4, 25, 100\}$. Weil $MON - OID$, also $T^2 \cdot y^2 - T^2 \cdot x^2$ nach Voraussetzung eine Quadratzahl ist, gilt

(4) $y^2 - x^2$ ist eine Quadratzahl.

Es sei $y^2 = 4$. Dann folgt aus (4): $x^2 = 1$ oder $x^2 = 4$. Beide Fälle sind nicht möglich wegen $x^2 \neq 1$ bzw. wegen der Teilerfremdheit von x^2 und y^2. Es sei $y^2 = 25$. Wegen (4) ist $25 - x^2$ eine Quadratzahl, so dass $x^2 = 16$ oder $x^2 = 9$ ist. Für $x^2 = 16$ lautet (3)

(3') $16000 = (Q^2 - 1)25$

Daher ist $Q^2 = 641$ - ein Widerspruch, da 641 keine Quadratzahl ist. Für $x^2 = 9$ folgt aus (3):

(3'') $9000 = (Q^2 - 1) \cdot 25$,

so dass $Q^2 = 19^2$ ist. Daher erhält man aus $MON = 9T^2$ und $OID = 25T^2$ mögliche Lösungen, denn auch $OID - MON = 16T^2$,

$$MONOID = MON \cdot 1000 + OID = 9025T^2 = 95^2 \cdot T^2$$

und $MONOID : OID = 19^2$ sind sämtlich Quadratzahlen. Wegen $100 < OID = 25T^2 < 1000$ können nur die T^2-Werte $3^2, 4^2, 5^2$ und 6^2 zu Lösungen führen.
Für $T^2 = 3^2$ erhält man keine Lösung, denn dann ist $MON = 9T^2 = 3^2 \cdot 3^2 < 100$. Für $T^2 = 4^2, 5^2$ und 6^2 ergeben sich aus $MON = T^2x^2$ drei Lösungen:

(5) $(MON, OID) = (12^2, 20^2), (15^2, 25^2)$ und $(18^2, 30^2)$.

Es sei schließlich $y^2 = 100$. Wegen (4) ist $100 - x^2$ eine Quadratzahl und daher gilt $x^2 = 64$ oder $x^2 = 36$. Für $y^2 = 4 \cdot 25$ und $x^2 = 4 \cdot 16$ erhält man aus (3) nach Division durch 4 die Gleichung (3') und für $y^2 = 4 \cdot 25$, $x^2 = 4 \cdot 9$ ergibt sich auf die gleiche Weise die Gleichung (3''). Daher führt die Bedingung $y^2 = 100$ wieder auf genau die Lösungen in (5).
Unsere monoidale Knobelei hat daher nur die in (5) genannten Lösungen.

Hättest Du es gewusst?
Quizsendung
von H.-J.S.

1. In einer Quizsendung stellt der Moderator folgende Aufgabe: „Aus einem (sehr dünnen) Draht von 20cm Länge wird ein Quadrat gebogen. Wie groß ist seine Fläche? a) 20cm^2, b) 25cm^2 oder c) 15cm^2?“ Natürlich weißt du sofort die richtige Antwort.

2. Aus diesem Draht kann man auch andere Rechtecke biegen.

   a) Zeige, dass das Quadrat unter all diesen Rechtecken die größte Fläche hat. Hinweis: Setze die Länge eines solchen Rechtecks mit $(5 + x)$ cm und die Breite mit $(5 - x)$cm an, $0 \leq x < 5$ (Begründung!).

   b) Bestimme Länge und Breite des Rechtecks mit einer Fläche von 20cm^2.

3. Man kann den Draht auch zu einer Raute biegen.

   a) Zeige wiederum, dass das Quadrat unter all diesen Rauten die größte Fläche hat. Hinweis: Berechne e und f, die Längen der Diagonalen der Raute, mit Hilfe von $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, wobei α der spitze Winkel der Raute ist.

   b) Wie groß sind α, e und f der Raute mit einer Fläche von 20cm^2?

Mathematische Entdeckungen

Wer forscht mit? Lösungsformel für eine biquadratische Gleichung

In der Schule lernt man für die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ die Lösungsformel* $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{b^2 - 4a})$. Damit findet man leicht auch eine Lösungsformel für die spezielle biquadratische Gleichung

(*) $x^4 + ax^2 + b = 0$, mit a und b reelle Zahlen.

Man braucht dazu nur $x^2 = y$ zu setzen, um über die quadratische Gleichung $y^2 + ay + b = 0$ zu einer Lösungsformel für die Gleichung (*) zu gelangen.
Um eine Lösungsformel für die allgemeine biquadratische Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, a, b, c und d reelle Zahlen herzuleiten sind erheblich größere Schwierigkeiten zu überwinden. Um einen - wenn auch nur schwachen Eindruck von diesen Problemen zu erlangen, fordern wir unsere entdeckungsfreudigen Leser auf:

* Lösungsformel bedeutet hier: Formel zur Bestimmung der **reellen** Lösungen x.

Man entwickle für die im Vergleich zu (*) nicht wesentlich schwerer zu lösende Gleichung $x^4 - 2ax^2 - x + (a^2 - a) = 0$, a reell, eine Lösungsformel.

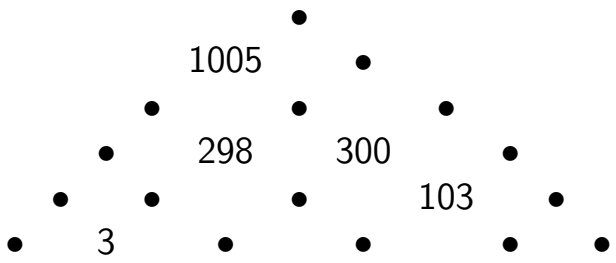
Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2017 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 129

In Heft 128 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

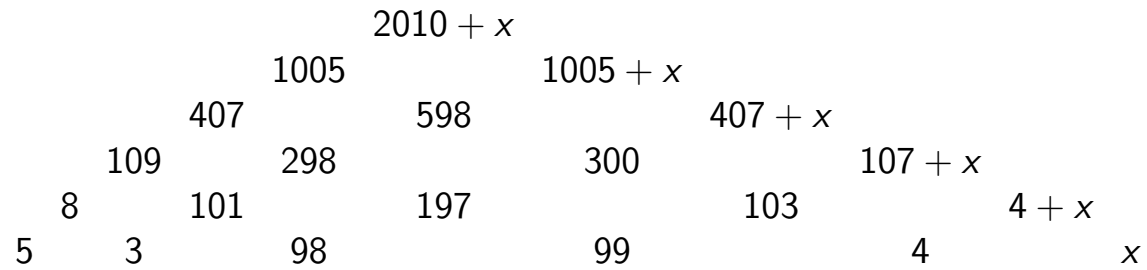
Ein Zahlenrätsel und das Pascal-Dreieck

In der Figur unten sind die Punkte durch natürliche Zahlen zu ersetzen nach der Regel: Jede Zahl oberhalb der Grundzeile ist die Summe der beiden diagonal unter ihr stehenden Zahlen. Wie heißt die Zahl in der Spitze der Figur? Untersuche nun die Frage: Wie sind die natürlichen Zahlen in der Grundzeile zu wählen, um in der Spitze eine vorgegebene Zahl zu erhalten? Finde eine Regel für diese Wahl für figuren mit $n = 2, 3, 4, 5, 6$ oder sogar für allgemeine n.



Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt Maximilan Göbel, Klasse 10, Schloss Hansenberg Gymnasium und Sönke Schneider, Klasse 8, Gymnasium Oberursel.
In dem gegebenen Dreieck stehen in der ganzen rechten Spalte nur Punkte. Daher kann für den Punkt rechts unten eine Variable x eingesetzt werden und das ausgefüllte Dreieck sieht so aus:



Sei a eine Zahl in einem solchen Zahlendreieck. Stehen über a zwei Zahlen, so ist a in beiden als Summand enthalten. In der Zahl über diesen beiden Zahlen ist a dann

zweimal enthalten. Allgemein ist a als Summand in jeder anderen Zahl enthalten, die durch Schritte nach oben links oder oben rechts in dem Zahlendreieck von a aus erreicht werden kann. In diesen Zahlen ist a genau so oft als Summand enthalten, wie die Anzahl der Wege mit den gennanten Schritten von a zu der anderen Zahl ist. Steht nun a in der untersten Zeile einer Zahlenfigur mit n Zeilen und man will herausfinden, wie oft a als Summand in der Zahl in der Spitze enthalten ist: dann muss man die Anzahl solcher Wege von a zur Spitze finden. Angenommen, a steht als k-te Zahl in der untersten Zeile. Dann geht dieser Weg von a insgesamt $k-1$ mal nach links oben und $n-k$ mal nach rechts oben. Dafür gibt es nun $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten, also gibt es genau so viele Wege von a zur Spitze. Ist a_k die k-te Zahl in der untersten Zeile, so gilt also für die Zahl S in der Spitze:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 130

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Produkt von Ziffern

Gibt es Zahlen, für die

a) das Produkt ihrer Ziffern gleich 2520 ist?

b) das Produkt ihrer Ziffern gleich 2340 ist? (WJB)

Lösung:
Wir zerlegen die Zahlen in ihre Primfaktoren

a) $2520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

b) $2340 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

Also gibt es im Fall a) z.B. die Zahlen 2223357 und 2732253. Im Fall b) kann es eine solche Zahl nicht geben, da 13 eine zweistellige Primzahl ist.

