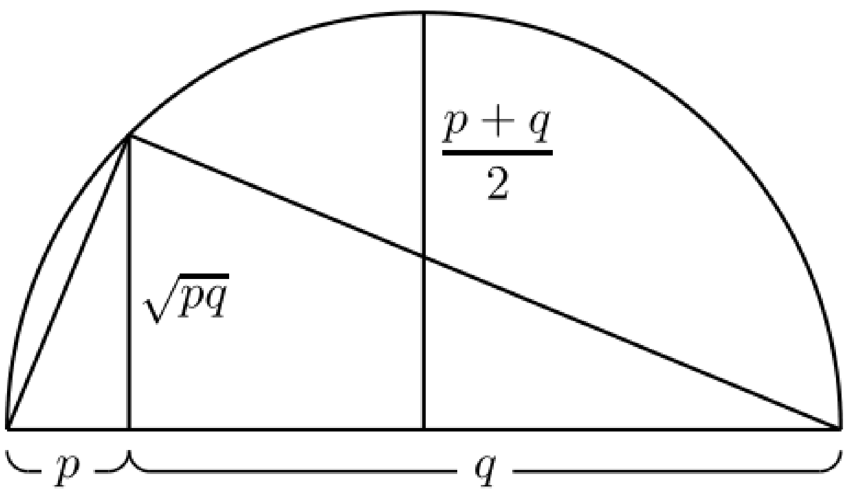
Jahrgang 37 Heft 132 Dezember 2017

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.02.2018.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Aufgaben zum Neuen Jahr
von Hartwig Fuchs

Kaum glaublich aber wahr

Gegeben seien 2018 beliebige verschiedene positive ganze Zahlen, von denen keine ein Vielfaches von 2018 ist.
Dann ist jedoch die Summe einiger dieser Zahlen ein Vielfaches von 2018. Zeige dies.

Eine Zahlenfolge

Es sei $a(1), a(2), \ldots$ eine Zahlenfolge mit

(1) $a(1) = 1009$ und $a(n) = \frac{1}{n^2-1}(a(1) + a(2) + \cdots + a(n-1))$ für $n = 2, 3, \ldots$.

Wie groß ist $a(2018)$?

2017^{2018}

Wie heißen die letzten zwei Ziffern von 2017^{2018}?

Größen-Vergleich

Welche Zahl ist die Größere: 2018^{2018} oder $2017^{2018} + 2018^{2017}$?

Jahreszahlen-Aufgabe

Jede positive ganze Zahl n hat ein Vielfaches, dessen Darstellung im Dezimalsystem mit der Ziffernfolge $z = 20172018$ beginnt. Zeige dies.

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 28.

Was uns so über den Weg gelaufen ist
Bemerkenswerte Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl
gefunden von H. Fuchs

$0,\overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ bezeichnet eine positive rationale Zahl, deren Dezimaldarstellung $0, a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ eine nicht abbrechende Wiederholung der Zifferngruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$, $n \geq 1$ ist. Dann gilt:

$$\frac{1}{98901} = 0,\overline{00001011112122223233334344445455556566667677778788889 8}.$$

Trugschluss
Wundersame Geldvermehrung
von Hartwig Fuchs

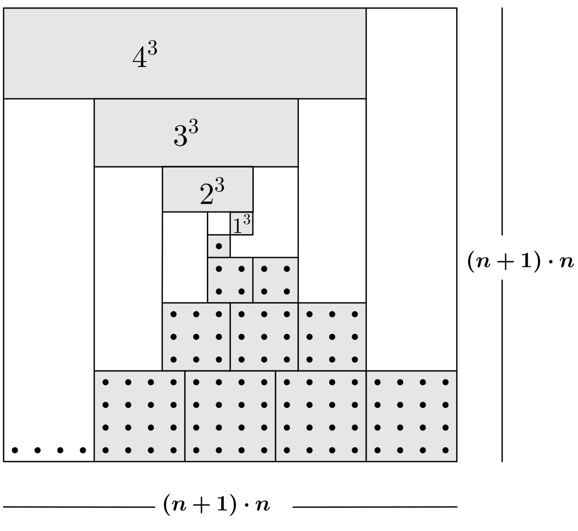
Sechs Schüler wollen einen Fußball kaufen, der 28,50 € kosten soll; dafür zahlt jeder Schüler 4,75 € in die gemeinsame Kasse ein. Kaum haben die Schüler den Ball erworben und das Sportgeschäft verlassen, da bemerkt der Verkäufer, dass er irrtümlich den Preis um 4,50€ zu hoch angesetzt hat. Also eilt er den Schülern hinterher, um ihnen einen Teil des zuviel gezahlten Betrags, nämlich 1,50 €, zurückzugeben, während er 3 € für sich behält, gewissermaßen als Belohnung für seine läuferische Leistung. Nachdem die Schüler die 1,50 € gerecht unter sich aufgeteilt haben, hat also jeder von ihnen 4,50 € für den Ball bezahlt.
Nun gilt: $6 \cdot 4{,}50 = 27$ €; mit den 3 €, die der Verkäufer den Schülern nicht zurückgegeben hat, sind das insgesamt 30 €, also 1,50 € mehr, als ursprünglich vorhanden waren!
Wo liegt der Trugschluss?

Lösung

Man sollte so rechnen: $28,50-(1,50+3,00) = 28,5-1,50-3,00$ €. Tatsächlich wurde gerechnet: $28,50-(1,50+3,00) = 28,5-1,50+3,00$ € und das ist ein Verstoß gegen eine Klammer-Regel, wodurch der Trugschluss entsteht.

Beweis ohne Worte
gefunden von Hartwig Fuchs

$$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = ((n+1)n)^2$$

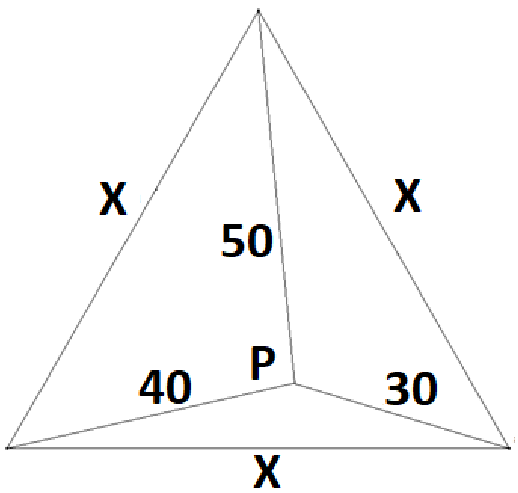


Gefunden von H.F. in Elementa 7152, 1992.

Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks aus den Abständen eines inneren Punktes von den der Ecken

von Roland Schröder

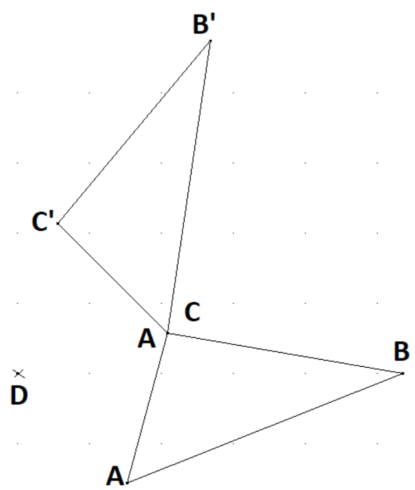
Auf `www.matheraetsel.de/geometrie-html` finden wir unter der Überschrift *Dreieck1* folgende Aufgabe:



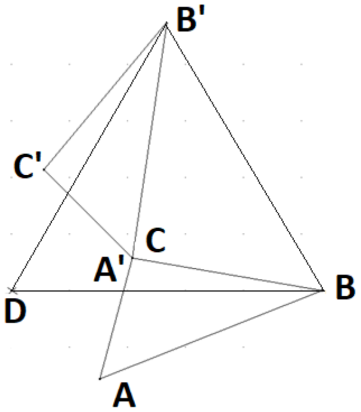
Die Abstände eines inneren Punktes P von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks seien 30, 40 und 50. Bestimme die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks.

Unter der Überschrift „Dreieck 2" finden wir zwei Lösungswege. Der erste stützt sich auf die Heronformel, welche aus der Seitenlänge den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmt, und schließt mit der Lösung $x = 10\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$. Die zweite stützt sich auf eine nahezu unbekannte Volumenformel für dreieckige Pyramiden eines mittelalterlichen Mathematikers namens Tartaglia und schließt mit der Lösung $x = 10\sqrt{15 + 12\sqrt{13}}$. Mit elementarer Algebra lässt sich zeigen, dass nicht beide Lösungen richtig sein können. Aber ist wenigstens eine richtig und wenn ja, welche? Zur Beantwortung dieser Frage wird ein dritter Lösungsweg beschritten:

Ausgangspunkt ist folgende vorgeschaltete Aufgabe:



Gegeben sind ein beliebiges Dreieck ABC und ein Punkt D, der sowohl von A als auch von C den Abstand $|AC|$ hat. Drehe das Dreieck ABC im Winkel von $60°$ um D. Es entsteht das Bilddreieck $A'B'C'$ mit $A' = C$. Begründe, dass das Dreieck DBB' gleichseitig ist und dass die Seitenlängen des Dreiecks ABC genau die Längen der Strecken DC, BC und $B'C$ sind.



Nebenstehende Skizze verdeutlicht: DBB' ist gleichseitig, weil eine Drehung um $60°$ um den Punkt D den Punkt B auf B' abbildet, und der innere Punkt C hat von den Ecken die Abstände $|AB| = |CB'|$, $|BC|$ und $|CA| = |CD|$, also genau die Seitenlängen des Ausgangsdreiecks ABC.

Damit ist die gesuchte Seitenlänge konstruierbar: Man konstruiert ein Dreieck ABC aus den drei gegebenen Abständen und dann den Drehpunkt D, der sowohl von A als auch von C den Abstand $|AC|$ hat, außerhalb des Dreiecks ABC. Dann ist DB eine Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks. Die Länge der Strecke DB kann berechnet werden, wenn man $C(0|0)$ wählt und die Länge $a = CA$ auf der x-Achse abträgt.

Die Koordinaten des dritten Punktes $B(u|v)$ berechnen sich dann aus den Gleichungen $b = \sqrt{(u-a)^2 + v^2}$ und $c = \sqrt{u^2 + v^2}$, nämlich $u = \sqrt{\frac{(a^2-b^2+c^2)}{2}}$ und $v = \sqrt{\frac{-a^2+2a^2(b^2+c^2)-b^4+c^2(2b^2-c^2)}{2}}$. Der Punkt D hat die Koordinaten $D(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}\sqrt{3})$. Dann ist die Länge der Strecke BD

$$x = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} \cdot \sqrt{-a^4 + 2a^2(b^2+c^2) - b^4 + c^2(2b^2-c^2)} + a^2 + b^2 + c^2)}{2}}.$$

Für rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b sowie der Hypotenuse c (wenn also die gegebenen Abstände von den Ecken ein rechtwinkliges Dreieck bilden) ergibt sich $x = \sqrt{c^2 + ab\sqrt{3}}$. Demnach ist die nach Heron gefundene Lösung richtig.

Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

von Laura Biroth und Steffen Fröhlich

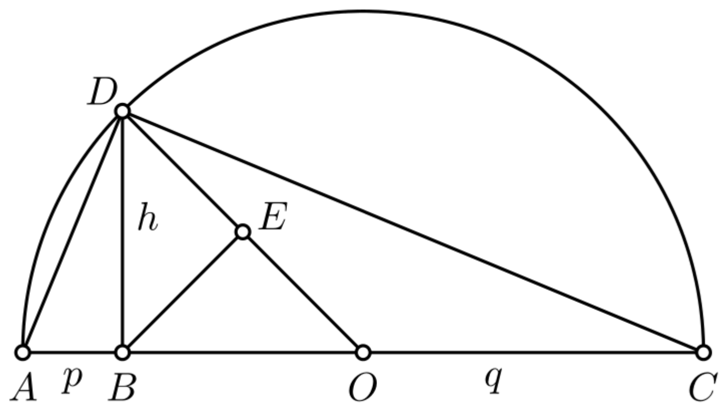
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Für nichtnegative, reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, die Laura Biroth in ihrem Artikel im Heft MONOID 131 auf rein analytische Art und Weise hergeleitet hat, lässt sich im Fall $n = 2$ auch durch eine einfache geometrische Überlegung verstehen. Für

positive Zahlen beweisen wir sogar allgemeiner:*
Für alle reellen Zahlen $p, q > 0$ gelten die Ungleichungen

$$\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}\,.$$

Der Quotient links heißt harmonisches Mittel der Zahlen p und q.
Beweis: In einem Halbkreis mit Mittelpunkt O und Durchmesser $p+q$ sei ein Dreieck $\triangle\, ACD$ einbeschrieben:



Dabei bedeuten $p = |AB|$ und $q = |BC|$.

1. Die Höhe $h = |BD| = \sqrt{pq}$ ist kleiner, höchstens gleich dem Radius $|DO|$ des Halbkreises, also
$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}\,, \qquad (*)$$
und das ist bereits die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel.

2. Es bedeute nun E die orthogonale Projektion von B auf den Radius OD des Halbkreises. Da die Dreiecke $\triangle\, BOD$ und $\triangle\, BED$ ähnlich sind (zwei gleiche Winkel $\sphericalangle BED = \sphericalangle DBO$ und $\sphericalangle BDE = \sphericalangle BDO$), gilt
$$\frac{|DE|}{h} = \frac{h}{|DO|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|DE|}{\sqrt{pq}} = \frac{\sqrt{pq}}{\frac{p+q}{2}}$$
und daher nach Umstellen
$$|DE| = \frac{\sqrt{pq}\cdot\sqrt{pq}}{\frac{p+q}{2}} = \frac{2pq}{p+q} = \frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,.$$

3. Da in dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle\, BED$ gilt $|DE| \leq |BD|$ (die Hypothenuse ist die längste Seite im Dreieck), ist mit $(*)$
$$\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \sqrt{pq}\,, \qquad (**)$$

* zum Beispiel in Manfrino, R.B./Ortega, J.A.G./Delgado, R.V.: Inequalities. A mathematical olympiad approach, S.7–8

und das ist die Ungleichung zwischen dem harmonischen und dem geometrischen Mittel.