II. ggT

Der größte gemeinsame Teiler von 144 und 33383495724 lässt sich ohne großen Rechenaufwand bestimmen. Wie? (WJB)

Lösung:
$144 = 3^2 2^4$. Wir brauchen also nur die Teilbarkeit von n durch $2, 4, 8, 16$ sowie durch 3 und 9 zu prüfen. Die letzen beiden Ziffern (24) bedeuten Teilbarkeit durch 4. Die drittletzte Ziffer (7) ist ungerade, n ist also nicht durch 8 teilbar.

Die Quersumme ergibt, dass n Vielfaches von 3 aber nicht von 9 ist. Der größte gemeinsame Teiler ist also $4 \cdot 3 = 12$.

III. Eine lange Rechnung

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen x und $x+1$ wird mit 17 multipliziert. Danach addieren wir 213, dann dividieren wir durch 4, subtrahieren dann 9, multiplizieren anschließend mit 15 und subtrahieren schließlich 254. Das Ergebnis ist 1111. Finde x. (WJB)

Lösung:

Wir machen die Rechnungen in umgekehrter Reihenfolge rückgängig:

$$\begin{aligned} 1111 + 254 = 1365; \quad & 1365 : 15 = 91; \\ 91 + 9 = 100; \quad & 100 \cdot 4 = 400; \\ 400 - 213 = 187; \quad & 187 : 17 = 11. \end{aligned}$$

Somit ist $x + (x+1) = 11$, und damit $x = 5$.

IV. Primzahlen gesucht

Bestimme alle Primzahlen $p^2 + 2$, wenn p eine Primzahl ist. (H.F.)

Lösung:

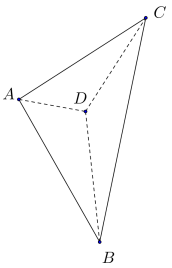
Es sei $p = 2$. Dann ist $p^2 + 2 = 6$ eine gerade Zahl, also nicht prim. Für $p = 3$ ist $p^2 + 2 = 11$ und 11 ist prim. Es sei $p \neq 3$. Dann ist entweder $p - 1$ oder $p + 1$ ein Vielfaches von 3. Folglich ist $p^2 + 2$ ein Vielfaches von 3 wegen $p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3 = (p+1)(p-1) + 3$. Somit ist $p^2 + 2 = 11$ die einzige Lösung.

V. Verbindungswege

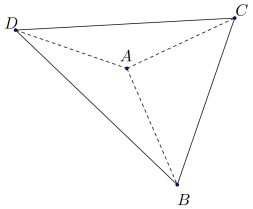
Jedes von vier benachbarten Häusern ist mit den anderen drei Häusern durch einen Weg so verbunden, dass sich keine zwei Wege kreuzen. Ein fünftes Haus wird nun in der Nähe gebaut. Zeige: Dieses Haus kann man nicht durch Wege mit den anderen vier Häusern so verbinden, dass der neue Weg keinen der alten Wege kreuzt. (H.F.)

Lösung:

Die alten Häuser seien mit A, B, C, D und das neue Haus mit E bezeichnet. Ausgehen von der Verbindung der Häuser A, B, C gibt es für die Lage des Hauses D zwei Möglichkeiten: Entweder befindet sich D im Innengebiet oder im Außengebiet des Dreiecks ABC.



Figur 1



Figur 2

Die Situationen sind im Wesentlichen - abgesehen von den Bezeichnungen nicht verschieden. Wir dürfen daher im Folgenden von einer Situation wie in Figur 1 ausgehen.

Befindet sich dann das Haus E im Innengebiet des Dreiecks ABC, dann liegt es in einem der Teildreiecke ABD, BCD, ADC. Im 1. Fall ist das Haus C, im 2. Fall das Haus A und im 3. Fall das Haus B von E aus nicht kreuzungsfrei zu erreichen. Liegt jedoch E im Aussengebiet des Dreiecks ABC, dann kann man die Häuser D und E nicht durch einen kreuzungsfreien Weg verbinden.

VI. Spielerei

a) Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine richtige Rechnung entsteht (verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern):

$$\begin{array}{rr} & \text{EINS} \\ + & \text{VIER} \\ \hline & \text{SECHS} \end{array}$$

b) Findest du noch eine Lösung? (WJB)

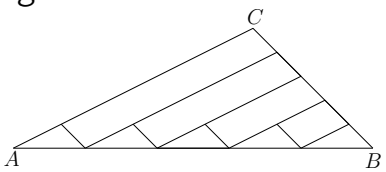
Lösung:
Es gibt tatsächlich 26 verschiedene Lösungen. Eine mögliche Lösung ist:

$$\begin{array}{rr} & 3721 \\ + & 9730 \\ \hline & 13451 \end{array}$$

VII. Zerlegung eines Dreiecks

Zerlege ein Dreieck in vier Parallelogramme und fünf gleiche – dem ursprünglichen Dreieck ähnliche – Dreiecke. (WJB)

Lösung:



Dabei müssen die fünf Teilstrecken von $\overline{AB}$ jeweils gleich lang sein.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Multiplikationsregel

Die zweistellige natürliche Zahl n sei in Ziffernschreibweise $n = ab$. Wenn $a+b \leq 9$ ist und $a+b = c$ gesetzt wird, dann gilt für das Produkt $n \cdot 11$ in Ziffernschreibweise $n \cdot 11 = acb$. Warum? Zeige dies. (H.F.)

II. Konstruktion eines Dreiecks

Zeichne ein Dreieck mit einer Seitenlänge $a = 3\text{cm}$ und Umfang $U = 10\text{cm}$. Beschreibe, wie du vorgegangen bist. (WJB)

III. Ziffernsumme

Wie groß ist die Summe der Ziffern der Zahlen

a) $10^{225} - 1$?

b) $10^{227} - 8766$? (H.F.)

IV. Winkeldreiteilung

Wie teilt man einen rechten Winkel in drei 30° Winkel? (H.F.)

V. Wie viele Männer sind versammelt?

Bei der Jahresversammlung eines Vereins schaut sich eine der anwesenden Frauen die Männer genau an. Sie zählt 26 Männer mit Krawatte und 12 Männer mit Hut. Jeder der Männer trägt mindestens eines (Hut oder Krawatte). Sie multipliziert die Anzahl der Männer mit 5 und sieht, dass das Produkt die doppelte Quersumme hat wie die Zahl der Männer und außerdem durch 6 teilbar ist. Wieviele Männer sind bei der Versammlung? (WJB)

VI. Dreistellige Zahlen

a) Bestimme die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 7 und 13 teilbar ist und die letzte Ziffer 6 hat.

b) Zeige, dass es keine dreistellige Zahl gibt, die durch 11 und 13 teilbar ist und die letzte Ziffer 1 hat. (WJB)

VII. Summe und Produkt

a) Finde drei voneinander verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, deren Summe durch 4 teilbar ist und deren Produkt gleich 30 ist.

b) Gibt es auch Lösungen, bei denen zwei der drei Zahlen gleich sind? Welche?(WJB)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1190: Besondere Vielfache von 4

Es sei $T(n) = 3^n + 2n - 1$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zeige: jede Zahl $T(n)$ ist ein Vielfaches von 4. (H.F.)

Aufgabe 1191: Vorsicht bei Brüchen

Es seien a, b, c, d reelle Zahlen; keine von ihnen sei 0. Mathis behauptet:

(1) Wenn $a > c$ und $b < d$ ist, dann ist $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

(2) Wenn $a > b$ ist, dann gilt $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$.

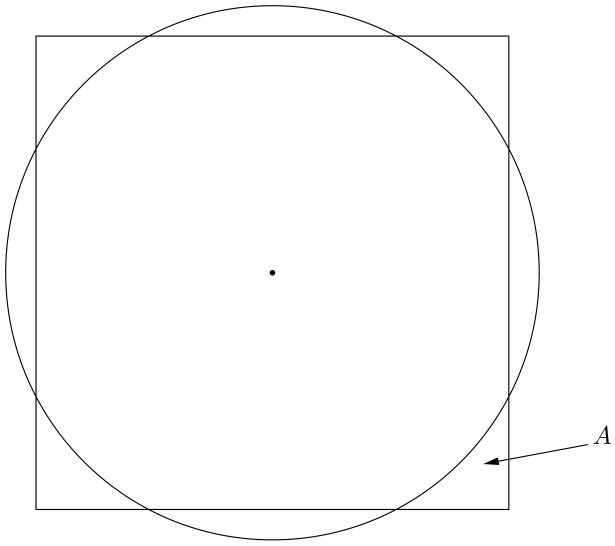
Treffen Mathis Behauptungen zu? (H.F.)

Aufgabe 1192: Nullstellen

Ich verrate dir, dass die Funktion $f(x) = x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 15x - 45$ zwei Nullstellen $x_1 = u$ und $x_2 = -u$ hat. Bestimme alle Nullstellen von f. (WJB)

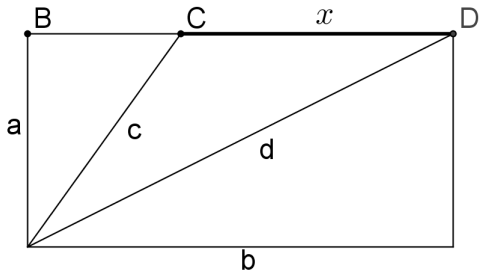
Aufgabe 1193: Quadrat und Kreis

Gegeben ist ein Kreis und ein Quadrat mit gleichem Mittelpunkt. Kreis und Quadrat haben den gleichen Flächeninhalt. Berechne den Flächeninhalt einer der vier „Ecken“, die der Kreis vom Quadrat abschneidet. (Quadratseite $a = 10$cm.) (Christoph Sievert, Bornheim)



Aufgabe 1194: Transversalen im Rechteck

Gegeben seien $a = 20$, $c = 25$ und $d = 52$. Wie lang ist der Streckenabschnitt $x = |\overline{CD}|$?