Die Behauptung folgt aus $(*)$ und $(**)$. $\square$

Wir wollen die bewiesenen Ungleichungen zur Lösung der folgenden Aufgabe anwenden (siehe Manfrino, R.B., Ortega, J.A.G., Delgado, R.V.: Inequalities. A mathematical olympiad approach., Aufgabe 1.55).

Für alle $x, y, z > 0$ gilt

$$\frac{2xy}{x+y} + \frac{2yz}{y+z} + \frac{2zx}{z+x} \leq x + y + z.$$

Beweis:

Wir gehen wie folgt vor:

$$\frac{2xy}{x+y} + \frac{2yz}{y+z} + \frac{2zx}{z+x} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} + \frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}$$

$$\overset{(**)}{\leq} \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \overset{(*)}{\leq} \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} = x + y + z,$$

was zu zeigen war. q.e.d.

Präsidenten-Wahl in Laputa, Teil II

von H. Fuchs

In unserer ersten Mitteilung über die Präsidentenwahl in der Gelehrtenrepublik Laputa (siehe Monoid 131, September 2017) haben wir berichtet, dass jeder Kandidat für das höchste Amt im Staat eine schriftliche Prüfung zu bestehen hatte. Dabei waren drei Aufgaben im Wesentlichen allein durch logische Argumentation zu lösen. Von Präsident Laput-Lazuli II sind die drei Prüfungsaufgaben, die er gelöst hat, überliefert – hier sind sie:

Aufgabe 1

In einer Schale liegen 10 Zettel, von denen jeder mit einer der Zahlen 1 bis 10 so beschriftet ist, dass keine zwei Zettel die gleiche Zahl aufweisen. Man entnimmt nun der Schale zwei Zettel und legt dafür einen neuen Zettel in die Schale, der mit der Summe derjenigen Zahlen beschriftet ist, die die beiden vorher gewählten Zettel aufweisen. Dies wiederholt man so lange, bis nur noch ein Zettel in der Schale liegt. Mit welcher Zahl ist der letzte Zettel beschriftet?

Aufgabe 2

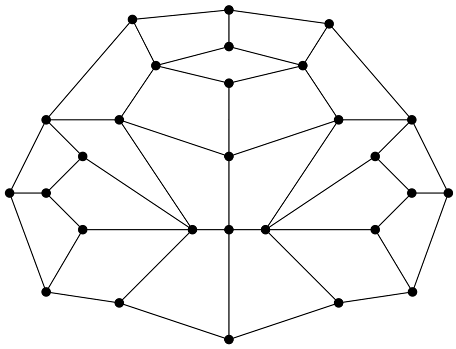
Zwei Kinder, sie heißen Clio und Dido, spielen um Murmeln, 21 gelbe und 21 schwarze Glaskugeln in einem Kästchen. Die Spielregel lautet (formuliert für Clio): Clio nimmt ohne hinzuschauen zwei Kugeln aus dem Kästchen:

(a) sind beide Kugeln von gleicher Farbe, dann legt Dido eine gelbe Kugel in das Kästchen;

(b) wenn die Kugeln verschieden farbig sind, dann legt Dido eine schwarze Murmel in das Kästchen. Das Spiel ist zu Ende, wenn sich nur noch gleich farbige Kugeln im Kästchen befinden.

Die Kugeln, die am Spielbeginn und nach einem Spielzug (a) oder (b) im Kästchen sind, heißen ein Spielstand. Gibt es dann einen Spielstand nur mit gelben Kugeln?

Aufgabe 3



Die Figur stellt den Grundriss des Wegesystems eines Parks dar; an den mit Punkten bezeichneten Stellen sind Statuen aufgestellt. Gibt es einen Weg durch den Park, bei dem man an jeder Statue ein Mal, keinesfalls jedoch mehrmals vorbeikommt?

Laput-Lazuli II hat eine strukturelle Eigentümlichkeit, die alle drei Aufgaben aufweisen – nämlich die in (I1), (I2) und (I3) beschriebene Unveränderlichkeit (Invarianz) einer bestimmten Größe oder Eigenschaft beim Durchlaufen der verschiedenen Problemstadien – als entscheidendes Argument zur Herleitung seiner Lösung benutzt.

Lösung der Aufgabe 1

Am Anfang haben die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 10$, mit denen die 10 Zettel beschriftet sind, die Summe $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$.

(I1) Nach jeder Entnahme zweier Zettel mit den Zahlen a und b und dem Zurücklegen eines Zettels mit der Zahl $a + b$ ist die Summe der Zahlen auf den dann in der Schale liegenden Zettel unverändert $S = 55$.

Da das auch gilt, wenn sich am Ende nur noch ein Zettel in der Schale befindet, ist dieser letzte Zettel mit der Zahl 55 beschriftet.

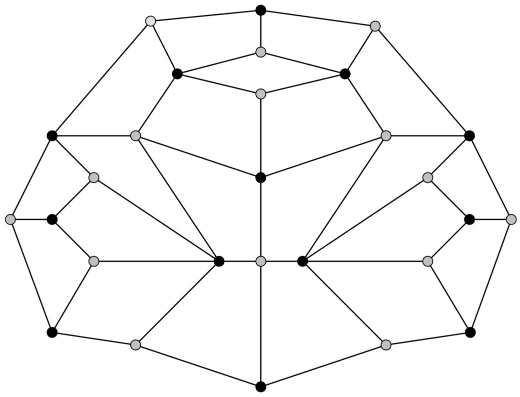
Lösung der Aufgabe 2

Bei einem beliebigen Spielstand sei A die Anzahl der schwarzen Kugeln. Wie verändert sich A beim Übergang zum nächsten Spielstand? Fall (a): Sind beide entnommenen Kugeln gelb, dann ist die Anzahl der schwarzen Kugeln beim nächsten Spielstand unverändert A; sind sie dagegen beide Schwarz, so ist $A - 2$ die Anzahl der schwarzen Kugeln beim nächsten Spielstand. Fall (b): Sind die beiden entnommenen Kugeln verschiedenfarbig, dann ist unverändert A die Anzahl der schwarzen Kugeln beim nächsten Spielstand.
Weil nun am Anfang des Spiels (erster Spielstand) $A = 21$ ist, gilt:

(I2) Bei jedem Spielstand ist die Anzahl A der schwarzen Kugeln in der Schale eine ungerade Zahl.

Wegen der Spielregeln (a) und (b) nimmt die Anzahl der Kugeln von Spielstand zu Spielstand um 1 ab. Es gibt daher nur 21 verschiedene Spielstände und für jeden von ihnen gilt $A \neq 0$ wegen (I2). Es gibt also keinen Spielstand mit nur gelben Kugeln.

Lösung der Aufgabe 3



Man färbe die 28 Punkte der Figur blau oder rot nach der Vorschrift: Zwei durch eine Strecke verbundene Punkte werden mit verschiedenen Farben coloriert.

Es zeigt sich: wie auch immer der Startpunkt und seine Farbe gewählt werden, stets ergibt sich zwangsläufig eine Färbung der 28 Punkte, die die Colorierungsbedingung erfüllt. Ferner gilt:

(I3) Wie auch immer die Colorierung vorgenommen wird, stets sind 15 Punkte in einer anderen Farbe gefärbt als die übrigen 13 Punkte.

Annahme: Es gibt Wege in der Figur, die jeden Punkt genau ein Mal passieren.

Wenn es 15 Rote Punkte gibt, dann muss jeder Weg, der durch die 15 roten Punkte verläuft, wegen der Colorierungsvorschrift durch 14 blaue Punkte führen - im Widerspruch zu (I3). Ebenso ergibt sich ein Widerspruch, wenn es in der Figur 15 blaue Punkte gibt. Aus diesen zwei Widersprüchen folgt: Die Annahme ist falsch. Dann aber gibt es auch keinen Weg durch den Park, bei dem man an jeder Statue genau ein Mal vorbeikommt.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Ein undurchsichtiges Gefäß enthält am Anfang 100 weiße und 100 schwarze Kugeln. Ina und Lea nehmen nacheinander immer drei Kugeln zufällig heraus und ersetzen sie aus einem Vorrat jeweils nach der folgenden Spielregel ($\bullet$ = schwarz, $\circ$ = weiß):

	Entnommen	$\rightarrow$	ersetzt durch
1	●●●	$\rightarrow$	●
2	●●○	$\rightarrow$	●○
3	●○○	$\rightarrow$	○○
4	○○○	$\rightarrow$	●○

Das Spiel endet, wenn ein Rest von weniger als 3 Kugeln in dem Gefäß verbleibt. Ina und Lea streiten sich während des Spiels darüber, welche der Möglichkeiten

1. $2s$ ●●
2. $2w$ ○○
3. $1s, 1w$ ●○
4. $1s$ ●
5. $1w$ ○

für den Rest tatsächlich eintreten können. Welcher Rest kann schließlich in dem Gefäß verbleiben? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2018 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 130

In Heft 130 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Eine Zahl und ihr Dreifaches

Peter und Paul sind wieder einmal zum Kino verabredet. Bekanntlich zahlt der Verlierer ihrer Wette für beide das Eintrittsgeld.

Heute bittet Paul seinen Freund, eine positive ganze Zahl und ihr Dreifaches aufzuschreiben, selbstverständlich in der gewöhnlichen Dezimalschreibweise. Peter liest vor: 36 und 108. Paul sagt: „Ich wette, Du kannst keine Zahl und ihr Dreifaches aufschreiben, ohne eine der Ziffern 1, 2 oder 9 zu verwenden. In dem Beispiel hast Du für 108 die 1 gebraucht.“ Peter nimmt die Herausforderung an und vertieft sich sogleich in seine Rechnungen.

Wer muss diesmal den anderen ins Kino einladen? (Die Lösung soll auch eine kurze Begründung enthalten.)

Lösung

Diesmal muss Peter seinen Freund einladen, denn er verliert die Wette.

Wenn die erste Ziffer der von Peter gewählten Zahl 1, 2 oder 9 ist, hat er direkt verloren. Wenn die erste Ziffer seiner Zahl 4, 5, 6, 7 oder 8 ist, liefert der Übertrag für das Dreifache eine 1 oder eine 2 an erster Stelle. Wenn die erste Ziffer seiner Zahl 3 ist, beginnt das Dreifache ohne Übertrag mit der Ziffer 9 und mit Übertrag mit der Ziffer 1.
Peter kann also das Auftreten einer 1, 2 oder 9 in keinem Fall verhindern.

Vollständig richtige Lösungen wurden eingereicht von Maximilian Göbel, Maximilian Hauck, Melina Mayle, Dennis Mayle, Sönke Schneider, Jan Wabnig und Artur Yeganyan.

Weiterführende Fragen: Gibt es noch andere Kombinationen aus drei Ziffern, bei denen Paul die Wette ebenfalls gewinnt? Oder gibt es Zahlen, die aus der gleichen Ziffernmenge bestehen wie ihr Dreifaches? Das wären aber fast schon wieder zwei neue Aufgaben.

Lösbarkeit von Fermat-Gleichungen mit primen Exponenten

von H. Fuchs

Nur wenige Probleme haben die Zahlentheoretiker so lange und so intensiv bearbeitet wie die Frage nach der ganzzahligen Lösbarkeit der Gleichungen $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 2$, für die Pierre de Fermat vermutete und Andrew Wiles 1993/1995 bewies:

(1) Es gibt *kein* Zahlentripel (x, y, z) aus positiven ganzen Zahlen, das eine Lösung *irgend einer der Gleichungen* $x^n + y^n = z^n$ ist, wenn n eine natürliche Zahl ≥ 3 ist.

Gewissermaßen am entgegengesetzen Ende des Spektrums der Lösungsmöglichkeiten der Fermat-Gleichungen steht ein unerwartetes Ergebnis aus dem Jahr 1943:

(2) Es gibt *ein* wohlbestimmtes Zahlentripel (x, y, z) mit $x, y, z \neq 0$, das eine Lösung *aller Gleichungen* $x^n + y^n = z^n$ ist, wenn n eine Primzahl > 3 ist*.

Die Aussage (2) steht nicht im Widerspruch zur Aussage (1), denn in (2) ist nicht verlangt, dass die Komponenten des Lösungstripels positive ganze Zahlen sind. Tatsächlich gibt es das in (2) angekündigte Lösungstripel, wenn man dort komplexe Zahlen zulässt.

(3) Das Tripel $(1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, 2)$ ist eine Lösung sämtlicher Fermat-Gleichungen $x^n + y^n = z^n$ mit primen Exponenten $n > 3$.

Nachweis von (3): Es seien $a = 1 + i\sqrt{3}$ und $b = 1 - i\sqrt{3}$ mit $i^2 = -1$ sowie $a + b = 2$ und $a \cdot b = 4$. Dann ist

$$\begin{aligned}
a^2 &= (1 + i\sqrt{3})^2 = 2(-1 + i\sqrt{3}) = -2b \\
a^6 &= (2(-1 + i\sqrt{3}))^3 = 2^3(-1 + 3 \cdot i\sqrt{3} - 3(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3) \\
&= 2^6 = -2^3 b^3 \\
a^{6m} &= 2^{6m} \text{ für jedes natürliche } m \geq 1. \\
b^6 &= 2^6 \text{ wegen } 2^6 = -2^3 b^3, \text{ also } b^3 = -2^3 \\
b^{6m} &= 2^{6m} \text{ für jedes natürliche } m \geq 1.
\end{aligned}$$

(3') $a^{6m+1} + b^{6m+1} = a^{6m} \cdot a + b^{6m} \cdot b = 2^{6m}(a + b) = 2^{6m+1}$ wegen $a + b = 2$.

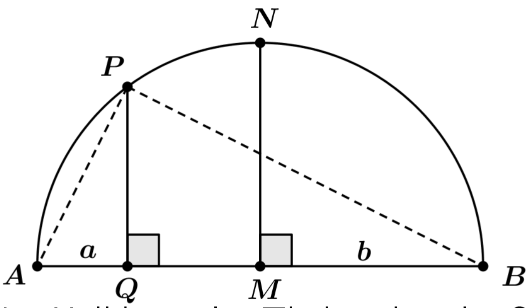
* siehe: American Mathematical Monthly (AMM) 1943, p.63.