Aufgabe 1195: Bestimmung von Mengen

Eine Menge M bestehe aus n verschiedenen natürlichen Zahlen ($n > 3$), für die gilt: jeweils drei verschiedene Elemente haben

(1) ein Produkt > 37

(2) eine Summe < 37

Bestimme die maximal mögliche Anzahl von n Elementen von M sowie alle Mengen M, die sowohl (1) als auch (2) erfüllen. (H.F.)

Aufgabe 1196: Zahnpflege

Vor Kurzem las ich folgende Meldung: „62% der erwachsenen Deutschen lassen ihre Zähne mindestens einmal im Jahr vom Zahnarzt kontrollieren. Nur ein Drittel derjenigen, die so regelmäßig zum Zahnarzt gehen, sind Männer." Wie hoch ist der Prozentsatz der Männer, wie hoch der der Frauen, die diese Vorsorge betreiben,

a) unter der Annahme, dass die Hälfte der erwachsenen Deutschen männlich, die andere Hälfte weiblich, ist?

b) unter der Annahme, dass 52% der erwachsenen Deutschen Frauen sind?(WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 130

Klassen 9–13

Bitte beachten Sie, dass in Monoid-Heft 128/129, die neuen Aufgaben leider falsch nummeriert waren. Die richtige Nummerierung wäre 1169-1175 im Heft 128 und folglich 1176-1182 im Heft 129. Wir nummerieren jetzt weiter mit 1183 und bitten um Entschuldigung.

Aufgabe 1183: Prozente

a) Wieviel % von $\sqrt{\frac{5}{2}}$ sind $\sqrt{\frac{2}{5}}$?

b) Wieviel % von $\sqrt{\frac{5}{k}}$ sind $\sqrt{\frac{k}{5}}$? (H.F.)

Lösung:

a) Es sei $\sqrt{\frac{5}{2}} = a$. a ist 100% von a. Nun gilt: 1 ist $\frac{100}{a}$% von a. Folglich: $\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{a}$

ist

$$\frac{100}{a}\frac{1}{a}\% = \frac{100}{a^2}\% = \frac{100}{\frac{5}{2}}\% = 40\%$$

von a.

b) $\sqrt{\frac{5}{k}} = a$. a ist 100% von a. Nun gilt: 1 ist $\frac{100}{a}\%$ von a. Folglich: $\sqrt{\frac{5}{k}} = \frac{1}{a}$ ist

$$\frac{100}{a} \cdot \frac{1}{a}\% = \frac{100}{a^2}\% = \frac{100}{\frac{5}{k}}\% = k \cdot 20\%.$$

Aufgabe 1184: Summe zweier Quadrate

Zwei Zahlen sind gleich weit von 10 entfernt. Die Summe ihrer Quadrate ist 232. Finde die beiden Zahlen! (WJB)

Lösung:

Erste Lösung: Ausprobieren:

$$9^2 + 11^2 = 81 + 121 = 202,$$
$$8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208$$
$$7^2 + 13^2 = 49 + 169 = 218$$
$$6^2 + 14^2 = 36 + 196 = \mathbf{232}.$$

Somit sind 6 und 14 die gesuchten Zahlen.

Zweite Lösung: Die beiden Zahlen seien $10 + x$ und $10 - x$. Dann ist

$232 = (10+x)^2 + (10-x)^2 = (100 + 2x + x^2) + (100 - 2x + x^2) = 200 + 2x^2$,

also ist $2x^2 = 32$, $x^2 = 16$ und somit $x = \pm 4$. Dies führt wieder zu dem Zahlenpaar 6 und 14 (bzw. 14 und 6).

Aufgabe 1185: Eine Frage der Teilbarkeit

Es seien n, k natürliche Zahlen > 1.

a) Sei $S = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n)$ die Summe von $n+1$ unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste k sei. Für welche n ist S durch n teilbar?

b) Wie viele Lösungen hat das Problem für $k = 2017$?

c) Wann hat das Problem genau eine Lösung? (H.F.)

Lösung:

a) Es sei $S = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n)$. Dann ist

$$S = (n+1) \cdot k + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(2k+n).$$

Falls nun $n|S$, also $n|\frac{1}{2}(n+1)(2k+n)$, dann folgt, da n und $n+1$ teilerfremd sind, dass $n|(2k+n)$ und daher auch $n|2k$ gilt. Damit sind die Teiler $n>1$ von $2k$ die gesuchten Lösungen.

b) Für die Primzahl $k=2017$ sind die Teiler >1 von $2k$ offenbar $2, 2017$ und 4034. Somit hat die Aufgabe drei Lösungen.

c) Für die Zahl $2k$ gibt es nur eine einzige Lösung, wenn $k=1$ ist. Denn aus $n|2k$ folgt, dass die Teiler n von 2 und von k Lösungen ergeben. Daher ergibt sich nur dann eine einzige Lösung, wenn $k=1$ ist. Für $k=1$ folgt aus $n|2$ und $n>1$, dass $n=2$ sein muss.

Aufgabe 1186: Sinus

Zeige, dass $\sin(15^\circ)$ eine irrationale Zahl ist! (WJB)

Hinweis: $\sin(30^\circ)=\frac{1}{2}$.

Lösung:

Es gilt $\sin(30^\circ)=\frac{1}{2}$ und $\cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, sowie

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\\ &= 1-2\sin^2(\alpha).\end{aligned}$$

Somit gilt $\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ und damit speziell

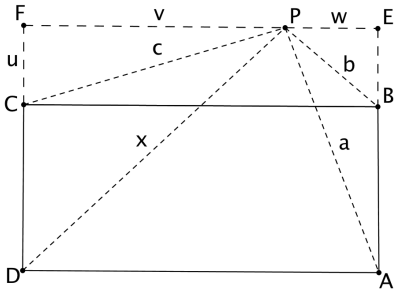
$$\sin^2(15^\circ)=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Wäre $\sin(15^\circ)$ rational, dann auch $\sin^2(15^\circ)$ und damit auch $2-\sqrt{3}$, und deshalb schließlich $\sqrt{3}$. Dann gäbe es teilerfremde Zahlen p und q mit $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$. Das impliziert, dass $3q^2=p^2$, also dass 3 ein Teiler von p ist und deshalb $p=3r$ für eine natürliche Zahl r. Nun ergibt sich, dass $3q^2=9r^2$ bzw. $q=3r^2$, also 3 auch Teiler von q, was der Teilerfremdheit von p und q widerspricht. (H.-J. S.)

Aufgabe 1187: Abstandsberechnung

In der Ebene liegt ein Punkt außerhalb eines Rechtecks $ABCD$ im Gebiet zwischen den Verlängerungen seiner Seiten AB und CD. Es können nur die Entfernungen a, b und c des Punktes P von den Eckpunkten A, B und C des Rechtecks gemessen werden. Kann man den Abstand x der Punkte P und D bestimmen, auch wenn die Seitenlängen des Rechtecks nicht bekannt sind? (H.F.)

Lösung:



Ergänze das Fünfeck $ABPCD$ zum Rechteck $AEFD$. Mit den Bezeichnungen der Figur gilt:

(1) $v^2 = c^2 - u^2$

(2) $w^2 = b^2 - u^2$

(3) $|FD|^2 = |EA|^2 = a^2 - w^2$

(4) $x^2 = v^2 + |FD|^2 = v^2 + a^2 - w^2$

Aus (1)-(4) folgt dann $x^2 = (c^2 - u^2) + a^2 - (b^2 - u^2) = a^2 + c^2 - b^2$. Mithin ist $x = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

Aufgabe 1188: Quadrate

$9x$ ist soviel wie $21y$. $x + y$ ist eine Quadratzahl. Bestimme ein Lösungspaar x und $y < 100$. (WJB)

Lösung:

$x = \frac{21}{9}y = \frac{7}{3}y$ und $x + y = \frac{7}{3}y + y = \frac{10}{3}y$. Somit ist $\frac{10}{3}y = n^2$ und dann ist $10y = 3n^2$. Dann muss y durch 3 teilbar sein und n^2 durch 10, d.h. $y = 30$ und $x = 70$ wäre ein Lösungspaar.

Aufgabe 1189: 10 Punkte im Kreis

In einem Quadrat der Seitenlänge s seien 730 Punkte beliebig verteilt. Es gibt dann einen Kreis K vom Radius $r = \frac{1}{9}s$, in dem sich mindestens 10 Punkte befinden. Zeige dies. Bemerkung: Der Kreis darf auch teilweise außerhalb des Quadrates liegen. (H.F.)