(3") $a^{6m-1}+b^{6m-1}=\frac{a^{6m}}{a}+\frac{b^{6m}}{b}=2^{6m}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2^{6m-1}$ wegen $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{a\cdot b}=\frac{2}{4}$.
Aus (3') und (3") folgt, dass $(a,b,c)=(1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3},2)$ eine Lösung jeder Gleichung $x^{6m+1}+y^{6m+1}=z^{6m+1}$ und $x^{6m-1}+y^{6m-1}=z^{6m-1}$ ist, $m=1,2,3,\ldots$. Weil nun jede Primzahl $n>3$ von der Form $6m-1$ oder $6m+1$ ist, gilt also (3).
Wir haben sogar mehr gezeigt:
$(1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3},2)$ ist Lösung jeder Gleichung $x^n+y^n=z^n$, wenn n von der Form $n=6m-1$ oder $6m+1$ ist, $m\geq 1$.

Die aM-gM-Ungleichung in Aktion

von Hartwig Fuchs

In einem Halbkreis mit Mittelpunkt M und Durchmesser AB seien die Strecken PQ und NM orthogonal zu AB (siehe Figur). Dann gilt wohl:



(1) $|NM|>|PQ|$, falls $P\neq N$.
(1') $|NM|=|PQ|$, falls $P=N$ ist - man sieht es, aber es sollte dennoch bewiesen werden.

Im Halbkreis des Thales über der Strecke AB hat das Dreieck APB einen rechten Winkel bei P. Setzte man nun $|AQ|=a$ und $|BQ|=b$, dann gilt für die Höhe PQ im Dreieck APB:

$|PQ|^2=a\cdot b$ (Höhensatz), woraus $|PQ|=\sqrt{ab}$ folgt.

Mit $|MN|=\frac{1}{2}(a+b)$ folgt $|NM|\geq|PQ|$, sobald man $\frac{1}{2}(a+b)\geq\sqrt{a\cdot b}$ bewiesen hat. Wenn man dann noch zeigen kann, dass $\frac{1}{2}(a+b)=\sqrt{a\cdot b}$ genau dann eintritt, wenn $a=b$ und daher $P=N$ ist, so sind damit (1) und (1') bewiesen.

Die aM-gM-Ungleichung

Es seien a und b nichtnegative reelle Zahlen. Dann heißen $\frac{1}{2}(a+b)$ ihr *arithmetisches Mittel* (aM) und $\sqrt{a\cdot b}$ ihr *geometrisches Mittel* (gM). Zwischen diesen beiden Mittel besteht eine wichtige Beziehung, die aM-gM-Ungleichung:

(2) Für jede zwei nichtnegative reelle Zahlen a,b gilt: $\frac{1}{2}(a+b)\geq\sqrt{a\cdot b}$.

(2') Insbesondere gilt $\frac{1}{2}(a+b)=\sqrt{a\cdot b}$ genau dann, wenn $a=b$ ist.

Beweis von (2):
Weil das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ ist, gilt für reelle Zahlen a und b mit $a,b\geq 0$, dass $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$ und daher $(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\geq 0$ ist. Aus der letzten Ungleichung folgt $a+b\geq 2\sqrt{a\cdot b}$ und daher gilt (2).
Beweis von (2'):

Es sei $\frac{1}{2}(a+b) = \sqrt{a \cdot b}$. Dann ist $(a+b)^2 = 4ab$ und daher $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = 0$. Folglich ist $a = b$. Es sei nun $a = b$. Dann ist $\frac{1}{2}(a+b) = a$ und $\sqrt{a \cdot b} = a$, so dass $\frac{1}{2}(a+b) = \sqrt{a \cdot b}$ ist.

Die aM-gM-Ungleichung ist ein vielseitig verwendbares und daher nützliches Arbeitsinstrument des Mathematikers - was nun an einigen Beispielen demonstriert werden soll.

Vergleichen mit aM-gM

(B1) Welche Zahl ist größer: $2015^{2016} \cdot 2016^{2015}$ oder $(2015^{2016})^2 + (2016^{2015})^2$?

Setzt man $a = 2015$ und $b = 2016$, dann folgt aus (2) und (2'):

$$(a^b)^2 + (b^a)^2 > 2\sqrt{(a^b)^2 \cdot (b^a)^2} = 2a^b \cdot b^a > a^b \cdot b^a$$

womit die oben gestellte Frage beantwortet ist. Die Summe ist größer als das Produkt.

Abschätzen mit aM-gM

(B2) Für die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks gilt die merkwürdige Ungleichung:

$$S = \frac{(a+b)ab + (b+c)bc + (a+c)ac}{abc} \geq 6.$$

Zunächst gilt:

(3) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ fï¿½r reelle Zahlen $x \geq 0$ und $y \geq 0$, denn wegen (2) ist $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}}$.

Mit (3) folgt die Behauptung so:

$$S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2 + 2 + 2.$$

Im Beweis wird keine Dreiecksungleichung benutzt, also gilt die Ungleichung für alle positiven a, b, c, nicht nur für Dreiecksseiten!

(B3) Für positive reelle Zahlen a, b und für natürliche Zahlen m und n gilt: $T = \frac{a^m + b^m + 1}{\sqrt{a^m + b^m}} \geq 2$.

Aus (2) folgt:

$$T = \frac{a^m + b^m}{\sqrt{a^m + b^m}} + \frac{1}{\sqrt{a^m + b^m}} = \sqrt{a^m + b^m} + \frac{1}{\sqrt{a^m + b^m}} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^m + b^m}}{\sqrt{a^m + b^m}}}.$$

Beweisen von Ungleichungen mit aM-gM

(B4) Ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c hat das Volumen $V = abc$. Man zeige: Für das Volumen $V' = (a+b)(b+c)(c+a)$ eines Quaders mit den Seitenlängen $a+b, b+c$ und $c+a$ gilt: $V' \geq 8V$.

Wegen (2) gilt: $a+b \geq 2\sqrt{a \cdot b}$, $b+c \geq 2\sqrt{b \cdot c}$ und $c+a \geq 2\sqrt{c \cdot a}$. Folglich ist

$$V' = (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8 \cdot \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc = 8V.$$

(B5) Für nichtnegative reelle Zahlen a, b, c und d gilt: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Mit dreimaliger Anwendung von (2) erhält man:

$$(a+b)+(c+d) \geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd} \geq 2\sqrt{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{cd}} = 4\sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Und nun versuche es selbst! Die Lösungen der folgende Aufgabe befindet sich auf Seite 36.

(B6) Es seien a, b, c und d positive reelle Zahlen. Zeige, dass dann mindestens eine der folgenden Ungleichungen nicht gilt: $a+b \leq c+d$, $(a+b)cd \leq (c+d)ab$, $(a+b)(c+d) \leq ab+cd$.

Bestimmung von Extremwerten mit aM-gM

Wir haben in (2') gezeigt, dass aus einer aM-gM-Ungleichung (2) genau dann eine Gleichung wird, wenn $a = b$ ist. Daraus lässt sich nun eine Bedingung dafür herleiten, wann eine Summe $a+b$ bzw. ein Produkt ab einen extremalen Wert annimmt.

Extremal-Kriterium

Für positive reelle Zahlen a und b gilt:

(4) Ist die Summe $a+b$ konstant, dann ist ab maximal für $a = b$.

(4') Ist das Produkt ab konstant, dann ist $a+b$ minimal für $a = b$.

Beweis von (4):
Ist $a+b$ eine feste Zahl, dann zeigt die Ungleichung $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, dass $a+b$ der größte Wert ist, den $2\sqrt{ab}$ haben kann. Es sei daher $a+b = 2\sqrt{ab}$. Wegen (2') gilt das nur für $a = b$. Daraus folgt: ist $a = b$, so ist $2\sqrt{ab}$ und somit auch ab maximal.
Beweis von (4'):
Ist ab eine feste Zahl, dann hat $a+b$ wegen $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ den kleinstmöglichen Wert $2\sqrt{ab}$. Es sei daher $a+b = 2\sqrt{ab}$. Dann ist $a = b$ und $a+b$ ist minimal.

(B7) Welches Rechteck von gegebenem Umfang U hat die größte Fläche?

Es seien a und b die Längen der Seiten des Rechtecks und F sei seine Fläche. Dann gilt $a+b = \frac{1}{2}U$ und $ab = F$. Nach Voraussetzung ist $a+b$ eine feste Zahl. Daher ist F maximal nach (4), wenn $a = b$ und daher das Rechteck ein Quadrat ist.

(B8) Unter den rechtwinkligen Dreiecken mit der gegebenen Fläche F besitzt das Dreieck mit gleichlangen Katheten den kleinsten Umfang.

Es seien a und b die Längen der Katheten des Dreiecks und U sei sein Umfang. Dann ist $ab = 2F$ und $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = U$. Weil nun ab und damit auch $a^2b^2 = F^2$ Konstanten sind, ergibt sich aus (4'), dass sowohl $a+b$ als auch a^2+b^2 und damit U für $a = b$ minimal sind.

(B9) Man bestimme den maximalen Wert des Polynoms $p(x) = (1 + x)(3 - x)$ auf dem Intervall $-1 < x < 3$.

Nach Voraussetzung sind $1+x > 0$ und $3-x > 0$. Weil nun $(1+x)+(3-x) = 4$ eine feste Zahl ist, folgt mit (4), dass $(1+x)(3-x)$ maximal ist fï¿½r $1+x = 3-x$, also für $x = 1$. Folglich ist $p(1) = 4$ der größte Wert von $p(x)$ auf dem Intervall $-1 < x < 3$.

(B10) Was ist der kleinste Wert des Terms $t(x) = 5 \cdot 2^{x-1} + \frac{5}{2^{x-1}}$, x reell?

Das Produkt $5 \cdot 2^{x-1} \cdot 5 \cdot 2^{-(x-1)} = 25$ ist eine Konstante. Aus (4') folgt daher, dass $t(x)$ minimal ist, falls $5 \cdot 2^{x-1} = 5 \cdot 2^{-(x-1)}$ und deshalb falls $2^{x-1} \cdot 2^{x-1} = 1$ und folglich $x = 1$ ist. Also ist $t(1) = 10$ der kleinstmögliche Wert von $t(x)$.

Verallgemeinerung

In den Sätzen (2) und (2') tritt die aM-gM-Ungleichung in ihrer einfachsten Form auf - nämlich mit nur zwei Variablen. Im Beispiel 5 deutet sich an, wie eine Verallgemeinerung von (2) und (2') aussehen wird.

Für die positiven reellen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 2$, ist $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ das arithmetische Mittel und $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ das geometrische Mittel. Für diese beiden Mittel gilt - was hier nicht bewiesen wird - die allgemeine aM-gM-Ungleichung:

$$(5) \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

In (5) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ist.

Mit (5) ist der Anwendungsbereich der aM-gM-Ungleichung beträchtlich erweitert - aber das ist ein neues Feld, das wir hier nicht bearbeiten können.

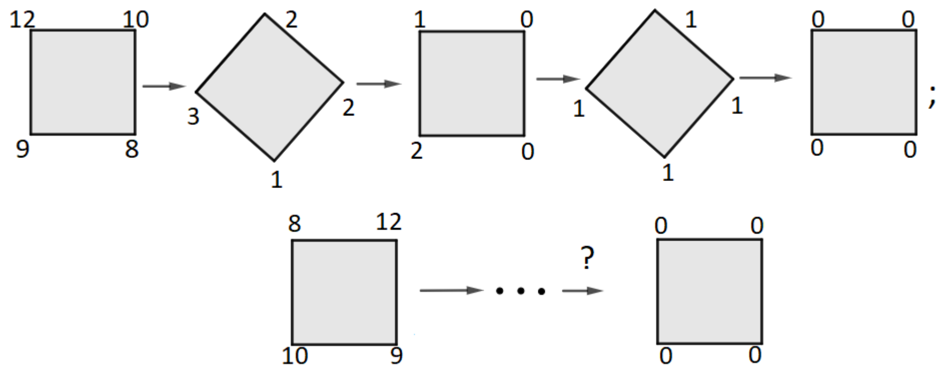
Mathematische Entdeckungen

Differenzen

Auch ganz elementare Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen halten noch Überraschungen in Form ungelöster Probleme bereit. So etwa stoßen wir bei der nachfolgenden Aufgabe – bei der es um Differenzen von natürlichen Zahlen geht – auf Fragen, für die wir nicht immer eine Antwort kennen.

Aufgabe:
Schreibe vier beliebige ganze Zahlen ≥ 0 an die Eckpunkte eines Quadrats. Von je zwei benachbarten Zahlen subtrahiere man die größere Zahl von der kleineren Zahl - bei Gleichheit bilde man die Differenz 0. Man erhält so vier Differenzen und diese verteilt man auf die Eckpunkte eines zweiten Quadrates und verfahre dann mit diesen Zahlen ganz so wie mit den vier Startzahlen und so weiter

Untersuche nun Fragen wie: Wenn man den Prozess der Differenzbildung hinreichend oft durchführt, erhält man dann jeweils lauter verschiedene Differenzquadrupel oder ergibt sich irgendwann stets das gleiche Endquadrupel - wie auch immer die vier Startzahlen auf die Eckpunkte des ersten Quadrats verteilt sind?
Beispiel:



Verallgemeinerung: Verteile 2^m ganze Zahlen ≥ 0, $m = 3, 4, 5$, bzw. 3 ganze Zahlen ≥ 0 auf die Ecken eines 2^m-Ecks bzw. eines Dreiecks und führe entsprechende Differenzenprozesse durch. Untersuche diese Differenzenprozesse und vergleiche sie mit dem 4-Startzahlen-Prozess.
Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2018 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 130

In Heft 130 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Kleinster Nicht-Teiler

Wir wollen $K(n)$ die kleinste natürliche Zahl berechnen, die kein Teiler der natürlichen Zahl n ist, $n \geq 3$. Beispiele: $K(120) = 7$, $K(121) = 2$, $K(122) = 3$. Untersuche nun $K(n)$, indem du etwa folgenden Fragen nachgehst:

a) Bestimme $K(n)$
- falls $n = 3, 4, 5, \cdots 20$ ist;
- falls n eine ungerade Zahl ist;

- falls n eine Potenz, z.B. $n = 2^m$ oder $n = 6^m$ ist;
- falls n eine Primzahl ist, $n \geq 3$.

b) Bestimme möglichst alle Zahlen n, für die z.B. $K(n) = 3$; $K(n) = 7$; $K(n) = 10$, usw. ist.

c) Kann $K(n)$ beliebig große Werte annehmen? (H.F.)