Lösung:

Das Quadrat sei in 81 Teilquadrate der Seitenlänge $\frac{s}{9}$ zerlegt. Annahme: In keinem dieser Teilquadrate befinden sich 10 oder mehr Punkte. Da jedes Teilquadrat dann höchstens 9 Punkte enthält, können im großen Quadrat höchstens $81 \cdot 9 = 729$ Punkte vorkommen - ein Widerspruch. Daraus folgt: eines der Teilquadrate enthält mindestens 10 Punkte. Der Umkreis U dieses Quadrats hat den Durchmesser $d = \frac{s}{9}\sqrt{2}$, also den Radius $\frac{s}{18}\sqrt{2}$ - und U enthält mindestens 10 Punkte. Wegen $\frac{s}{9} > \frac{s}{18}\sqrt{2}$ ist der Kreis U vollständig im Kreis K enthalten. Daraus folgt die Behauptung.

Arithmetisches und geometrisches Mittel

von Laura Biroth

Es gibt verschiedene Arten den (oder besser: einen) Mittelwert von mehreren vorgegebenen Zahlen $x_1, ..., x_n$ zu berechnen.

Am bekanntesten ist wohl das arithmetische Mittel. Es ist definiert als:

$$\bar{x}_a := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Das arithmetische Mittel hat die Eigenschaft, dass

$$\underbrace{\bar{x}_a + \cdots + \bar{x}_a}_{n\text{-mal}} = n \cdot \bar{x}_a = x_1 + \cdots + x_n.$$

Es ist also der „richtige“ Mittelwert für Größen, die man normalerweise addieren würde. Zum Beispiel: Legt man auf einer Radtour am ersten Tag 60, am zweiten Tag 54 und am dritten Tag 72 km zurück, so hat insgesamt die gleiche Strecke zurückgelegt, wie wenn man jeden Tag 62km gefahren wäre. Man kann also sagen, die durchschnittliche Etappe eine habe eine Länge von $\frac{60\text{km}+54\text{km}+72\text{km}}{3} = 62\text{km}$.
Das geometrische Mittel ist (für nicht negative Werte der x_i) definiert als

$$\bar{x}_g := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Da gilt

$$\underbrace{\bar{x}_g \cdots \bar{x}_g}_{n\text{-mal}} = \bar{x}_g^n = x_1 \cdots x_n,$$

ist es der richtige Mittelwert für Größen, die man multipliziert, wie zum Beispiel Wachstumsraten. Wenn sich eine Bakterienkolonie am ersten Tag vervierfacht, am zweiten Tag verneunfacht und am dritten versechsfacht, hat man am Ende genau so viele Bakterien, wie wenn sie sich jeden Tag versechsfacht hätten, denn das geometrische Mittel beträgt $\sqrt[3]{4 \cdot 9 \cdot 6} = 6$. Die Bakterien haben sich am Tag also im Durchschnitt versechsfacht.
Zwischen diesen beiden Größen besteht ein Zusammenhang, den wir nun näher betrachten wollen.
Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel: Für nicht-negative Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt immer $\bar{x}_g \leq \bar{x}_a$ also

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Der Beweis für $n = 2$ ist einfach: Schreiben wir $x := x_1$, $y := x_2$ und definieren

$$a := \bar{x}_a = \frac{x + y}{2} \quad \text{und} \quad b := \frac{x - y}{2}$$

so gilt $x = a + b$ und $y = a - b$ und damit

$$\bar{x}_g^2 = x \cdot y = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \leq a^2 = \bar{x}_a^2.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, so erhalten wir die gesuchte Aussage.
Für $n = 2^k$, $k \geq 0$, kann man die Aussage durch Induktion zeigen. Der Induktionsanfang mit $k = 0$ (also $n = 1$) ist klar, und $k = 1$, also $n = 2$, haben wir eben bewiesen.
Sei jetzt also $k \geq 1$ und nehmen wir an, die Aussage sei für k bereits bewiesen. Wir betrachten jetzt die 2^{k+1} Zahlen $x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}$ und definieren die arithmetischen

Mittelwerte α der ersten und β der zweiten Hälfte dieser Zahlen:

$$\alpha := \frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \qquad \beta := \frac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}$$

Ebenso definieren wir das geometrische Mittel a der ersten und b der zweiten Hälfte:

$$a := \sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_{2^k}} \qquad b := \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \cdots x_{2^{k+1}}}$$

Nach Induktionsvoraussetzung (IV) wissen wir: $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_a &= \frac{x_1 + \cdots + x_{2^k} + x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \\
&= \frac{\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\
&= \frac{\alpha + \beta}{2} \\
&\leq \frac{a + b}{2} && \text{wobei wir die IV für } \alpha \text{ und } \beta \text{ verwenden} \\
&\leq \sqrt{ab} && \text{wobei wir die IV für } n = 2 \text{ verwenden} \\
&= \sqrt{\sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_{2^k}}\ \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \cdots x_{2^{k+1}}}} \\
&= \sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdots x_{2^k} \cdot x_{2^k+1} \cdots x_{2^{k+1}}} \\
&= \bar{x}_g.
\end{aligned}$$

Was aber macht man, wenn n keine Zweierpotenz ist? In diesem Fall fügen wir $m - n$ weitere Zahlen hinzu, wobei m die nächstgrößere Zweierpotenz nach n ist. Wählen wir $x_{n+1} = \cdots = x_m := \bar{x}_a = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, so verändern diese das arithmetische Mittel nicht, und wir können die Ungleichung für m Summanden anwenden.

$$\begin{aligned}
\bar{x}_a &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\
&= \frac{\frac{m}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)}{m} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \frac{m-n}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)}{m} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \left(m - n\right)\bar{x}_a}{m} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_m}{m} \\
&\geq \sqrt[m]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_m} \\
&= \sqrt[m]{x_1 x_2 \cdots x_n \bar{x}_a^{m-n}}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\bar{x}_a^m \geq x_1 x_2 \cdots x_n \bar{x}_a^{m-n} ,$$

also auch

$$\bar{x}_a^n \geq x_1 x_2 \cdots x_n = \bar{x}_g^n$$

und damit

$$\bar{x}_a \geq \bar{x}_g .$$

Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel hat einige interessante Anwendungen im täglichen Leben: Stelle dir zum Beispiel zwei Firmen A und B vor. Firma A stellt Regenschirme her, Firma B betreibt Schwimmbäder. Von beiden Firmen kann man Aktien kaufen. Wenn ein Jahr einen verregneten Sommer hat, so steigt die A-Aktie um 30% und die B-Aktie fällt um 10%. In sonnigen Jahren ist es umgekehrt. Wir nehmen an, dass ein Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von je 50% sonnig oder regnerisch ist.
Jemand der nur Aktie A kauft und einige Jahre behält, sollte auf Dauer ungefähr so viele sonnige wie regnerische Jahre erwischen, er macht im Jahr also im Durchschnitt 8,17% Gewinn, denn $\sqrt{1{,}3 \cdot 0{,}9} \approx 1,0817$. Mit der Aktie von Firma B ist es genauso.
Wenn jetzt eine Person zu Beginn jeden Jahres jeweils genau die gleiche Summe in Aktie A und Aktie B steckt, so vermehrt sich ihr Geld in jedem Jahr (gleichgültig ob Sonne oder Regen) genau um den Faktor $\frac{1}{2} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}3 = 1{,}1$, sie macht also 10% Gewinn. Damit hat sie nicht nur weniger Schwankungen als jemand, der nur A oder B kauft (was bei einer "Sonnen-" und einer "Regen-Firma" nicht weiter verwunderlich ist), sondern macht tatsächlich auch im Durchschnitt mehr Gewinn. Sie bekommt nämlich das arithmetische Mittel der beiden möglichen Renditen, der Entweder-oder-Investor nur das geometrische Mittel.
Natürlich ist die Realität nicht so einfach und es gibt keine Aktie A und Aktie B, die sich immer exakt gegenläufig entwickeln, dennoch tritt der angesprochene Effekt wenn auch abgeschwächt auf, auch wenn sich A und B unabhängig voneinander entwickeln.

Bäume in der Mathematik

von Hartwig Fuchs

Die Berühmte basler Familie Bernoulli hat viele Generationen lang bis in unsere Zeit immer wieder bedeutende Wissenschaftler hervorgebracht - es sind insbesondere die herausragenden Mathematiker des 17. und des 18. Jahrhunderts, die ihren Ruf als Gelehrtenfamilie begründeten.

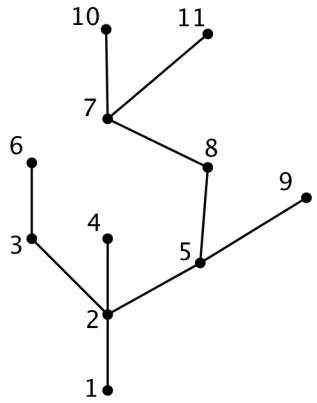


Abbildung 1

Das mag der in Abb. 1 wiedergegebene Teil des Stammbaums der Familie verdeutlichen, der nur Träger des Namens Bernoulli aufführt, die in der Mathematik eine Rolle spielten. 1. Jakob (1598-1634); 2. Nikolaus (1623-1708); 3. Nikolaus (1662-1716); 4. Jakob I (1655-1705); 5. Johann I (1667-1748); 6. Nikolaus I (1687-1759); 7. Nikolaus II (1645-1729); 8. Johann II (1720-1790); 9. Daniel (1700-1762); 10. Johann III (1744-1807); 11. Jakob II (1759-1789).

Solche Bäume benutzen auch die Mathematik, Naturwissenschaften, Informatik,..., um die in einem Sachverhalt bestehenden Zusammenhänge aufzuspüren oder sie in hierarchisch geordnete Kategorien aufzuteilen oder auch nur, um sie zu veranschaulichen.

Was ist nun ein mathematischer Baum?

In der Ebene seien n Punkte (**Knoten**), $n \geq 1$, sowie m Linien (**Kanten**), $m \geq 0$ gegeben, für die gilt:

1. Jede Kante verbindet genau zwei verschiedene Knoten.

2. Es gibt höchstens eine Kante, die zwei Knoten verbindet.
   Die Verbindungen der Knoten sollen zudem die Bedingungen erfüllen:

3. Man kann längs eines Weges W - bestehend aus einer Folge von Knoten und die paarweise verbindenden Kanten - von jedem Knoten P zu jedem anderen Knoten Q, $Q \neq P$, gelangen. Es gibt jedoch keinen Weg W', $W' \neq W$, auf dem man von Q zum Knoten P zurückkehren kann.

Ein Konglomerat aus n Knoten und m Kanten, $n \geq 1$, $m \geq 0$, für das die Bedingungen (1)- (3) gelten, bezeichnet man als einen Baum*. Die aus (1)- (3) ergebenden geometrischen Eigenschaften veranschaulichen wir durch Beisp. 1.

Beispiel 1: Bäume B_n mit n Knoten, $n = 1, 2, \ldots, 6$.

* Arthur Cayley (1821-1895), einer der Mitbegründer der Theorie der Bäume, hat 1857 als Erster das Wort „Tree“ auch als mathematischer Begriff verwendet.

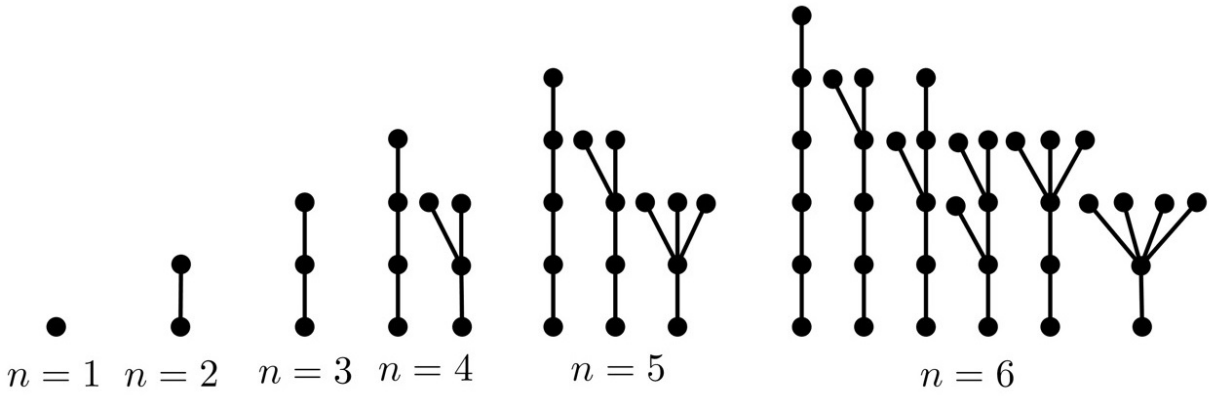


Abbildung 2

Die Bäume B_n, $n = 4, 5, 6$, mit jeweils gleicher Knotenzahl n in Abb. 2 betrachtet man als topologisch verschieden. Was ist damit gemeint? Man denke sich die Kanten eines Baumes B als elastische Bänder. Durch eine beliebige Verzerrung dieser Bänder - mit einhergehender Veränderung der Lage von Knoten und der Form von Kanten - entsteht ein neuer Baum B! Die Bäumen B und B' gelten dann als von gleicher topologischer Struktur. Diese hat man genauer so definiert:

> Zwei Bäume B und B' gleicher Knoten- und gleicher Kantenzahl sind **isomorph** (strukturgleich), wenn man die Knoten von B umkehrbar eindeutig den Knoten von B' so zuordnen kann, dass gilt: Immer wenn zwei Knoten P und Q von B durch eine Kante verbunden sind, dann sind es auch die Punkte P und Q zugeordneten Knoten P' und Q' von B' und umgekehrt.

Beispiel 2: Isomorphe Bäume

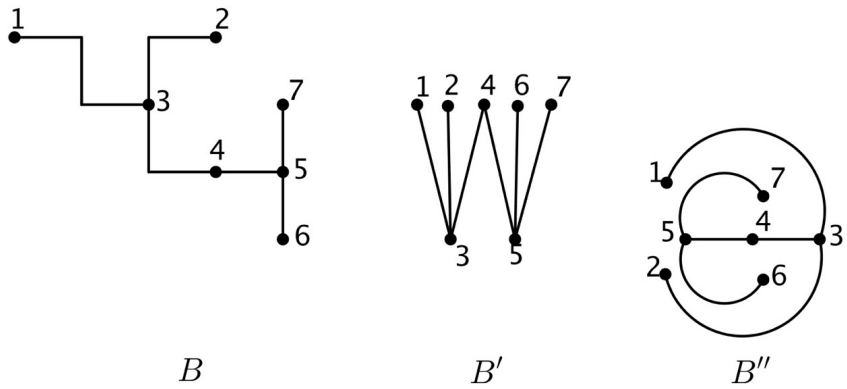


Abbildung 3

Nach Definition sind die in Abb. 2 für $n = 4, 5$ und 6 jeweils angegebene 2,3 und 6 Bäume nicht isomorph. Eine einfache Methode, dies zu überprüfen - die allerdings nur in manchen Fällen zum Ziel führt - besteht: man zähle bei zwei zu vergleichenden Bäumen die Anzahl der von jedem Knoten ausgehenden Kanten. Tatsächlich gilt: Neben den zum jeweiligen n gehörigen Bäumen in Abb. 2 gibt es keine weiteren nicht isomorphe Bäume.

Aufgabe 1: Bestimme möglichst viele nicht isomorphe Bäume mit 7 Knoten.

Bezeichne man mit $A(n)$ die Anzahl der nicht isomorphen Bäume mit n Knoten, dann hat man mit komplexen Methoden der Kombinatorik einen Anfang der Liste der Zahlen $A(n)$ berechnen können:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$A(n)$	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235	551	...

Elementare Eigenschaften von Bäumen

Für zwei verschiedene Knoten P und Q eines Baumes gilt:

(5) Es gibt nur einen Weg von P nach Q.

Nachweis von (5): Nach der für Bäume geltenden Voraussetzung (3) gibt es einen Weg von P nach Q.
Annahme: Es gibt mehr als einen Weg von P nach Q - etwa die beiden Wege $w_1 = PP_1P_2 \cdots P_nQ$ und $w_2 = PQ_1Q_2 \cdots Q_j \cdots Q_mQ$.

1. Fall (Abb. 4.1): Keine zwei der Knoten P_i, Q_j stimmen überein. Dann kann man auf dem Weg w_1 von P nach Q und auf $\overline{w_2} = QQ_m \cdots Q_j \cdots Q_1P$ nach P gelangen - im Widerspruch zur Baum-Bedingung (3).

2. Fall (Abb. 4.2): Zwei der Knoten P_i und Q_j stimmen überein. Da dieser Fall längs der Wege w_1 und w_2 eventuell mehrmals eintreten kann, betrachten wir die Knoten P_i und Q_j mit kleinstem i und kleinstem j. Dann haben wir für die Wege $w_1' = PP_1 \cdots P_{i-1}P_i$ und $\overline{w_2}' = Q_jQ_{j-1} \cdots Q_1P$ mit $P_i = Q_j$ eine dem 1. Fall oben entsprechende Situation - die wie oben auf einen Widerspruch führt.

Somit ist die Annahme falsch - es gilt die Behauptung (5).

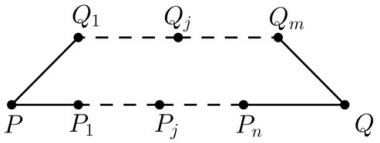


Abbildung 4.1

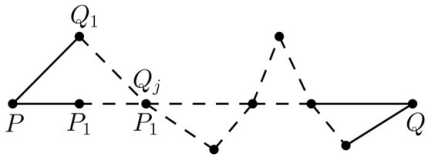


Abbildung 4.2

Ein Knoten P eines Baumes B hat den **Knotengrad** n - kurz: $g(P) = n$ - wenn P mit n anderen Knoten von B durch jeweils eine Kante verbunden ist. Jeder der Bäume in Abb. 3 hat 4 Knoten vom Grad 1, einen Knoten vom Grad 2 und 2 Knoten vom Grad 3.

Aufgabe 2: Gib einen Baum mit 8 Knoten an, bei dem ein Knoten den Grad 7 hat.

Ein Baum B mit n Knoten besitzt

(6) a: stets mindestens zwei Knoten vom Knotengrad 1, wenn $n \geq 2$ ist,
b: höchstens einen Knoten vom Knotengrad $n-1$, wenn $n \geq 3$ ist.