Ergebnisse

Dies sind die ersten 18 Werte der angegebenen Funktion:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$K(n)$	2	3	2	4	2	3	2	3	2	5	2	3	2	3	2	4	2	3

a) $K(n) = 2$ für jedes ungerade n und somit auch für jede Primzahl n.

$K(2^m) = 3$ für jedes $m > 1$. $K(6) = 4$ aber $K(6^m) = 5$ für jedes $m > 1$. Sönke argumentiert weiter: Wenn $K(x)$ einen Primfaktor p hat, der in x nicht vorkommt (was z.B. für alle Zahlen der obigen Tabelle außer 6 und 18 der Fall ist), wird in x^m nie Vielfaches von p sein und deshalb niemals durch $K(x)$ teilbar sein. Damit gilt also $K(x^m) = K(x)$ für alle $m \geq 1$.

b) $K(n) = 3$ für jede gerade Zahl, die kein Vielfaches von 3 ist. $K(n) = 7$: die kleinste Zahl, die zwar durch 2,3,4,5 und 6, nicht aber durch 7 teilbar ist, heißt $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ - damit ist für jede Zahl $n = 60 \cdot m$, m kein Vielfaches von 7, stets $K(n) = 7$.

$K(n) = 10$ gilt für kein n, denn $K(n) = 10$ bedeutet, dass n durch $2, 3, 4, \dots, 9$ aber nicht durch 10 teilbar wäre - das ist nicht möglich, weil $2 \cdot 5 = 10$ ist.

Mit derselben Argumentation folgt sofort, dass $K(n)$ keine zwei verschiedenen Primfaktoren besitzen kann, also stets eine Primpotenz ist. Maximilian gibt sogar eine Formel für alle n mit $K(n) = p^m$, p eine Primzahl, an.

c) Es gilt $K(m!) > m$; die Funktion nimmt also beliebig große Werte an.

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt Annika Borrmann, Klasse 8c, Gymnasium Oberursel, Kathrin Borrmann, Klasse 7b, Gymnasium Oberursel, Maximilan Hauck, Klasse 9, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey, Tobit Roth, Klasse 6, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg, Bad Neuenahr-Ahrweiler, Sönke Schneider, Klasse 8, Gymnasium Oberursel, Adriana Stenger, Klasse 13, Karolinen-Gymnasium Frankenthal.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 131

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Multiplikationsregel

Die zweistellige natürliche Zahl n sei in Ziffernschreibweise $n = ab$. Wenn $a+b \leq 9$ ist und $a+b = c$ gesetzt wird, dann gilt für das Produkt $n \cdot 11$ in Ziffernschreibweise $n \cdot 11 = acb$. Warum? Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Es ist $n = a \cdot 10 + b$ und

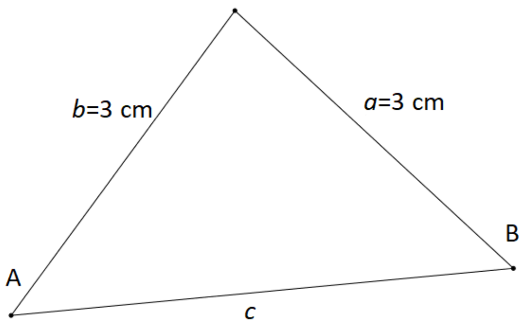
$$\begin{aligned} n \cdot 11 &= a \cdot 10 \cdot 11 + b \cdot 11 \\ &= a \cdot 100 + a \cdot 10 + b \cdot 10 + b \\ &= a \cdot 100 + (a + b) \cdot 10 + b = acb \end{aligned}$$

wegen $a + b = c$.

II. Konstruktion eines Dreiecks

Zeichne ein Dreieck mit einer Seitenlänge $a = 3$cm und Umfang $U = 10$cm. Beschreibe, wie du vorgegangen bist. (WJB)

Lösung:



Wähle (z.B.) $c = 4$cm. Dann ist $b = U - a - b = 3$cm. Konstruktion: siehe Bild links.

III. Ziffernsumme

Wie groß ist die Summe der Ziffern der Zahlen

a) $10^{225} - 1$?

b) $10^{227} - 8766$? (H.F.)

Lösung:

a) $10^{225} - 1$ hat 224-mal die Ziffer 9; deren Summe $224 \cdot 9 = 2016$ ist.

b) $10^{227} = 100\cdots 00000$ mit 227 Ziffern 0. Eine schriftliche Subtraktion liefert

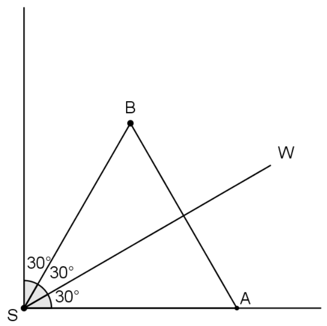
$$\begin{array}{r} 10^{227} = 100\cdots 00000 \\ -\ 8766 \\ \hline 99\cdots 91234 \end{array}$$ mit 223 Ziffern 9.

Daher ist $223 \cdot 9 + 1 + 2 + 3 + 4 = 2017$ die Ziffernsumme von $10^{227} - 8766$.

IV. Winkeldreiteilung

Wie teilt man einen rechten Winkel in drei 30° Winkel? (H.F.)

Lösung:



Der Scheitel des gegebenen rechten Winkels sei S. Wähle einen beliebigen Punkt A auf einem Schenkel des rechten Winkels. Mit SA als Basis konstruiert man dann ein gleichseitiges Dreieck SAB sowie die Winkelhalbierende W des 60°-Winkels bei S. Damit ist der rechte Winkel dreigeteilt.

V. Wie viele Männer sind versammelt?

Bei der Jahresversammlung eines Vereins schaut sich eine der anwesenden Frauen die Männer genau an. Sie zählt 26 Männer mit Krawatte und 12 Männer mit Hut. Jeder der Männer trägt mindestens eines (Hut oder Krawatte). Sie multipliziert die Anzahl der Männer mit 5 und sieht, dass das Produkt die doppelte Quersumme hat wie **die Quersumme der Zahl der Männer*** und außerdem durch 6 teilbar ist. Wieviele Männer sind bei der Versammlung? (WJB)

Lösung:

Es sind mindestens 26 (die mit Krawatte) und höchstens $12 + 26 = 38$ (da keiner ohne Hut und ohne Krawatte kommt). Außerdem ist ihre Anzahl (auch ohne Multiplikation mit 5) durch 6 teilbar. Es können also nur 30 oder 36 Männer sein. Betrachten der Quersumme ergibt das Ergebnis 30.

VI. Dreistellige Zahlen

a) Bestimme die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 7 und 13 teilbar ist und die letzte Ziffer 6 hat.

b) Zeige, dass es keine dreistellige Zahl gibt, die durch 11 und 13 teilbar ist und die letzte Ziffer 1 hat. (WJB)

Lösung:

a) 7 und 13 sind Primzahlen, also muss die gesuchte Zahl ein Vielfaches von $7 \cdot 13 = 91$ sein. Eine Zahl $91 \cdot n$ kann nur dann die letzte Ziffer 6 haben,

* Die Redaktion entschuldigt sich, da diese Aufgabe nicht deutlich formuliert war.

wenn n die letzte Ziffer 6 hat. Es ist $91 \cdot 6 = 546$ und es gibt keine weitere dreistellige Zahl, da $91 \cdot 16, 91 \cdot 26, \ldots$ zu groß sind.

b) 11 und 13 sind Primzahlen und Zahlen der Form $11 \cdot 13 \cdot n = 143 \cdot n$ haben die letzte Ziffer 1, wenn n die letzte Ziffer 7 hat; aber $143 \cdot 7 = 1001$ ist vierstellig.

VII. Summe und Produkt

a) Finde drei voneinander verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, deren Summe durch 4 teilbar ist und deren Produkt gleich 30 ist. (WJB)

b) Gibt es auch Lösungen, bei denen zwei der drei Zahlen gleich sind? Welche?

Lösung:

a) Wir suchen zunächst nach Lösungen mit $a < b < c$. Die Zerlegungen der Zahl 30 als Produkt abc mit $a < b < c$ sind:

$$30 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Die Summe der drei Faktoren ist nur bei der Zerlegung $1 \cdot 5 \cdot 6$ durch 4 teilbar. Die Lösung ist also $\{1, 5, 6\}$.

b) Es gibt nur eine Zerlegung von 30 mit zwei gleichen Faktoren: $30 = 1 \cdot 1 \cdot 30$ und hier ist tatsächlich $1 + 1 + 30 = 32$ durch 4 teilbar.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Addition mit Buchstaben

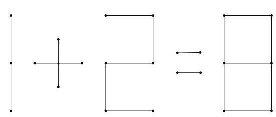
$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{Z} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline & \mathrm{F} & \mathrm{Ü} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Ersetze jeden Buchstaben durch eine Ziffer, so dass eine korrekte Addition entsteht. Dabei sollen verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern zugeordnet werden. Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen – finde zwei davon. (H.F.)

II. Hölzchenknobelei

a) Lege *ein* Hölzchen so um, dass die Gleichung unten stimmt.

b) Lege *zwei* Hölzchen so um, dass die Gleichung unten stimmt.



Bemerkung: Es ist nicht erlaubt, aus dem Gleichheitszeichen = ein ungleich ≠ zu machen. (A.K.)

III. Geburtstagsknobelei

An ihrem 60. Geburtstag wird Tante Inge von Katja gefragt, wie alt ihre drei Enkelinnen seien. Sie antwortet: „Das Produkt ihrer Alter ist genau mein Alter und die Summe ist eine Primzahl.“ Katja kann daraus die Antwort nicht schließen, bis Tante Inge hinzufügt: „Lässt du in der Summe das Alter der Jüngsten weg, so bleibt wieder eine Primzahl.“ Wie alt sind die drei? (WJB)

IV. Quersumme

Gibt es eine Quadratzahl z mit Quersumme 93? Begründe Deine Entscheidung. (WJB)

V. Die Zahl 30

Jana hat festgestellt, dass sie die Zahl 30 nur mit der Ziffer 6 und den Rechenzeichen für die Grundrechenarten und Klammern darstellen kann. So ist zum Beispiel $6 \cdot 6 - 6$ eine solche Darstellung, bei der die Ziffer 6 genau dreimal verwendet wird.

a) Gib solche Darstellungen an, bei der die Ziffer viermal bzw. fünfmal verwendet wird.

b) Begründe: Für jede vorgegebene Anzahl $n \geq 4$ lässt sich die Zahl 30 mit n-mal der Ziffer 6 und sonst nur den Rechenzeichen für die Grundrechenarten und Klammern darstellen.

c) Mit der Ziffer 5 ist das ebenfalls möglich, sogar auch für $n = 3$. – Zeige dies.

VI. ZT-Zahlen

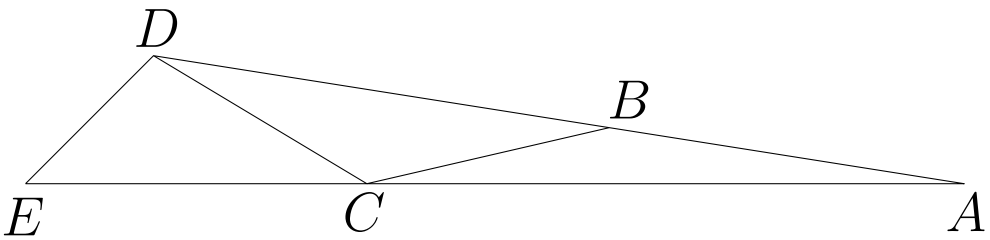
Die Zahl 36 lässt sich sowohl durch 3 als auch durch 6 teilen.

Eine natürliche Zahl n mit dieser Eigenschaft, dass sie sich durch ihre sämtlichen Ziffern teilen lässt, nenne ich ZT-Zahl.

a) Wie heißt die kleinste dreiziffrige gerade ZT-Zahl ohne wiederholte Ziffern?

b) Wie heißt die kleinste dreiziffrige ungerade ZT-Zahl ohne wiederholte Ziffern? (H.F.)

VII. Winkelbestimmung



In der abgebildeten Figur gelte $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$ sowie $\sphericalangle ADE = 156^\circ$.

Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle DAE$? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1197: Die Zahl 20172017...

Wir betrachten die Zahl $S = 201720172017\dots2017$, die entsteht, indem man 2017-mal die Zahl 2017 hintereinanderschreibt.

a) Eine Zahl, die die Summe aller Zahlen von 1 bis zu einem bestimmten n ist, heißt *Dreieckszahl*. Zum Beispiel 10 ist eine Dreieckszahl, denn $1+2+3+4 = 10$. – Ist S eine Dreieckszahl?

b) Für welche positiven ganzen Zahlen a und b mit $b \geq 2$ kann man S auch schreiben als $S = a^b$?