Nachweis von (6a):
Annahme: Es sei B ein Baum mit nur einem Knoten P oder mit keinem Knoten vom Knotengrad $g(P) = 1$.
Hat B nur einen Knoten vom Grad 1, so sei P dieser Knoten; andernfalls sei P ein beliebiger Knoten von B. P sei der Anfangsknoten eines Weges w, bei dem man jeden Knoten von w auf einer Kante verlässt, die zuvor noch nicht in w vorkommt. Sei Q ein beliebiger Knoten auf dem Weg w. Da B keinen „Rundweg“ besitzt, wird der Weg w niemals zu einem Knoten Q gelangen, den w schon vorher passiert hat. Deshalb ist Q verschieden vom Anfangsknoten P. Aus der Annahme folgt dann für jeden Knoten $Q \neq P$, dass $g(Q) \geq 2$ ist. Also kann jeder nach Q führende Weg w von Q aus auf einer noch nicht benutzten Kante zu einem Knoten Q' hin, $Q' \neq P$, fortgesetzt werden. Das aber widerspricht dem Fakt, dass der Baum B nur endlich viele Knoten besitzt. Die Annahme ist somit falsch - es gilt die Aussage (6a).
Nachweis von (6b):
Bei einem Baum B mit n Knoten, $n \geq 3$, kann ein Knoten P mit den übrigen $n-1$ Knoten durch jeweils eine Kante verbunden sein, so dass $g(P) = n-1$ ist. B habe nun mindestens einen Knoten P vom Grad $n-1$.
Annahme: Es gibt einen weiteren Knoten $Q \neq P$ mit $g(Q) = n-1$.
Dann ist Q mit P und auch mit einem Knoten $Q' \neq P$ verbunden. Weil nun P bereits mit Q' verbunden ist, stellt der Weg $QPQ'Q$ einen „Rundweg“ dar - ein Widerspruch zu der Baumbedingung (3). Die Annahme ist daher falsch.

(7) Ein Baum mit n Knoten, $n \geq 1$, besitzt genau $n-1$ Kanten.

Nachweis von (7) durch vollständige Induktion.
Es sei $n = 1$. Dann gilt (7), denn für einen Baum B mit nur einem Knoten folgt aus der Baumbedingung (1), dass B keine - also $n-1 = 0$- Kanten hat. (7) sei nun bewiesen für $n-1$. Dann zeigen wir: (7) gilt für n.
Es sei B ein Baum mit n Knoten. Nach (6a) hat B einen Knoten vom Grad 1. Diesen Knoten entfernen wir samt der zu ihm führenden Kante aus B. So erhalten wir einen neuen Baum B' mit $n-1$ Knoten, der nach Induktionsvoraussetzung $n-2$ Kanten besitzt. Daher hat der Baum B $n-1+1 = n$ Knoten und $n-2+1 = n-1$ Kanten.

Vom Nutzen der Bäume

Bei der Lösung eines komplexen Problems gehen Mathematiker häufig so vor: Sie spalten das Problem auf in lauter - evtl. einfacher zu bearbeitende - Teilfragen. Wenn das zu einer hierarchischen Struktur von Fallunterscheidungen führt, dann kann ein solcher Zerlegungsprozess systematisch geordnet und damit übersichtlich und zugleich anschaulich beschrieben werden, was wir nun an einigen Beispielen

aus verschiedenen mathematischen Gebieten (Logik, Kombinatorik, Stochastik, Spieltheorie, Zahlentheorie) verdeutlichen wollen.

Beispiel 3: Aus der Logik

Dick behauptet - D: Nick lügt. Nick behauptet - N: Rick lügt. Rick behauptet - R: Weder Dick noch Nick lügt. Wer also lügt?

Man kann die Frage leicht durch eine verbale logische Argumentation klären; diese wird transparenter, wenn man sie zusätzlich durch einen Baum veranschaulicht.

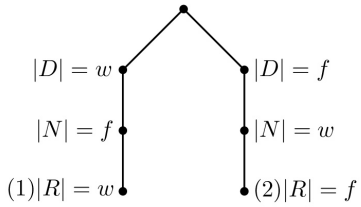


Abbildung 5

In unserem Baum bedeutet die Verbindung etwa der mit $|D| = w$ und $|N| = f$ bezeichneten Knoten durch eine Kante: Aus der wahren Aussage D folgt die falsche Aussage N.

Der Baum besagt dann: Aus den Aussagen D und N folgt entweder (1): die Aussage R ist wahr oder (2): R ist falsch. (1) bedeutet: weder Dick noch Nick lügt - ein Widerspruch. Nach (2) gilt: Mindestens einer von Dick und Nick lügt - was ja zutrifft. Somit folgt mit (2), das Dick und Rick lügen; Nick sagt die Wahrheit.

Beispiel 4: Aus der Zahlentheorie

Es sei $N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1+2+3+\cdots+n}$. Man bestimme alle n, für die N eine ganze Zahl ist.

Lösung

Die bei der Bestimmung der Zahlen N auftretenden Fallunterscheidungen verdeutlichen wir durch einen Baum. Zunächst ist

$$N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{n+1},$$

kurz: $N = \frac{z}{n+1}$, für $n > 1$.

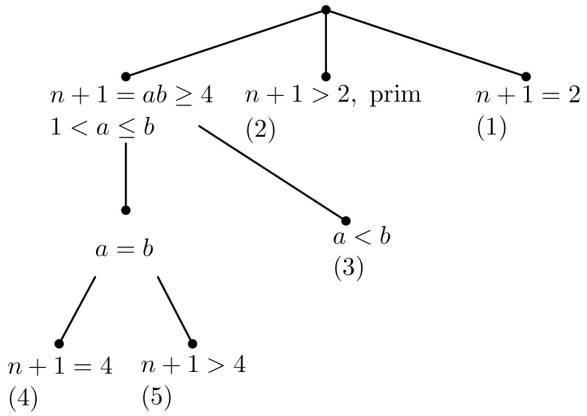


Abbildung 6

(1) $n+1=2 \implies n=1, N=1$.

(2) $n+1>2$, prim $\implies n+1>n-1$, also $n+1$ kein Teiler von z. $\implies$ N nicht ganz.

(3) $n+1=ab\geq 4$ und $1<a\leq b<n-1$ (aus $b>n-1$ folgt $a=1$) $\implies$ a und b sind Faktoren von z, so dass N ganz ist.

(4) $n+1=4 \implies n=3$ und daher ist N=1.

(5) $n+1>4 \implies b\geq 3 \implies b(b-2)>2 \implies b^2>2b+2$. Daraus folgt wegen $n+1=b^2$, dass $n+1>2b+2$, also $n-1>2b>b \implies z$ besitzt die Faktoren b und $2b$. Daher ist $b^2=n+1$ ein Teiler von z und N ist ganz.

Für alle natürlichen Zahlen n außer den ungeraden Primzahlen ist n ganz.

Beispiel 5: Aus der Kombinatorik

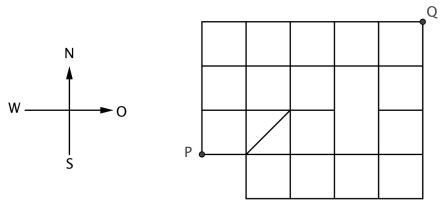


Abbildung 7

Die Figur stellt das Wegenetz eines Dorfes dar; alle Wege verlaufen in West-Ost- oder in Süd-Nord-Richtung mit Ausnahme eines diagonalen Weges. Wie viele kürzeste (gleichlange) Wege vom Punkt P zum Punkt Q gibt es?

Lösung

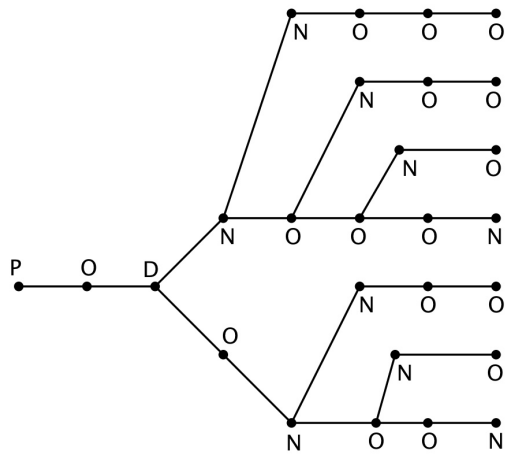


Abbildung 8

Eine Übersicht der gesuchten Wege, bei der kein möglicher Weg „vergessen“ wird, vermittelt ein Baum. Bei der Konstruktion dieses Baumes ist zu beachten: Jeder kürzeste Weg besteht nur aus Teilwegen von West nach Ost, von Süd nach Nord sowie notwendiger Weise aus dem diagonalen Wegstück.

Einen Knoten des Baumes bezeichnen wir mit N, mit O oder mit D wenn er über ein Stück von Süd nach Nord, von West nach Ost oder über das diagonal verlaufende Wegstück erreicht wird.

Der Baum zeigt: es gibt 7 verschiedene kürzeste Wege von P nach Q.

Aufgabe 3: Man beschreibe die Menge aller Tripel (x, y, z) mit $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$ durch einen Baum.

Beispiel 6: Aus der Spieltheorie

Bei einem Würfelspiel mit drei Teilnehmern gibt es in jeder Runde genau einem Sieger, der dann einen Punkt erhält. Gewonnen hat, wer zuerst eine bestimmte vorgegebene Punktzahl erreicht. Für die Spieler A, B und C gilt nach einer gewissen Anzahl von Runden: A fehlt ein Punkt, B fehlen zwei Punkte und C fehlen drei Punkte zum Spielgewinn.

Welche Spielverläufe sind nach dem von A, B und C erreichten Spielstand - er sei S genannt - möglich und wie viele Runden sind dabei jeweils höchstens noch zu spielen?

Wir bestimmen die möglichen Spielverläufe mit Hilfe eines Baumes.

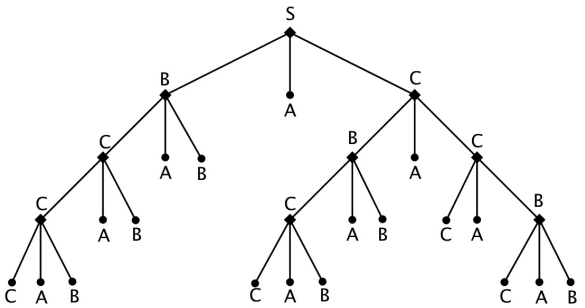


Abbildung 9

Jeder Weg w des Baumes vom Knoten S zu einem Knoten • vom Grad 1 stellt einen nach S beginnenden möglichen Spielverlauf dar, wobei die mit A, B oder C bezeichneten Knoten die möglichen Gewinner der im Spielverlauf aufeinander folgenden Runden angeben.

Der Baum zeigt: Es gibt nach S genau 19 mögliche Spielverläufe, von denen jeder nach höchstens 4 Runden beendet ist.

Beispiel 7: Aus der Stochastik

Ein Spiel um Geld: In einer Schale liegen verdeckt drei schwarze und 2 weiße Kugeln; ein Spieler nimmt nacheinander jeweils eine Kugel, ohne sie wieder zurückzulegen; bei einer schwarzen Kugel verliert er einen Euro- kurz: $G = -1$ und er gewinnt einen Euro - kurz: $G = 1$ - wenn die Kugel weiß ist; der Spieler darf das Spiel jederzeit nach dem Ziehen einer Kugel beenden.

Das Spiel scheint ungünstig für den Spieler. Bemerkenswerter Weise gibt es jedoch eine diesem Anschein widersprechende Spieltaktik: bisherige Spielzüge im Verlust - weiterspielen; im anderen Fall abbrechen.

Darstellung der möglichen Spiele bei dieser Taktik durch einen Baum:

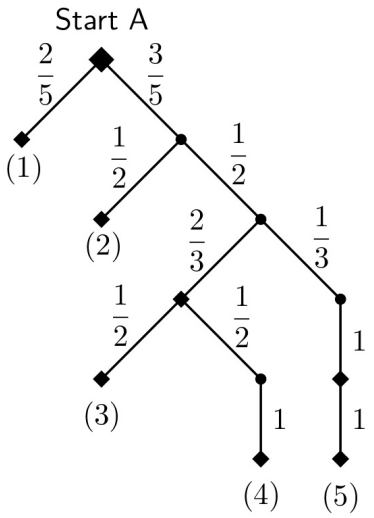


Abbildung 10

Erläuterung: Rautenförmiger Knoten ♦: es wird eine weiße Kugel *w* gezogen; schwarzer Knoten ·: es wird eine schwarze Kugel *s* gezogen. Die Zahlen an der Kanten geben die Wahrscheinlichkeit an, mit der die entsprechend farbige Kugel gezogen wird.
Es gibt 5 mögliche Spielabläufe. (1) Für das Spiel *Aw* gilt: $G = 1$ mit $P(G = 1) = \frac{2}{5}$. (2) und (3): Die beiden möglichen Spiele *Asw* mit $P(G = 0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$ und *Assww* mit $P(G = 0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ sind kostenlos. (4) und (5): Die beiden verleibenden möglichen Spiele führen zu einem Verlust von jeweils 1 Euro.

Aus (1),(2) und (3) folgt daher $P(G = -1) = 1 - \frac{2}{5} - (\frac{3}{10} + \frac{1}{10}) = \frac{1}{5}$. Bei 5 Spielen wird man somit im stochastischen Mittel bei zwei Spielen einen Gewinn und bei 1 Spiel einen Verlust machen.

Der Stochastiker formuliert das so: Der bei jedem von 5 Spielen zu erwartende Wert $E(G)$ von G ist $\frac{1}{5}$ Euro wegen $E(G) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot (-1)$ Euro.

Die Probleme in den Beispielen 3-7 lassen sich leicht in hierarchisch ordenbare System von Teilproblemen aufspalten. Daher ist es auch ohne Schwierigkeiten möglich, entsprechende Bäume zu konstruieren, welche diese Zerlegungsstrukturen transparent machen. Im nachfolgenden Beispiel 8 dagegen ist die Konstruktion eines Baumes selbst das Problem. Damit betreten wir ein Gebiet der Baum-Theorie, in dem es darum geht, geeignete Bäume zu erzeugen, die etwa zur Lösung bestimmter Anwendungsaufgaben führen sollen.

Beispiel 8: Aus der Baum-Theorie

In einem Waldgebiet wurden vier Plattformen *A*,*B*,*C* und *D* zur Brandbeobachtung in den Eckpunkten eines Quadrats *Q* der Seitenlängen 10 km errichtet. Diese Stationen sollen verbunden werden durch ein Wegenetz *W* aus geraden Strecken - die sich auch schneiden dürfen. Wie ist *W* anzulegen, damit seine Gesamtlänge *w* minimal ist?

Lösung

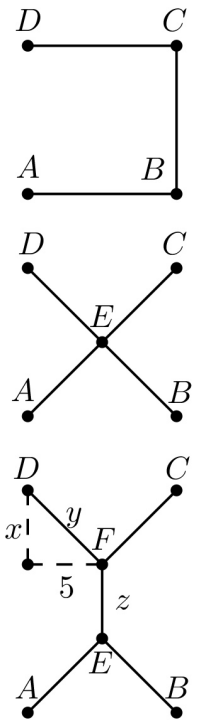


Abbildung 11

1. Vorschlag: Der Weg sei $W_1 = ABCD$, dargestellt durch einen Baum mit 4 Knoten; W_1 besitzt eine Länge von $w_1 = 30$ km.

2. Vorschlag: Das Wegenetz W_2 mit dem zugehörigen Baum mit 5 Knoten A, B, C, D, E bestehe aus den Diagonalen AEC und BED des Quadrats Q. Wegen $|AEC| = |BED| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$ gilt: W_2 hat die Gesamtlänge $w_2 = 2\sqrt{200} < w_1$ km.

3. Das Wegenetz W_3 sei durch den Baum mit den 6 Knoten A, B, C, D, E und F dargestellt. Mit den Bezeichnungen der Figur gilt für die Gesamtlänge w_3 des Wegenetzes W_3: $w_3 = 4y + z$, wobei $y = \sqrt{x^2 + 25}$ und $z = 10 - 2x$ ist, so dass $w_3 = 4\sqrt{x^2 + 25} + 10 - 2x$ ist. Aus der notwendigen Bedingung $w_3' = 0$ für ein kleinstes w_3 folgt:

$$w_3' = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 = 0$$

also $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $z = 10 - \frac{10}{\sqrt{3}}$. Mithin ist $w_3 = 10 + 10\sqrt{3} < w_2$ km. Da nun w_3' bei $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$ sein Vorzeichen von - zu + ändert, stellt w_3 das Wegesystem mit der kleinsten Gesamtlänge w_3 dar.

Die in Bsp.8 nacheinander untersuchten Bäume W_1, W_2, W_3 müssen alle eine grundlegende Eigenschaft aufweisen: Die vier gegebene Punkte gehören zu den Knoten von W_1, W_2, W_3.

Man sagt: Sind in der Ebene n Punkte, $n \geq 1$ gegeben, dann heißt ein Baum B **aufspannend** - in Hinsicht auf diese Punkte - wenn jeder Punkt ein Knoten von B ist. Die Anzahl der Kanten von B ist dann $\geq n - 1$ wegen (7). Danach sind die Bäume W_1, W_2 und W_3 mit 3, mit 4 bzw. mit 5 Kanten in Abb. 11 aufspannende Bäume für die Punkte A, B, C und D.

Aufgabe 4:

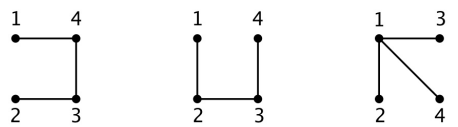


Abbildung 11a

Bestimme alle 16 aufspannenden Bäume mit 3 Kanten für die mit 1,2,3,4 bezeichneten Eckpunkte eines Quadrats. Hinweise: Da die vier Punkte unterschieden werden, sind auch Bäume wie die in der Abbildung 11a als verschieden zu zählen.