Hinweis: Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt: Ist a eine natürliche Zahl und p eine Primzahl, dann hat a^p bei Division durch p den gleichen Rest wie a bei Division durch p. (Matthias Bergen, Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied, Klasse 13)

Aufgabe 1198: Geburtsdatum

Die Lehrerin Silke Köhler unterrichtet die Klasse 10b schon seit 5 Jahren. In der ersten Stunde des Schuljahrs 2017 ließ sie sich endlich überreden, der Klasse ihren Geburtstag zu verraten. Sie tat das so: „Dividiert man die Zahl der Tage von Neujahr bis zu meinem Geburtstag (einschließlich) durch die Anzahl n der Tage nach meinem Geburtstag bis zu Sylvester, so ist das Ergebnis q um eine Quadratzahl größer als mein jetziges Alter (wie üblich auf eine ganze Zahl abgerundet), eine Primzahl". Wann ist Frau Köhler geboren? (WJB)

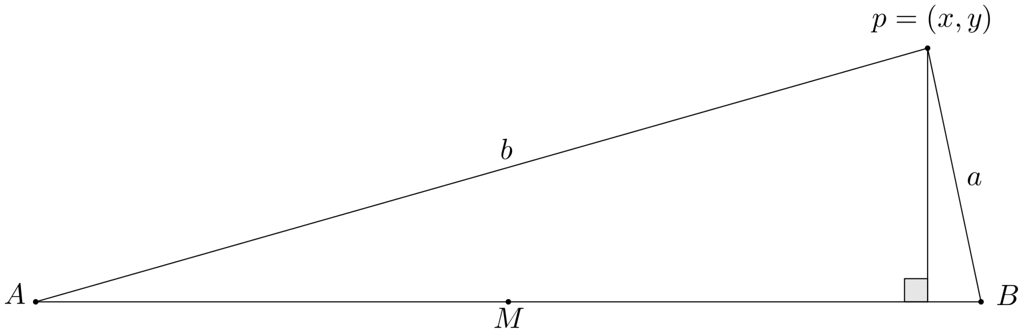
Aufgabe 1199: Folgen einer unzuverlässigen Waage

Ein Gemüsehändler auf dem Markt hat eine recht unzuverlässige Waage.

Ist das Gewicht einer Ware höchstens 2 kg, dann zeigt sie mit 90 %-iger Wahrscheinlichkeit den korrekten Preis an. Wiegt die Ware mehr als 2 kg, dann gibt sie nur noch mit 82 %-iger Wahrscheinlichkeit den richtigen Preis an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer zufällig ausgewählten Käuferin für eine gekaufte Ware der falsche Preis genannt wird? Die Wahrscheinlichkeit, dass die Käuferin höchstens 2 kg Gemüse kauft, ist 0,5. (H.F.)

Aufgabe 1200: Abstände

A und B seien die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ auf der x-Achse. Bestimme alle Punkte P in der x, y-Ebene, deren Abstand vom Koordinatenursprung M das geometrische Mittel der Abstände a von A und b von B, also gleich $\sqrt{ab}$ ist. (WJB)



Aufgabe 1201: Zahlenknobelei

			R	E	D
+		B	L	U	E
+	G	R	E	E	N
	B	R	O	W	N

Ersetze gleiche (verschiedene) Buchstaben durch gleiche (verschiedene) Ziffern, so dass eine korrekte Addition ensteht, in der jede der Ziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ vorkommt. Ferner soll keine führende Ziffer einer Zahl eine Null sein - und *BLUE* entspreche einer Quadratzahl.

Aufgabe 1202: Rational oder irrational

Zeige, dass die Behauptung „Ist der Quotient $\frac{a}{b}$, wobei $b \neq 0$ ist, rational, so sind a und b beide rational oder beide irrational“ mit einer Ausnahme richtig ist.

Aufgabe 1203: Drei Frösche

Drei Frösche sitzen auf den Punkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ eines Koordinatensystems. In jedem Schritt kann ein beliebiger Frosch über einen beliebigen anderen Frosch hüpfen und sich folgendermaßen auf einen neuen Punkt des Koordinatensystems setzen: Der übersprungene Frosch bewegt sich dabei nicht und sein Standpunkt halbiert genau die Strecke zwischen Ausgangspunkt und Endpunkt des springenden Frosches.

a) Ist es möglich, dass durch fortgesetztes Springen schließlich ein Frosch auf dem Feld $(1, 1)$ landet?

b) Ist es möglich, dass durch fortgesetztes Springen schließlich die drei Frösche auf den Feldern $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ landen? (V. Blomer)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 131

Klassen 9–13

Aufgabe 1190: Besondere Vielfache von 4

Es sei $T(n) = 3^n + 2n - 1$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Zeige: Jede Zahl $T(n)$ ist ein Vielfaches von 4. (H.F.)

Lösung:

Für gerades n ist $n = 2m$ und $3^n - 1 = 3^{2m} - 1 = (3^m - 1)(3^m + 1)$. Die

Zahlen $3^m - 1$ und $3^m + 1$ sind gerade. Also ist ihr Produkt und somit $3^{2m} - 1$ ein Vielfaches von 4. Deshalb gilt $3^n + 2n - 1 = (3^{2m} - 1) + 4m$ ist ein Vielfaches von 4. Für ungerades n ist $n = 2m + 1$ und daher ist

$$\begin{aligned} 3^n + 2n - 1 &= 3^{2m+1} + 2(2m + 1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^{2m} - 3 + 4m + 2 - 1 + 3 \\ &= 3(3^{2m} - 1) + 4m + 4 \end{aligned}$$

ein Vielfaches von 4.

Aufgabe 1191: Vorsicht bei Brüchen

Es seien a, b, c, d reelle Zahlen; keine von ihnen sei 0. Mathis behauptet:

(1) Wenn $a > c$ und $b < d$ ist, dann ist $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

(2) Wenn $a > b$ ist, dann gilt $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$.

Treffen Mathis Behauptungen zu? (H.F.)

Lösung:

Zu (1): Sind die Zahlen a, b, c, d sämtlich > 0 oder sämtlich < 0, dann folgt aus der Voraussetzung:

$$ad \neq bc \iff \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$$

und (1) gilt. Sind aber von den Zahlen a, b, c, d einige (nicht alle!) < 0, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ möglich; z.B. gilt $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$. Zu (2): Sind die Zahlen a, b beide > 0 oder beide < 0, so gilt (2). In beiden Fällen gilt nämlich wegen der Voraussetzung $a > b$, dass

$$\frac{a}{b} > 1 \iff \frac{a}{b}\frac{a}{b} > 1 \iff \frac{a}{b} > \frac{b}{a}$$

ist. Ist aber $a > 0$, $b < 0$ oder $a < 0$, $b > 0$, dann ist (2) falsch; ist etwa $a = 3, b = -2$ so gilt $\frac{3}{-2} < \frac{-2}{3}$ und für $a = -3, b = 2$ ist $\frac{-3}{2} < \frac{2}{-3}$.

Aufgabe 1192: Nullstellen

Ich verrate dir, dass die Funktion $f(x) = x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 15x - 45$ zwei Nullstellen $x_1 = u$ und $x_2 = -u$ hat. Bestimme alle Nullstellen von f. (WJB)

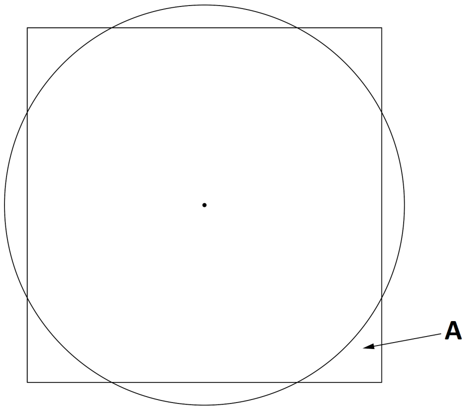
Lösung:

Hat die Funktion die Nullstellen u und $-u$, so ist $f(x)$ durch $(x+u)(x-u) = x^2 - u^2$ teilbar. Es gibt also eine Funktion (x^2+ax+b) mit $f(x) = (x^2+ax+b)(x^2-c)$, wobei $c = u^2$. Wir haben für f also die Darstellung

$$f(x) = x^4 + ax^3 + (b - c)x^2 - acx - bc.$$

Vergleich der Koeffizienten liefert $a = -5$, $b - c = 12$, $-ac = 15$ und $-bc = -45$. Daraus berechnen wir $a = -5$, $c = \frac{-15}{a} = 3$ und $b = 12 + c = 15$. Es ist also $u = \sqrt{c} = \sqrt{3}$, d.h. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$. Da $x^2 - 5x + 15$ keine reellen Nullstellen hat, sind x_1, x_2 bereits die einzigen Nullstellen.*

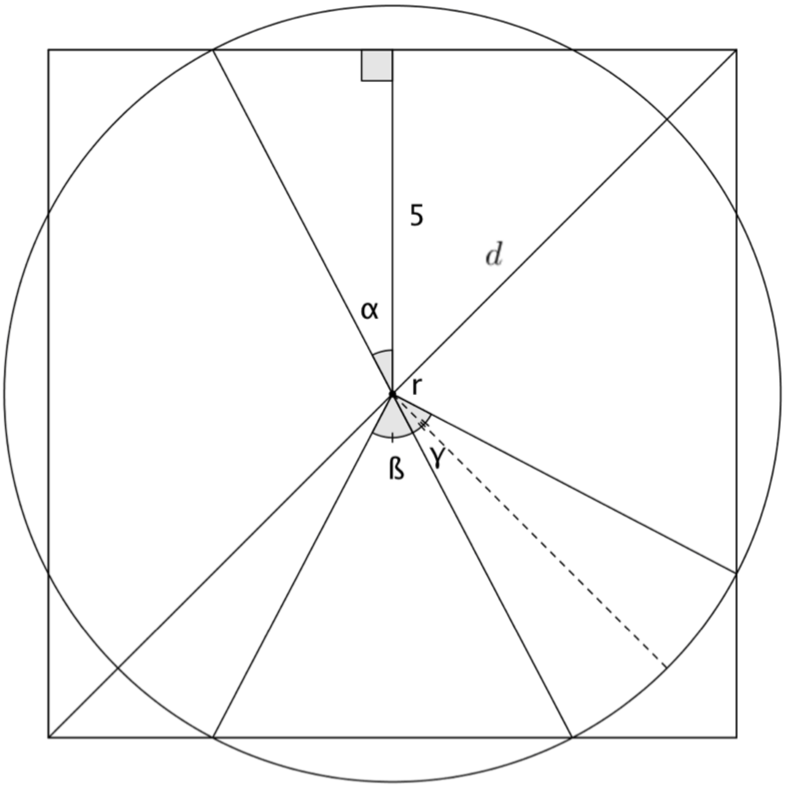
Aufgabe 1193: Quadrat und Kreis



Gegeben ist ein Kreis und ein Quadrat mit gleichem Mittelpunkt. Kreis und Quadrat haben den gleichen Flächeninhalt. Berechne den Flächeninhalt einer der vier „Ecken“, die der Kreis vom Quadrat abschneidet. (Quadratseite $a = 10$cm.)

(Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:



Statt einer abgeschnittenen „Ecke“ lässt sich ein Kreisabschnitt berechnen, der außerhalb der Quadratseiten liegt; diese sind nach Aufgabenstellung flächengleich.

Lösungsweg 1:

Die Quadratseite a sei 10cm lang; der Radius des Kreises ist dann $r = \sqrt{\frac{100}{\pi}}$cm. Der Winkel α lässt sich berechnen:

$$\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{\frac{100}{\pi}}} \implies \alpha \approx 27,6°.$$

* Wenn wir nicht nur reelle Lösungen, sondern auch komplexe Zahlen als Nullstellen zulassen, dann erhalten wir im letzten Schritt $x_{3,4} = \frac{1}{2}(5 \pm i\sqrt{35})$ als weitere Nullstellen, wobei i die imaginäre Einheit ist, für die $i^2 = -1$ gilt.

Der Mittelpunktwinkel β beträgt denn $\beta = 2\alpha \approx 55,2^\circ$. Damit lässt sich die gesuchte Fläche mit Hilfe der Kreisabschnittsformel berechnen (Kreisausschnitt minus Dreieck):

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \frac{\pi r^2 \beta}{360} - \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin(\beta) \implies A_{\text{Kreisausschnitt}} \approx 2,26\text{cm}^2.$$

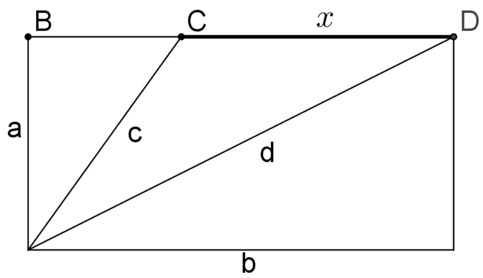
Lösungsweg 2:
Der Flächeninhalt der „Ecke" lässt sich auch direkt berechnen. Für γ gilt: $\gamma = 90^\circ - \beta$ (s. Zeichnung oben). Somit:

$$A_{\text{Ecke}} = 2r \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin(\frac{\gamma}{2}) - \frac{\pi r^2 \cdot \gamma}{360^\circ} \implies A_{\text{Ecke}} \approx 2,26\text{cm}^2,$$

wobei d die Diagonale des Quadrates bezeichnet.

Aufgabe 1194: Transversalen im Rechteck

Gegeben seien $a = 20$, $c = 25$ und $d = 52$. Wie lang ist der Streckenabschnitt $x = |\overline{CD}|$?



Lösung:
Es gilt: $BC^2 = c^2 - a^2 = 225$ und somit ist $BC = 15$. Analog gilt $BD^2 = d^2 - a^2 = 2304$ und somit ist $BD = 48$. Also ist $x = BD - BC = 33$.

Aufgabe 1195: Bestimmung von Mengen

Eine Menge M bestehe aus n verschiedenen natürlichen Zahlen ($n > 3$), für die gilt: Jeweils drei verschiedene Elemente haben

(1) ein Produkt > 37

(2) eine Summe < 37

Bestimme die maximal mögliche Anzahl von n Elementen von M sowie alle Mengen M, die sowohl (1) als auch (2) erfüllen. (H.F.)

Lösung:
Es sei $M = \{u, v, w, \dots, x, y, z\}$ mit $u < v < w < \dots < x < y < z$. Dann ist $w \geq 5$. Denn aus $w \leq 4$ folgt im Widerspruch zu (1): $u \cdot v \cdot w \leq 2 \cdot 3 \cdot 4 < 37$. Ferner ist $x \leq 11$. Denn aus $x \geq 12$ folgt im Widerspruch zu (2): $x + y + z \geq 12 + 13 + 14 > 37$. Eine maximale Menge M wird demnach so aussehen:

$$M = \{u, v, 5, 6, \dots, 10, 11, y, z\},$$

falls es Werte für u, v, y, z gibt, mit denen (1) und (2) erfüllt sind. Für $v \leq 3$ erhält man den Widerspruch $u \cdot v \cdot w = 2 \cdot 3 \cdot 5 < 37$. Somit ist $v = 4$ und (1) und (2) sind erfüllt mit $u = 2$ oder $u = 3$. Für $y \geq 13$ erhält man den Widerspruch $x + y + z = 11 + 13 + 14 \geq 37$; dagegen sind für $y = 12$ und dann $z = 13$ die Bedingungen (1),(2) erfüllt. Die zwei 11-elementigen Mengen

$$M = \{u, 4, 5, 6, \dots, 10, 11, 12, 13\}, u = 2 \text{ oder } u = 3$$

erfüllen (1) und (2). Ihre Elemente-Anzahl ist maximal.

Aufgabe 1196: Zahnpflege

Vor Kurzem las ich folgende Meldung: „62% der erwachsenen Deutschen lassen ihre Zähne mindestens einmal im Jahr vom Zahnarzt kontrollieren. Nur ein Drittel derjenigen, die so regelmäßig zum Zahnarzt gehen, sind Männer.“ Wie hoch ist der Prozentsatz der Männer, wie hoch der der Frauen, die diese Vorsorge betreiben,

a) unter der Annahme, dass die Hälfte der erwachsenen Deutschen männlich, die andere Hälfte weiblich, ist?

b) unter der Annahme, dass 52% der erwachsenen Deutschen Frauen sind?(WJB)

Lösung:

Ist F der Anteil der Frauen in der Bevölkerung (also $F = 0,5$ im Aufgabenteil a), $F = 0,52$ im Aufgabenteil b)) und sind f und m die gesuchten Anteile, so gilt $M = 1 - F$. Wir haben $0,62 = f \cdot F + m \cdot M$ und $m \cdot M = \frac{1}{3} \cdot 0,62$, d.h. $m = \frac{0,62}{3 \cdot M}$. Analog $f \cdot F = \frac{2}{3} \cdot 0,62$, d.h. $f = \frac{2 \cdot 0,62}{3 \cdot F}$.

a) In diesem Fall gilt also

$$m = \frac{0{,}62}{\frac{3}{2}} = 0{,}41\overline{3} = 41\tfrac{1}{3}\% \text{ sowie}$$

$$f = \frac{2 \cdot 0{,}62}{\frac{3}{2}} = 0{,}82\overline{6} = 82\tfrac{2}{3}\%.$$

b) In diesem Fall gilt

$$m = \frac{0{,}62}{3 \cdot 0{,}48} = 0{,}43 = 43\% \text{ sowie}$$

$$f = \frac{0{,}62 \cdot 2}{3 \cdot 0{,}52} = 0{,}795 = 79{,}5\%.$$

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 3

Kaum glaublich aber wahr

Für eine beliebige Anzahl n von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, von denen keine ein Vielfaches von n sei, setzen wir $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Annahme: Keine der Summen S_i, $i \leq i \leq n$, ist ein Vielfaches von n. Dann haben $S_1, S_2, \dots, S_n$ in irgend einer Reihenfolge bei Division durch n die Reste

$1, 2, \ldots, n-1$. Da es n Summen aber nur $n-1$ verschiedene Reste gibt, müssen zwei Summen, etwa S_i und S_j, $i < j$, den gleichen Rest besitzen.

Dann aber hat $S_i - S_j = (a_1 + a_2 + \ldots + a_i) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_j) = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ den Rest 0, d.h. $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ ist ein Vielfaches von n. Die Behauptung gilt natürlich auch für $n = 2018$.

Eine Zahlenfolge

Herleitung einer Rekursionsformel für die Zahlenfolge (1):
Aus (1) folgt für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \frac{1}{(n+1)^2 - 1}(a(1) + a(2) + \cdots + a(n)) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2 - 1}((n^2 - 1)a(n) + a(n)), \text{ und} \end{aligned}$$

$$\frac{(n^2-1)a(n) + a(n)}{(n+1)^2 - 1} = \frac{n^2 a(n)}{((n+1)+1) \cdot ((n+1)-1)}$$

Somit erhalten wir

(2) $a(n+1) = \frac{n}{n+2} a(n)$.

Mit dieser Rekursionsformel lässt sich durch vollständige Induktion eine explizite Formel zur Berechnung von $a(n)$ herleiten:

$$\begin{aligned} a(2) &= \frac{1}{3} a(1) = 2\frac{1!}{3!} a(1) \\ a(3) &= \frac{2}{4} a(2) = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} a(1) = 2\frac{2!}{4!} a(1) \\ a(4) &= \frac{3}{5} a(3) = 2\frac{3!}{5!} a(1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Annahme: $a(n) = 2\frac{(n-1)!}{(n+1)!} a(1)$ sei bewiesen. Dann ist mit (2):

(3) $a(n+1) = \frac{n}{n+2} a(n) = \frac{n}{n+2} \cdot 2\frac{(n-1)!}{(n+1)!} a(1) = \frac{2a(1)}{(n+1)(n+2).}$

Aus (3) folgt mit $a(1) = 1009$, dass $a(2018) = \frac{2018}{2019 \cdot 2020}$ ist.

2017^{2018}

Es sei $z = 10$ und $H_1, H_2, H_3, \ldots$ seien Vielfache von 100. Dann gilt:

($*$) $(1 + az + H_1)^n = 1 + naz + H_2$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, wobei a eine natürliche Zahl ist.

(Beweis durch vollständige Induktion.)

Wegen $2017^2 = 9 + 8z + H_1$ ist $2017^4 = 1 + 2z + H_2$. Daraus folgt mit $(*)$:

$$\begin{aligned} 2017^{2018} &= (2017^4)^{504} \cdot 2017^2 = (1 + 2z + H_2)^{504} \cdot 2017^2 \\ &= (1 + 504 \cdot 2z + H_3) \cdot 2017^2 \\ &= (1 + 8z + H_4)(9 + 8z + H_1) \\ &= (9 + 8z + H_1) + (72z + 64z^2 + 8zH_4) + H_5 \\ &= 9 + 2z + H_6 \text{ weil } z^2 \text{ ein Vielfaches von 100 ist.} \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt: die letzten beiden Ziffern von 2017^{2018} sind 29.

Größen-Vergleich

Es sei $a = 2017$ und $x = (a+1)^{a+1}$, $y = a^{a+1} + (a+1)^a$. Damit ist

$$\begin{aligned} x - y &= (a+1)^{a+1} - a^{a+1} - (a+1)^a \\ &= (a+1)^a(a+1-1) - a^{a+1} \\ &= (a+1)^a \cdot a - a^a \cdot a \\ &= ((a+1)^a - a^a)a > 0, \text{ da } a > 0, a+1 > a. \end{aligned}$$

Aus $x - y > 0$ folgt $x > y$, also ist $2018^{2018} > 2017^{2018} + 2018^{2017}$.

Jahreszahlen-Aufgabe

Es sei n eine m-ziffrige Zahl und es sei $y := 20172018 \cdot 10^m$.
Dann ist eine der Zahlen $y+1, y+2, \dots, y+n$ ein Vielfaches von n. Dieses Vielfache von n sei $y + x$ mit $x = x_1x_2 \dots x_m$. Dann hat $y + x$ die Darstellung $n = 20172018x_1x_2 \dots x_m$, die mit $z = 20172018$ beginnt.

Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von Zirkel und markiertem Lineal

von Hans-Jürgen Schuh

Die Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von Zirkel und (unmarkiertem) Lineal ist eines der drei klassischen Probleme der antiken Mathematik.

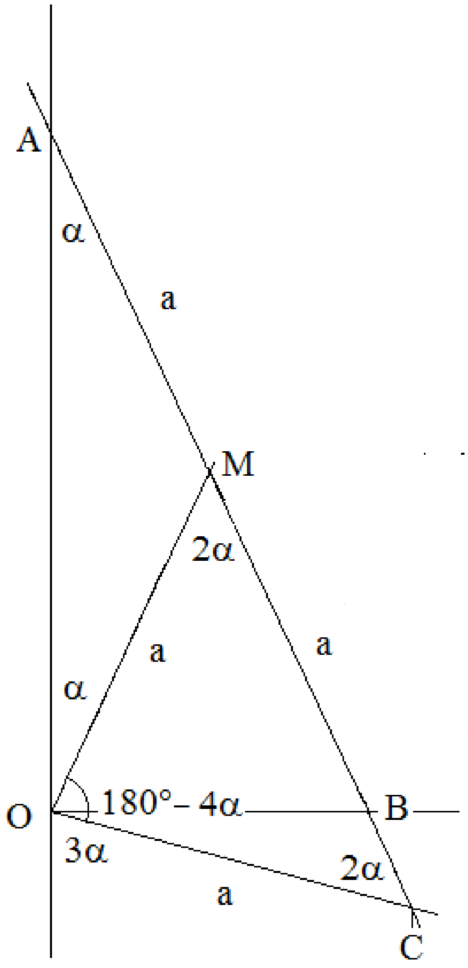
Sie ist nur für bestimmte Winkel durchführbar. Der französische Mathematiker Évariste Galois hat um 1830 herum die Grundlagen geschaffen, dass man später beweisen konnte, dass die Winkeldreiteilung nicht allgemein möglich ist. Den ersten Beweis der Unmöglichkeit veröffentlichte Pierre Wantzel 1837 (unabhängig von der Galoistheorie).

Ein Winkel α mit ganzzahligem Gradmaß ist genau dann konstruierbar, wenn α durch 3 teilbar ist, d.h. er kann genau dann gedrittelt werden, wenn α ein Vielfaches von 9 ist.

Eine Winkeldreiteilung ist nur dann allgemein möglich, wenn man weitere Hilfsmittel, wie z.B. Markierungen auf dem Lineal, zur Konstruktion zulässt. Mit Zirkel und markiertem Lineal gibt es eine Reihe von verschiedenen Konstruktionen. Die in meinen Augen schönste stammt von Archimedes.
Eine hierzu äquivalente Konstruktion geht auf den griechischen Mathematiker Nikomedes (2. Jh. v. Chr.) zurück.*
In Unkenntnis dieser Konstruktionen habe ich als Gymnasiast die Konstruktion von Nikomedes wiederentdeckt. In dieser Form werde ich sie hier vorstellen.

Eine andere Möglichkeit der Winkeldreiteilung lässt sich mit der Origami-Geometrie bewerkstelligen, die außerdem mit Faltungen des Konstruktionspapiers arbeitet. Näheres hierzu findet man im Artikel von Laura Biroth im Monoid 126, Seite 3-7.

Invertierung der Konstruktion:



Figur 1

In Figur 1 überlegt man zunächst, wie man einen Winkel $\alpha < 30^\circ$ mit Zirkel und (unmarkiertem) Lineal so verdreifachen kann, dass sich diese Konstruktion mit Zuhilfenahme eines markierten Lineals invertieren lässt.
Wir geben uns eine feste Strecke beliebiger Länge a und ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit Ursprung O vor. Dann fügen wir eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge $2a$ so in das Achsenkreuz ein, dass A auf der y-Achse und B auf der x-Achse zu liegen kommen, und $\overline{AB}$ mit der y-Achse den Winkel α einschließt (Konstruktion SWW und Parallelverschiebung).

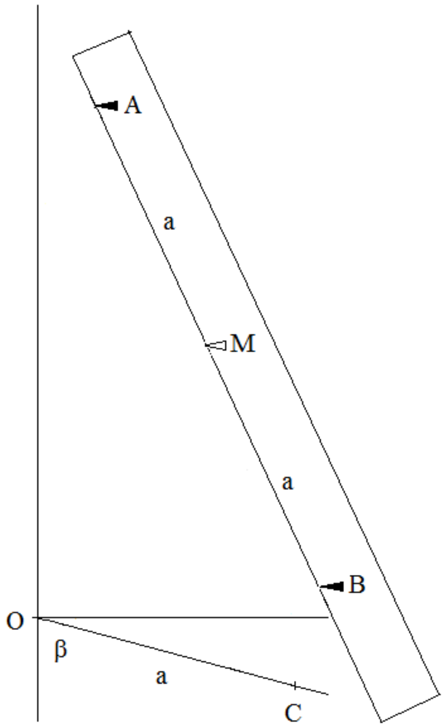
M sei der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Da das $\triangle AOB$ rechtwinklig ist, hat auch die Strecke $\overline{OM}$ die Länge a (Thaleskreis), und deshalb ist auch $\angle AOM = \alpha$.

Das Dreieck $\triangle OBM$ ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{OB}$ kürzer als a, da $2\alpha < 60^\circ$. Deshalb kann man um O einen Kreis mit Radius a schlagen, der die Gerade

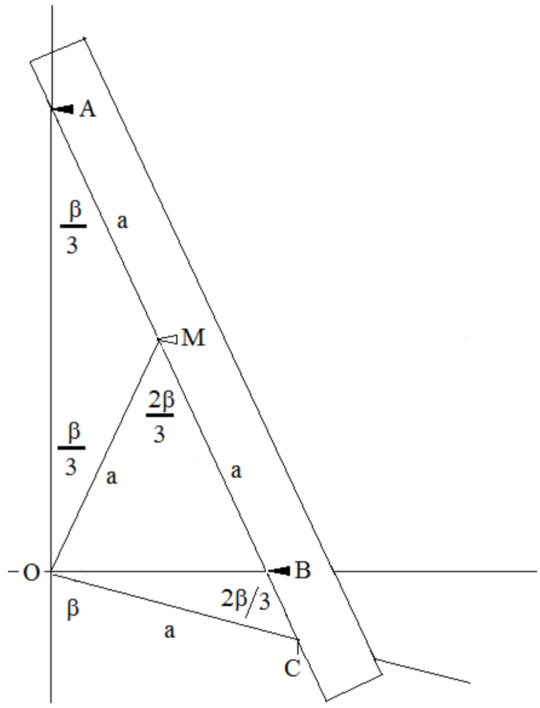
* Näheres hierzu im leider bereits vergriffenen Monoid 13, Sonderheft Dezember 1993.

durch A und B unterhalb der x-Achse in einem Punkt C schneidet. Da nun auch das Dreieck $\triangle CMO$ gleichschenklig ist, ist $\sphericalangle OCM = 2\alpha$ und folglich $\sphericalangle MOC = 180^\circ - 4\alpha$. Hieraus ergibt sich schließlich, dass die Gerade durch O und C mit der negativen y-Achse den Winkel 3α einschließt.

Konstruktion:
Zu einem Winkel $\beta < 90^\circ$ soll nun der Winkel $\beta/3$ konstruiert werden. Dazu müssen wir obige Konstruktion invertieren.



Figur 2



Figur 3

Wir benötigen ein Lineal mit den Markierungen A und B im Abstand $2a$ voneinander. In ein vorgegebenes rechtwinkliges Achsenkreuz tragen wir im Ursprung O den Winkel β gegen die negative y-Achse an und zeichnen auf dessen freiem Schenkel den Punkt C im Abstand a von O ein. Siehe Figur 2.

Nun passen wir das Lineal so in das Achsenkreuz ein, dass es durch den Punkt C verläuft, und A auf der y-Achse und B auf der x-Achse zu liegen kommen. (Siehe Figur 3.) Ergänzt man diese Figur so, dass die Figur 1 mit β anstelle von 3α entsteht, erhält man bei A schließlich den Winkel $\frac{\beta}{3}$.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Gitterpunkte im Kreis

Diesmal ist ein ein elementares Programm gesucht für eine wichtige mathematische Konstante, um die sich Mathematiker seit der Antike bemüht haben und auch heute noch versuchen, ihre Genauigkeit zu verbessern.

Gitterpunkte sind Punkte der x-y-Ebene, die ganzzahlige Koordinaten haben. Wir betrachten die Gitterpunkte, die in einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius n (natürliche Zahl) liegen; Randpunkte auf der Kreislinie gehören dazu.

a) Schreibe ein Programm (erklärende Kommentare zu den wichtigsten Schritten!), welches zu eingegebenem n die Anzahl G der Gitterpunkte berechnet und daraus den Quotienten $\frac{G}{n^2}$! Was fällt dir auf, wenn du die Ergebnisse mit steigendem n betrachtest? Erkläre dieses Phänomen!

b) Bei welchem n erhältst du mit dem Programm aus (a) die oben erwähnte mathematische Konstante auf 7 (10) Dezimalen genau?

c) Erweitere das Programm so, dass es eine Schachtelung für die mathematische Konstante in Abhängigkeit von n berechnet. Zähle dazu nicht nur die im Kreis liegenden Gitterpunkte, sondern auch diejenigen, die „gerade außerhalb" liegen.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2018 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 130

Ein Steinhaus*-Problem

Was ist bemerkenswert an der Zahl 3435? Nun es gilt $3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$. Gibt es weitere Zahlen $z = z_n z_{n-1} \cdots z_1 z_0$ (Dezimaldarstellung), für die

$$z = z_n^{z_n} + z_{n-1}^{z_{n-1}} + \cdots z_1^{z_1} + z_0^{z_0}$$

gilt ($n \geq 1$)?**

a) Beweise theoretisch, daß es keine 11-ziffrigen Steinhauszahlen gibt!

b) Zeige, dass eine 10-ziffrige Steinhauszahl mindesten drei mal die Ziffer 9 enthalten muss!

c) Wieviele solche 10-ziffrige Zahlen gibt es höchsten, die genau 4x (5x, .. ,9x) die Ziffer 9 enthalten?

d) Schreibe ein Computerprogramm, welches alle Steinhauszahlen berechnet! Dies ist im Prinzip möglich, da die theoretisch unendliche Zahlenmenge wegen (a) nach oben beschränkt ist. Beim Programm dürfen die Resultate aus (a+b) benutzt werden, auch wenn du sie nicht bewiesen hast.

Ergebnisse

* Benannt nach dem polnischen Mathmatiker Hugo Dyonizy Steinhaus (1887–1972), der sich als erster mit solchen Ziffernproblemen befasste.

** Dabei wird $0^0 = 0$ gesetzt.

a) Behauptung: Für jede Steinhauszahl z gilt $z < 10^{10}$ (10 Milliarden)!

Beweis: Aus $z = z_n^{z_n} + zz_{n-1}^{z_{n-1}} + \cdots + z_1^{z_1} + z_0^{z_0}$ folgt $z \leq 9^9 \cdot (n+1)$ und aus $z = z_n 10^n + z_{n-1}10^{n-1} + \cdots + z_1 10 + z_0$ $(z_0 \neq 0)$ folgt $z \geq 10^{10}$, insgesamt $10^{10} \leq z \leq 9^9 \cdot (n+1)$. $n = 10$ liefert $10^{10} \leq z \leq 9^9 \cdot 11 = 4.261625379$, ein Widerspruch; analog führt $n = 11$ zum Widerspruch, etc. Also ist $n \leq 9$ und z hat maximal 10 Ziffern.

b) Sei z eine 10-ziffrige Steinhauszahl. Enthielte z als höchste Ziffer eine 8, so gälte $z <= 10 * (8^8) = 167.772.160$, was nicht 10-stellig ist, ein Widerspruch. Genauso sieht man, dass mindestens drei mal die Ziffer 9 vorkommen muss.

c) Sei z eine 10-ziffrige Steinhauszahl mit mindestens drei Neunern. Die Fallunterscheidung für 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Neunern werden im folgenden PYTHON-Programm behandelt. Der Einzelfall von 10 Neunern, $z = 3874204890$ wird auch als solcher erledigt. Eine 10-ziffrige Steinhauszahl z mit anz9 Neunern gehorcht der Ungleichung `anz9*9**9 < z < anz9*9**9 + (10-anz9)*8**8` (Pythonschreibweise: * ist mal und ** ist hoch). Dadurch wird der Aufwand von 10 Milliarden solcher Zahlen auf 469.762.048 =ca 470 Millionen verkürzt, auf weniger als 5% , was zu akzeptablen Rechenzeiten führt. Die Laufzeit dafür ist bei meinem schon älteren Computer 2,56 h statt 58 h, also eine Verkürzung auf den 23-ten Teil. Alle PYTHON-Ausdrucke für 3 bis 9 Neuner liefern keine Steinhauszahl mehr.

```
#Voraussetzung: Bei 10 Ziffer
#existieren mindestens drei 9er
anz9=3
while anz9<10:
  von=anz9*9**9
  bis=anz9*9**9+(10-anz9)*8**8
  z=von
  while z<=bis:
       pz=steinhaus(z)
       if pz==z:
           print(z,"ist Steinhauszahl")
       z=z+1
  anz9=anz9+1
  print("Anzahl 9er",anz9-1,"beendet",)
```

```
#Funktion für Steinhauseigenschaft

def steinhaus(z):
      z=int(z);  sz=str(z);
      lz=len(sz);  pz=0
      i=1
      while i<=lz:
         s=z%10
         if s==0:
             pz=pz
         else:pz=pz+s**s
         z=z//10;
         i=i+1;
      return pz
```

d) Sei z eine Steinhauszahl mit höchstens 9 Ziffern. Ein Python-Programm (ähnlich wie oben) liefert neben der im Aufgabentext erwähnten Zahl 3435 nur noch eine weitere, nämlich 438.579.088. Die beiden genannten sind neben 0 und 1 die einzigen Steinhaus-Zahlen, die es gibt.

Der Schüler Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey hat dieses Problem in hervorragender Weise bezüglich Theorie und Programmierung gelöst.

Bericht über die Jubiläumsveranstaltung 50 Jahre Wurzel in Jena

von Frank Rehm

Am Samstag, den 2.9.2017, feierte unsere Schwesternzeitschrift für Mathematik „Die Wurzel“ im Volksbad Jena ihr 50jähriges Jubiläum. Geladen waren neben Freunden des Vereins Wurzel e.V. und Redaktionsmitarbeitern auch Vertreter der Stadtverwaltung Abteilung Bildung und natürlich viele ehemalige Wurzelleser und -mitarbeiter. In einer Podiumsdiskussion wurde berichtet, wie das Projekt einer Schülerzeitschrift 1966 aus dem Boden gestampft wurde, wobei weder Mittel, noch Räume, Mitarbeiter oder gar Erfahrung vorlagen. Seit vielen Jahren gibt das mathematische Institut der Jenaer Universität die Zeitschrift heraus, vergleichbar der Monoid in Mainz, flankiert vom Wurzel e.V., einem Förderverein der Zeitschrift.

Ohne Unterbrechung erschien ab Januar 1967 monatlich ein Heft bis zum heutigen Tag, dies verdeutlichte anschaulich ein tolles A1-Plakat, auf dem alle 300 Hefte mit ihren Covern in Form einer Spirale präsentiert werden. Ich wurde als Schüler schon mit dem Maiheft 1967 eifriger Leser und Löser der Wurzel.

Die Veranstaltung begann zunächst mit mehreren Grußbotschaften, auch von unserem Monoid, die ich als Redaktionsmitglied erarbeiten durfte und dem Publikum vortrug. Dabei ging ich besonders auch auf das Anliegen und die Historie von Monoid ein, die in den östlichen Bundesländern weniger bekannt ist. Mehrere Gäste wollten später sofort Näheres dazu erfahren, um darüber in Schule und Familie berichten zu können.

Bei dem historischen Rückblick über die Wurzel gingen die Ehemaligen auch darauf ein, wie mit einer Erika-Schreibmaschine die ersten Hefte entstanden und mit einem ORMEG-Gerät vervielfältigt wurden, mit dem Hinweis, dass die dabei freigesetzten chemischen Ausdünstungen stets längere Arbeitspausen erzwungen haben.

Der heutige Redakteur der Wurzel, Thomas Fischer, gab einen interessanten Überblick über Zahlen und Fakten zur Auflage, Aufgaben, Autoren, Lösungen und über die Einzelaktivitäten etwa der jährlichen Schüler-Akademie, gespickt mit der einen oder anderen Anekdote.

Besonders stellte er das vorige Jahr 2016 heraus, in dem Jena mit der Wurzel die Bundesrunde der Mathematikolympiade ausrichtete. Thomas Fischer erinnerte auch an die mittlerweile drei publizierten Bücher des Wurzel e.V.: eines über die schönsten Aufgaben aus 50 Jahren Wurzel (Springer Spektrum). Ein weiteres erschien anlässlich der 50. Landesrunde über Olympiaden, Ergebnisse, schöne

Aufgaben und Kuriositäten, und ein drittes kürzlich über die schönsten Aufgaben der Rubrik *Unsere Mathematik-Aufgabe* der DDR-Zeitschrift Wissenschaft und Fortschritt.

Wir wurden dann von zwei interessanten Festvorträge gefesselt, zum einen von Prof. Dr. Elias Fegert der Bergakademie Freiberg/Sa. zum Thema „Malen mit Zahlen“ und danach von Prof. Gronau über die Geschichte und Highlights der Mathematikolympiade. Prof. Fegert gibt seit Jahren Kalender mit Bildern und historischen Fakten zu bekannten mathematischen Funktionen und deren Forschern heraus. Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau überraschte die Gäste nach einem Überblick über die Olympiade-Historie mit einigen besonders hübschen IMO-Aufgaben der letzten Jahrzehnte, die jedes Mathematikerherz höher schlagen lassen. Hier die erste von drei Aufgaben, sie stammt aus der IMO (das Jahr wird besser nicht verraten) und wurde von Deutschland eingereicht:

> Es seien a und b positive ganze Zahlen, so dass $a^2 + b^2$ durch $ab + 1$ teilbar ist. Man beweise, dass $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ eine Quadratzahl ist.
> Viel Spaßallen Lesern und Lösern von Monoid!

Es folgten Kaffee und Kuchen und danach die erwähnte Podiumsdiskussion mit ehemaligen Mitarbeitern. Die Feier rundete dann eine abendliche gemütliche Runde in „Zur Noll“ mit intensiven Gesprächen der Mitarbeiter mit geladenen Gästen ab, wobei ich erneut für die Vorzüge von Monoid warb.

Lösung des Problems (B6)

Annahme: die drei gegebenen Ungleichungen seien sämtlich gültig. Man multipliziere die beiden letzten Ungleichungen miteinander. Es ergibt sich:

$$(a+b)^2cd(c+d) \leq (c+d)ab(ab+cd)$$

und dies impliziert

$$(a+b)^2cd \leq ab(ab+cd),$$

wegen $c + d > 0$. Aus der aM-gM-Ungleichung folgt $(a + b)^2 \geq 4ab$, so dass $4ab \cdot cd \leq ab(ab + cd)$ ist.

(1) Es gilt daher $3cd \leq ab$.

Multipliziert man die erste mit der letzten Ungleichung, dann erhält man

$$(a+b)^2(c+d) \leq (c+d)(ab+cd) \implies 4ab \leq (a+b)^2 \leq ab+cd.$$

(2) Somit ist $3ab \leq cd$.

Aus (1) und (2) folgt: $9ab \leq 3cd \leq ab$ - ein Widerspruch. Da die Annahme falsch ist, gilt die Behauptung.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Maurer, Bertram: Mathematik. Die faszinierende Welt der Zahlen.

Die im Untertitel suggerierte Einschränkung der Mathematik auf Zahlen bewahrheitet sich bei dem Sachbuches von Bertram Maurer gottlob nicht. Vielmehr ist dem Autor mit dem großformatigen Werk ein schöner Überblick über verschiedenste Gebiete der Mathematik und auch über die Entwicklung dieser zusammen mit der Medizin ältesten Wissenschaft gelungen. Die umfangreiche Bebilderung unterstützt dies u.a. mit Bildern historischer Mathematiker von Leonardo von Pisa über Dürer, Huygens, Kepler, Euler und Gaußüber Hilbert bis hin zu Alan Turing oder John von Neumann. Passend zu den Bildern der mathematischen „Helden“ wird in einem Gang durch 6000 Jahre Mathematikgeschichte dann eine mathematische Erkenntnis erläutert und durch weitere Abbildungen und Konstruktionen veranschaulicht.

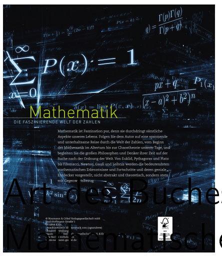
Nach einem Einstiegskapitel über die Frage „Was ist Mathematik?“ folgen Kapitel über das Zählen, die in der Antike vollzogene Entwicklung der Mathematik zur Wissenschaft, die Entwicklung im frühen Islam, die Wiedergeburt der Wissenschaften in Europa nach dem Mittelalter, die Entwicklung der Mathematik in der frühen Neuzeit bis hin zur Verbindung von Theorie und Praxis, der fortschreitenden Spezialisierung im 19. Jahrhundert, dem Prozess der zunehmenden Axiomatisierung bis hin zu Fragen der modernen Mathematik. Die Auswahl ist reichhaltig und spannend. Bei der Darstellung merkt man dem Autor an, dass er von Mathematik begeistert ist, aber man erkennt auch seine Erfahrung als Mathematiklehrer, darauf zu achten den richtigen Mittelweg zwischen der Vermittlung spannender Erkenntnisse und einer Überforderung des Lesers zu finden. Diese Balance ist aus Sicht des Rezensenten voll und ganz geglückt.

Es handelt sich bei „Mathematik. Die faszinierende Welt der Zahlen“ um ein schön zu lesendes Sachbuch. Die Auswahl der vorgestellten mathematischen Inhalte ist gelungen und macht Lust auf mehr, was Bertram Maurer im Anhang mit Literaturtipps zum Weiterlesen kanalisiert. Aufgelockert wird der Band durch Abbildungen von Originalquellen aus der Geschichte der Mathematik und Fotos aus unterschiedlichen mathematischen Science Centern. Der Leser hat allerdings insgesamt relativ wenig Möglichkeiten selbst mathematisch tätig zu werden, da im Wesentlichen die Entwicklungen der Mathematik vorgestellt werden. Auch die Entscheidung des Verlags den Band mit weißer Schrift auf schwarzem Papier zu drucken stellt einen Minuspunkt dar, da dadurch bei längerem Lesen die Augen - jedenfalls in der Altersklasse des Referenten - etwas ermüden.

Fazit:

Bertram Maurer hat ein sehr schï¿½nes Sachbuch vorgelegt, das sich für einen ersten Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Mathematik genauso eignet wie zum ersten Kennenlernen einzelner mathematischen Fragestellungen. Für an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler vor allem der Mittelstufe stellt es ein schönes Weihnachtsgeschenk dar und auch in einer gut sortierten Schulbibliothek sollte es nicht fehlen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Maurer, Bertram: Mathematik. Die faszinierende Welt der Zahlen; Edition Fackelträger, 2015; ISBN 978-3-7716-4603-5, gebunden, 289 Seiten.

Art des Buches:	Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	gut verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Bericht zur Mainzer Mathe-Akademie 2017

von Matthias Bergen

Vom 6. bis 10. September 2017 fand zum achten Mal die Mathe-Akademie an der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz statt. Hierbei handelt es sich um einen viertägigen Kurs (Mittwochabend bis Sonntagnachmittag) an der Universität, an dem 30 mathematik-interessierte Schüler aus ganz Deutschland teilnehmen können. Die Veranstaltung bietet durch Einblicke in die Uni-Mathematik die Möglichkeit, über den Tellerrand der Schulmathematik hinauszuschauen. Dabei kann sich jeder Schüler für einen von drei verschiedenen Kursen entscheiden, die von Dozenten am Institut für Mathematik der Mainzer Universität angeboten werden. Die erarbeiteten Ergebnisse aus den Kursen werden am letzten Tag den anderen Akademieteilnehmern präsentiert. Die Akademie wird durch studentische Helfer und zwei Lehrkräfte betreut.

Wie in den Vorjahren auch, wurden die Teilnehmer im Jugendhaus Don Bosco untergebracht. Dort hatten wir an den Abenden die Möglichkeit, uns kennenzulernen, gemeinsame Filme zu schauen oder Spiele zu spielen.

Von Donnerstag bis Samstag ging es für uns an die Universität. Zu Beginn wurden die diesjährigen Kursthemen vorgestellt. Dabei standen zur Auswahl: „Origami macht das Unmögliche möglich“ von Dr. Cynthia Hog-Angeloni, „Wie rechnet ein Taschenrechner?“ von Prof. Dr. Theo de Jong und „Obertöne und Fourierreihen“, angeboten von Prof. Dr. Manfred Lehn. Nachdem sich jeder für einen Kurs entschieden hatte, gingen wir gemeinsam in unsere Kursräume und begannen, uns mit unserem Wahlthema zu beschäftigen. In einigen Kaffeepausen unserer Kurszeiten konnten wir uns mit den studentischen Helfern über ein Mathematikstudium und das Universitätsleben austauschen.

Neben dem ausgiebigen Auseinandersetzen mit der Mathematik wurde uns ein abwechslungsreiches Rahmenprogramm geboten. So war eine Uniführung über den Campus der Johannes-Gutenberg-Universität, ein Nachmittag beim Minigolf und freie Zeit in der Mainzer Innenstadt mit einem anschließenden Kultur-Abend im Mainzer Unterhaus mit Kabarettist HG. Butzko und seinem Programm „Menschliche Intelligenz – Oder: Wie blöd kann man sein?“ mit dabei. Am Samstag haben wir zudem einen mathematischen Vortrag von Tilman Sauer zur Geschichte der Mathematik gehört und hatten ein gemeinsames Pizza-Essen, bevor es mit den Präsentationsvorbereitungen losging.

Sonntag war Präsentationstag. Nun ging es darum, den anderen Teilnehmern zu präsentieren, was wir in unseren Kursen erarbeitet haben, sodass man von allen Themen der Akademie etwas mitnehmen konnte. Dabei wurden wir während der Akademie nicht nur darin unterstützt, die Zusammenhänge unseres Themas zu verstehen, sondern auch, was es benötigt, einen guten Vortrag zu halten und anderen Teilnehmern die Erkenntnisse des Kurses verständlich und überschaubar zu vermitteln. Nach einem letzten gemeinsamen Essen war das Verabschieden angesagt.

Die Mainzer Mathe-Akademie war für alle Teilnehmer wie immer eine tolle Erfahrung. Auch verschiedene Teilnehmer früherer MMAs kamen im Laufe der Zeit zu Besuch. Wir hatten eine schöne Zeit und eine super Gemeinschaft. Die Akademie ist auf jeden Fall für alle weiterzuempfehlen, die Freude und Spaßan der Mathematik haben und sich gerne Mal mit einem mathematischen Thema auseinandersetzen, wie man es in der Schule wohl eher nicht antreffen wird.

Wir, die Teilnehmer der MMA, möchten uns im Namen aller Teilnehmer bei den Mitwirkenden und besonders bei den Organisatoren Herrn Gruner und Herrn Mattheis sowie den Kursleitern, für die Mühe bedanken, uns eine schöne Akademie ermöglicht zu haben.

Matthias Bergen ist Schüler der 13. Klasse des Rhein-Wied-Gymnasiums in Neuwied und außerdem fleißiger Monoid-Löser. So erhielt er dieses Jahr das Goldene M. An der MMA nahm er dieses Jahr zum zweiten Mal teil.

MMA-Termin 2018

Vielleicht seid Ihr jetzt neugierg geworden und möchtet auch einmal an der MMA teilnehmen, um Euch vier Tage mit Mathematik zu beschäftigen und andere Mathematik-begeisterte kennenzulernen? Die nächste findet vom 29. August bis 2. September 2018 statt. Näherer Informationen findet Ihr im Internet unter

`https://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 130

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Katharina Beck 54, Chantel Belz 6, Julia-Michelle Butter 12, Tom Erkens 4, Lars Schall 20, Fabian Thater 7;
Kl. 6: Linus Kemmeter 21, Nils Koch 25;
Kl. 7: Lukas Born 44, Lea Daum 36, Paul Schall 42, Jonas Schneider 36, Trevor Schöller 32, Victoria Strunk 29;
Kl. 9: Torben Bürger 55, Virginia Fox 9,5, Maximilian Hauck 125,5,Sarah Kästner 12; **Kl. 13:** Katharina Rößler 38.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 13: Nils Werner 12.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg:
Kl. 6: Tobit Roth 30,5; **Kl. 8:** Torben Hertrampf 8;
Kl. 11: Annika Bünnagel 11;**Kl. 12:** Frauke Stoll 8.

Bielefeld, Gymnasium am Waldhof: Kl. 8: Roxana Mittelberg 17.

Duisburg, FHG: Kl. 7: Lena Hirtz 2.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Philip Memmer 2;
Kl. 7: Noah Böhm 3, Jonah Hochbaum 4, Olivia Stachow 6, Simon Taubert 7;
Kl. 8: Tim Kruse 6; **Kl. 13:** Adriana Stenger 23, Marcel Wittmann 20.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 11: Patrick Riebe 19.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Aleksandra Herbst 76; **Kl. 9:** Tobias Jedich 36,5.

Friedrichsdorf,Main/Taunus International School
Kl. 3: Alice Hogan 10, Om Paranjape 6, Doris Resch 6, Grace Yu 10;
Kl. 4: Jule Beinker 10, Ben Bergmann 10, Alessia Conte 4, Maya Dominguez 6, Tim Pilger 10;
Kl. 5: Olivier de Vogel 4, Lina Decker 16, Ana Flores 16, Borja Garcia Serrar 13, Megan Song 13.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Maximilian Göbel 87.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule
Kl. 6: Jannik Hastedt 2, Justin Sehl 9, Johannes Sabel 6;
Kl. 7: David Baldus 7;**Kl. 8:** Yosra el Mahjoub 30;
Kl. 9: Dominik Horstkötter 18;**Kl. 10:** Melanie Schuy 32;
Kl. 11: David Storzer 81,5.

Kelkheim, Eichendorffschule: Kl. 11: Melina Mayle 72,5.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach: Kl. 8: Beatrice Popescu 10.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter: Kl. 9: Dennis Mayle 95.

Linz, Martinus Gymnasium: Kl. 6: Simon Waldek 30,5.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 5: Gregor Salaru 122,5.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Anouk Sturm 4, Johanna Trees 9, Franziska Weber 5;
Kl. 6: Eugene Koch 13,5, Lilja Loibl 2, Kenan Milanovic 1,5;
Kl. 7: Yara Mattner 10, Timo Neimke 6;
Kl. 8: Tekla Beridze 10;
Kl. 10: Ivan Khomutovski 20;
Kl. 11: Marc Hoffmann 11;**Kl. 12:** Melanie Weibrich 31,5.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:
Kl. 12: Silas Rathke 45,5.

Neustadt an der Weinstraße, Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium:
Jan Günther 9,5.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):
Kl. 7: Emily Kievskiy 38, Jessica Gossen 8, Nils Müller 9;
Kl. 8: Simon Bergen 18, Tamara Kirschbaum 15, Renée Lötsch 17, Lara Rösner 12, Fiona Ruschke 15, Gloria Schrepf 20;
Kl. 9: Duy Kha Pham 15;
Kl. 10: Melissa Henschel 9, India Mähler 7;
Kl. 11: Jonas Ahlfeld 12, Darleen Baum 22;
Kl. 12: Matthias Bergen 102, Jasmin Hallyburton 14, Vinh-An Pham 65, Verena Rüsing 40.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):
Kl. 5: Jonathan Friedel 7,5, Daniel Roussev 9, Esther Schmedding 29;
Kl. 6: Max Budäus 18;
Kl. 7: Kathrin Bormann 29,5, Felix Halas 13, Paulina Herber 17, Alexandra Hünlein 15, Josephine Kaßner 20, Paul Keller 11;
Kl. 8: Annika Borrmann 29,5, Sönke Schneider 159, Arne Witt 9;
Kl. 9: Lennard Freud 31; **Kl. E1:** Kristin Teichert 40, Jan Wabnig 53;

Pirmasens, Leibniz Gymnasium: Kl. 10: Artur Yeganyan 15,5.

Tangermünde, Diesterweggymanisum: Kl. 7: Miriam Büttner 74.

Wien, Sir Karl Popper Schule: Kl. 5: Lorenz Hübel 38.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium: Kl. 7: Raphael Gaedtke 33,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium: Kl. 6: Mareike Bühler 34.

Die Monoid-Preisträger 2017

Das Goldene M: Matthias Bergen (Rhein-Wied-Gynasium, Neuwied).

Monoid-Fuchs: Gregor Salaru (Otto-Schott-Gymnasium, Mainz).

Sonderpreis: Sönke Schneider (Gymnasium Oberursel).

Forscherpreise: Maximilian Hauck (Elizabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey).

1. Preise:
Miriam Büttner, Maximilian Göbel, Maximilian Hauck, Aleksandra Herbst, Dennis Mayle, Melina Mayle, Vinh-An Pham, Sönke Schneider, David Storzer.

2. Preise:
Katharina Beck, Lukas Born, Torben Bürger, Lorenz Hübel, Emily Kievskiy, Silas Rathke, Katharina Rößler, Verena Rüsing, Paul Schall, Kristin Teichert, Jan Wabnig.

3. Preise:
Mareike Bühler, Lea Daum, Lennard Freud, Raphael Gaedtke, Tobias Jedich, Yosra el Mahjoub, Tobit Roth, Jonas Schneider, Trevor Schöller, Melanie Schuy, Simon

Waldeck, Melanie Weibrich.

Monoid-Jahresabonnements 2018:
Darleen Baum, Annika Borrmann, Kathrin Borrmann, Josephine Kaßner, Linus Kemmeter, Ivan Khomutovski, Nils Koch, Lars Schall, Esther Schmedding, Gloria Schrepf, Adriana Stenger, Victoria Strunk, Marcel Wittmann.

Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2016/2017 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet, die Forscherpreise von Herrn Dr. Genannt, der Sonderpreis von Casio. Der Preis für den Träger des Monoid-Fuchs von Herrn Mattheis und Herrn Dr. Genannt. Der Preis für den Träger des Goldenen M wurde gestiftet vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und dem Institut für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Die Monoid-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 10€ für das Kalenderjahr 2018 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Emily Searle-White
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 37 | Heft 132 | Dezember 2017

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`