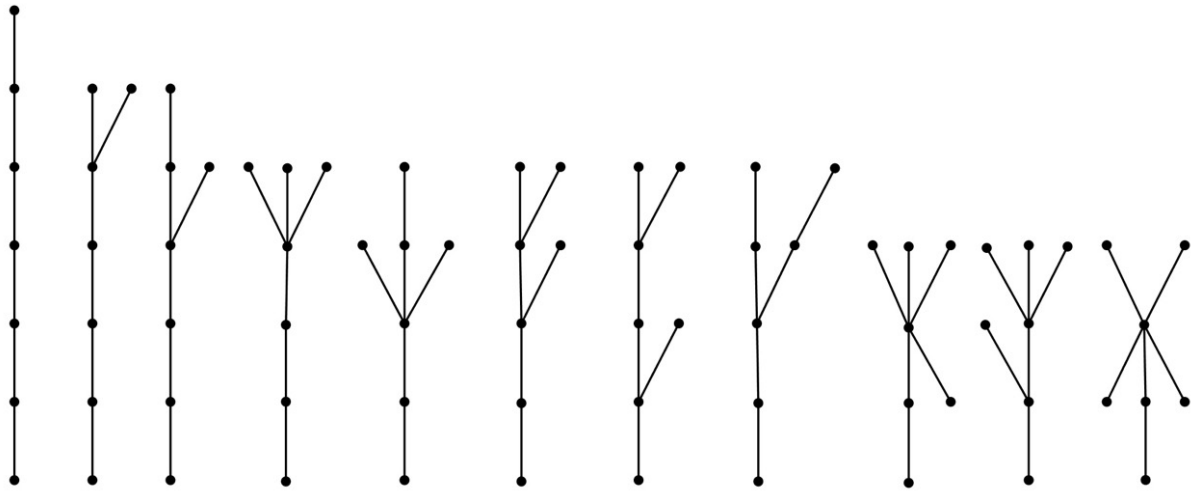
Die Kanten eines Baumes können sich kreuzen; solche Kreuzungspunkte gelten jedoch nicht als Knoten der Bäume.
Die Anzahl der aufspannenden Bäume für n Punkte der Ebene wächst mit wachsendem n stark an. Das lehrt der Satz von Cayley**, der nur den einfachsten Fall der aufspannenden Bäume mit $n-1$ Kanten betrachtet:

(8) In der Ebene seien n mit $1, 2, 3, \ldots, n$ bezeichnete Punkte gegeben. Dann gibt es n^{n-2} verschiedene Möglichkeiten, aus den n Punkten einen aufspannenden Baum mit $n-1$ Kanten zu bilden.

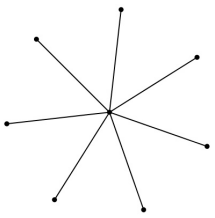
Aufspannende Bäume mit mindestens $n-1$ Kanten für n Punkte, bei denen die Gesamtlänge der Kanten minimal ist, heißen **Steiner-Bäume*****. Der Baum W_3 in Abb. 11 ist somit ein Steiner-Baum für die 4 Punkte A, B, C und D.
Aufspannende Bäume und Steiner-Bäume sind nur zwei der vielen Baumtypen, welche die Baum-Theorie untersucht - aber das ist ein weites Gebiet, in das wir hier nicht weiter eindringen können.

Lösungen der Aufgaben 1-4

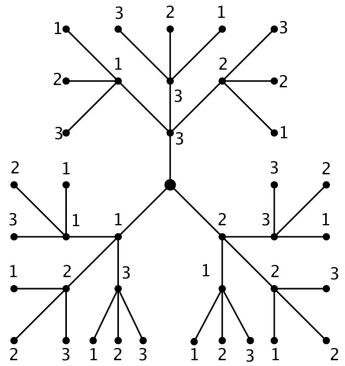
Aufgabe 1



Aufgabe 2

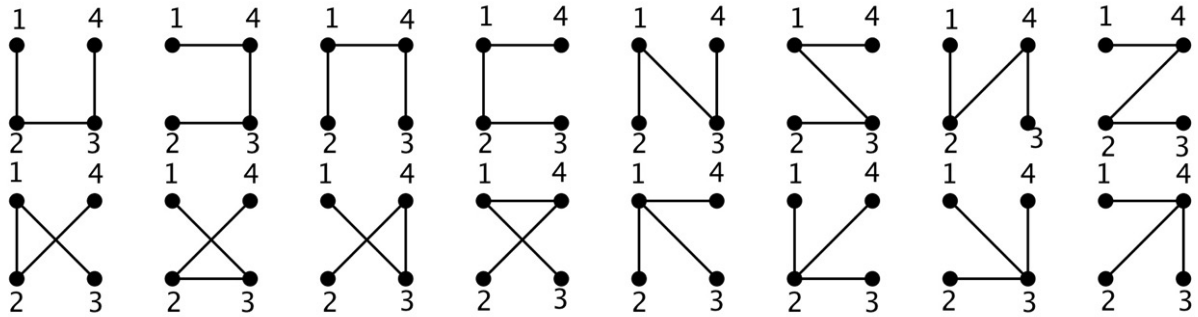


Aufgabe 3



** A. Cayley: A theorem on trees; Quart. J. Math 23 (1889).
*** Jakob Steiner (1796-1863), schweizer Geometer.

Aufgabe 4



Die 12 ersten Bäume sind nach Definition isomorph (vgl. Abb. 2) während sie als aufspannende Bäume verschieden sind; ebenso sind die vier letzten Bäume isomorph.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 129

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Katharina Beck 41, Chantel Belz 6, Julia-Michelle Butter 12, Tom Erkens 4, Lars Schall 8, Fabian Thater 7;
Kl. 6: Linus Kemmeter 21, Nils Koch 19;
Kl. 7: Lukas Born 36, Lea Daum 33, Paul Schall 36, Jonas Schneider 33, Trevor Schöller 25, Victoria Strunk 29;
Kl. 9: Torben Bürger 40, Virginia Fox 9,5, Maximilian Hauck 92,5,Sarah Kästner 12;
Kl. 13: Katharina Rößler 28.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 13: Nils Werner 12.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Privates Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg:
Kl. 6: Tobit Roth 16;
Kl. 8: Torben Hertrampf 8;
Kl. 11: Annika Bünnagel 11;
Kl. 12: Frauke Stoll 8.

Duisburg, FHG: Kl. 7: Lena Hirtz 2.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Philip Memmer 2;
Kl. 7: Noah Böhm 3, Jonah Hochbaum 4, Olivia Stachow 6, Simon Taubert 7;
Kl. 8: Tim Kruse 6;

Kl. 13: Adriana Stenger 15, Marcel Wittmann 20.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule:
Kl. 11: Patrick Riebe 19.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Aleksandra Herbst 58; **Kl. 9:** Tobias Jedich 22,5.

Friedrichsdorf,Main/Taunus International School
Kl. 3: Alice Hogan 10, Doris Resch 6, Om Paranjape 6, Grace Yu 6;
Kl. 4: Jule Beinker 10, Ben Bergmann 10, Alessia Conte 4, Maya Dominguez 6, Tim Pilger 10;
Kl. 5: Olivier de Vogel 4, Lina Decker 16, Ana Flores 16, Borja Garcia Serrar 13, Megan Song 13.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Maximilian Göbel 65.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule
Kl. 6: Jannik Hastedt 2, Justin Sehl 9, Johannes Sabel 6;
Kl. 7: David Baldus 7;
Kl. 8: Yosra el Mahjoub 30;
Kl. 9: Dominik Horstkötter 18;
Kl. 10: Melanie Schuy 26;
Kl. 11: David Storzer 64.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 11: Melina Mayle 55.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:
Kl. 8: Beatrice Popescu 10.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 9: Dennis Mayle 70,5.

Linz, Martinus Gymnasium:
Kl. 6: Simon Waldek 19.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium: Kl. 5: Gregor Salaru 87.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Anouk Sturm 4, Johanna Trees 9, Franziska Weber 5;
Kl. 6: Eugene Koch 13,5, Lilja Loibl 2, Kenan Milanovic 1,5;
Kl. 7: Yara Mattner 10, Timo Neimke 6;
Kl. 8: Tekla Beridze 10;
Kl. 10: Ivan Khomutovski 20;
Kl. 11: Marc Hoffmann 11;
Kl. 12: Melanie Weibrich 31,5.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:
Kl. 12: Silas Rathke 45,5.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jonathan Friedel 7,5, Daniel Roussev 9, Esther Schmeling 26;
Kl. 6: Max Budäus 18;
Kl. 7: Kathrin Bormann 15, Felix Halas 13, Paulina Herber 17, Alexandra Hünlein 15, Josephine Kaßner 20, Paul Keller 11;
Kl. 8: Annika Borrmann 15, Sönke Schneider 121, Arne Witt 9;
Kl. 9: Lennard Freud 31;
Kl. E1: Kristin Teichert 26, Jan Wabnig 36;

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 7: Miriam Büttner 56.

Wien, Sir Karl Popper Schule: Kl. 5: Lorenz Hübel 38.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 7: Raphael Gaedtke 33,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 6: Mareike Bühler 21.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr.-Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Emily Searle-White
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 37 | Heft 131 | September 2017

Inhalt

Einladung zur Monoid-Feier 2017 . . . 3
S. Fröhlich, M. Kraus: Ein weiterer einfacher Beweis . . . 3
H. Fuchs: Lösung ohne Worte . . . 5
H. Fuchs: Präsidenten-Wahl in Laputa . . . 5
H. Fuchs: Monoidale Knobelei . . . 7
H. Fuchs: Die besondere Aufgabe – Hänsel und Gretel . . . 7
H. Sewerin: „Das Denkerchen“ . . . 12
Die Aufgabe für den Computer-Fan . . . 13
H. -J.S.: Hättest Du es gewusst? . . . 17
Mathematische Entdeckungen . . . 17
Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 130 . . . 19
Neue Mathespielereien . . . 22
Neue Aufgaben . . . 23
Gelöste Aufgaben aus Monoid 130 . . . 24
L. Biroth: Arithmetisches und geometrisches Mittel . . . 27
H. Fuchs: Bäume in der Mathematik . . . 30
Rubrik der Löser und Löserinnen . . . 41
Impressum . . . 44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid