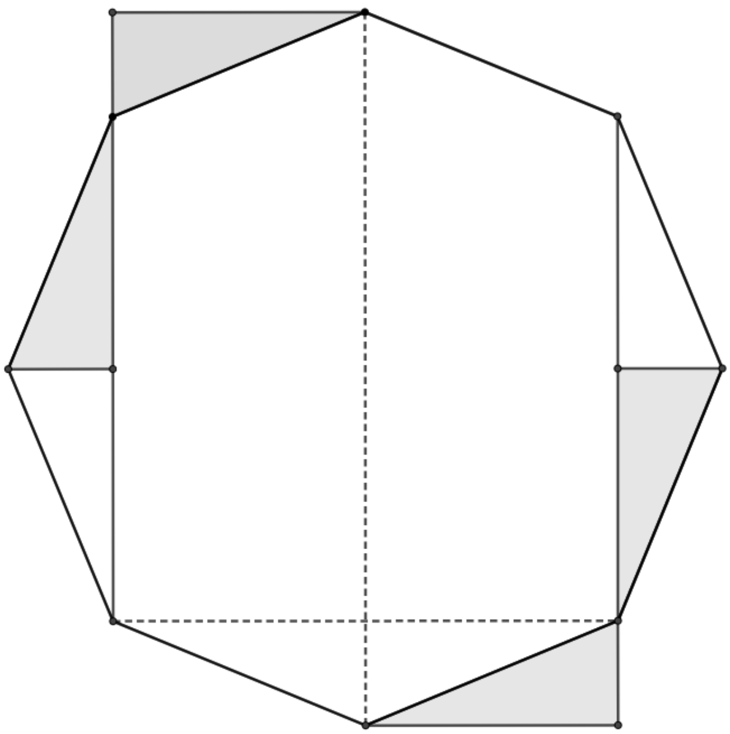
Jahrgang 38 Heft 133 März 2018

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.05.2018.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“.

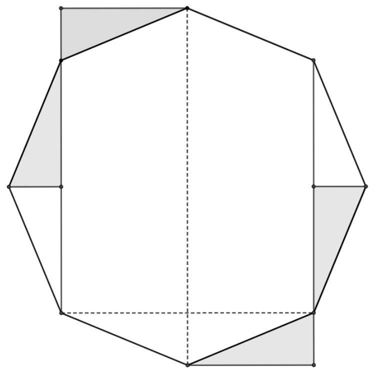
Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Lösung ohne Worte
Flächeninhalt eines Oktogons
gefunden von Hartwig Fuchs

Man zeige, dass der Flächeninhalt eines regelmäßigen Achtecks gleich dem Produkt der Längen seiner kürzesten und längsten Diagonale ist.



Die besondere Aufgabe
sinus(1°)
von Frank Rehm

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Varation zum Thema „irrational", über das Ihr in Monoid 131 am Beispiel $\sin(15^\circ)$ lesen könnt. Die folgende Aufgabe stammt aus einer russischen Stadtolympiade aus dem Jahr 1983:

Aufgabe: Man beweise, dass $\sin(1^\circ)$ eine irrationale Zahl ist!

Beweis: Angenommen $\sin(1^\circ)$ wäre rational, also auch $\sin^2(1^\circ)$ und nach der Formel

(1) $\cos(2\vartheta) = 1 - 2\sin^2(\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1$

auch $\cos(2^\circ)$, $\cos(4^\circ)$ usw. bis $\cos(32^\circ)$. Nun ist bekanntlich $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos(30^\circ) = \cos(32^\circ - 2^\circ)$ irrational, also nach einem Additionstheorem:

(2) $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos(32^\circ)\cos(2^\circ) + \sin(32^\circ)\sin(2^\circ)$.

Nach wiederholter Anwendung von (1) ist der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (2) rational. Für den zweiten Ausdruck gilt nach der Formel $\sin(2\vartheta) = 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$ und (1):

$$\sin(32^\circ)\sin(2^\circ) = 16\cos(16^\circ)\cos(8^\circ)\cos(4^\circ)\cos(2^\circ)(2\sin(1^\circ)\cos(1^\circ))^2$$
$$\sin(32^\circ)\sin(2^\circ) = 64\cos(16^\circ)\cos(8^\circ)\cos(4^\circ)\cos(2^\circ)(\sin^2(1^\circ)\cos^2(1^\circ)),$$

d.h. auch der zweite Ausdruck ist rational, also auch $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ – Widerspruch, also gilt die Behauptung.

Bemerkung: Den Nachweis der Irrationalität von $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ kann man nach einem bekannten Schema führen, das etwa für $\sqrt{2}$ bekannt ist:

Angenommen es gilt für ganzzahlige teilerfremde p, q die Gleichung $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, dann folgt daraus $3q^2 = 4p^2$ und p muss durch 3 teilbar sein, also p^2 durch 9 und somit $3q^2$ auch durch 9 bzw. q durch 3 – Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q, also gilt die Behauptung.

Was uns so über den Weg gelaufen ist

Palindromie zweier Gleichungspyramiden

gefunden von Hartwig Fuchs

$$\begin{aligned} 47 + 2 &= 49 \\ 497 + 2 &= 499 \\ 4997 + 2 &= 4999 \\ 49997 + 2 &= 49999 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 47 \cdot 2 &= 94 \\ 497 \cdot 2 &= 994 \\ 4997 \cdot 2 &= 9994 \\ 49997 \cdot 2 &= 99994 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beide Gleichungspyramiden sind nach dem durch ihre 2., ihre 3. und ihre 4. Zeile gegebenen Muster beliebig weit fortsetzbar.

Nachweis: Wir kürzen die Zahlen $499\cdots997$ mit n-mal der Ziffer 9, $n = 1, 2, 3, \ldots$ durch 49_n7 ab. Für jedes $n \geq 1$ gilt dann:$49_n7 + 2 = 49_{n+1}$, wegen $49_n9 = 49_{n+1}$. Für die rechte Pyramide bemerken wir zunächst, dass $9_n \cdot 2 + 1 = 10^n + 9_n$ ist wegen $9_n \cdot 2 + 1 = 19_{n-1}8 + 1 = 19_n = 10^n + 9_n$, $n > 1$. Für $n = 1$: $9_1 \cdot 2 + 1 = 10^1 + 9_1$. Damit ergibt sich für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} 49_n7 \cdot 2 = 9_{n+1}4 \text{ wegen} & \\ &= (4 \cdot 10^{n+1} + 9_n \cdot 10 + 7) \cdot 2 \\ &= 8 \cdot 10^{n+1} + (9_n \cdot 2 + 1) \cdot 10 + 4 \\ &= 8 \cdot 10^{n+1} + (10^n + 9_n) \cdot 10 + 4 \\ &= 9 \cdot 10^{n+1} + 9_n \cdot 10 + 4 = 9_{n+1}4. \end{aligned}$$

Zahlenknobelei

von Frank Rehm

Es geht doch nichts über schöne Knobeleien! Vor allem besondere Zahlen sind faszinierend, jedoch findet man im Internet dazu nur meist bereits Bekanntes. Wir stellen die Frage:

Welche Zahlen sind gleich einem mathematischen Term aus ihren Ziffern, wobei im Term die vier Grundrechenarten und die Potenz eingesetzt werden können? Solche Zahlen nennen wir TZ-Zahlen. Gilt zusätzlich, dass die Ziffernfolge mit der der Ausgangszahl übereinstimmt so handelt es sich um eine STZ (spezielle TZ).

Für alle Neugierigen zwei Beispiele:
$1024 = (4-2)^{10}$ ist eine TZ, ja, leider keine STZ (sie beginnt nicht mit 1).
$1285 = (1+2^8) \cdot 5$ ist eine STZ!

Präsidenten–Wahl in Laputa, Teil III

von Hartwig Fuchs

Laputa-Lazuli III wurde Präsident der Gelehrtenrepublik Laputa (siehe Monoid 133), nachdem er drei Aufgaben gelöst hatte, die ihm vom Wissenschaftsrat, einem Regierungsgremium, gestellt worden waren. Diese Aufgaben waren ohne mathematische Vorkenntnisse allein durch logische Argumentation lösbar.

Aufgabe 1

An einem Grillfest im Kindergarten nehmen 163 Personen teil. Da man für jeden Erwachsenen zwei Würstchen und für jedes Kind ein Würstchen grillen will, hat man 200 Würstchen eingekauft. Wie viele Erwachsene und Kinder kamen zum Fest?

Aufgabe 2

Eine Gruppe von 16 Wissenschaftlern – Geologen, Glaziologen und Klimatologen –, darunter mehr Glaziologen als Klimatologen, fliegt zu einer Forschungsexpedition in die Antarktis. In ihrem Flugzeug, in dem sich keine anderen Passagiere befinden, sitzen sie zu jeweils Vieren nebeneinander. Der Pilot bemerkt dazu wahrheitsgemäß: Wie auch immer vier Wissenschaftler beim Start sich zusammengesetzt haben, *stets* ist mindestens ein Geologe dabei gewesen. Wie viele Geologen, Glaziologen und Klimatologen sitzen im Flugzeug?

Aufgabe 3

An einer Trainingsstunde eines Sportvereins nehmen 34 junge Leute teil. Man weiß, dass es unter ihnen mindestens einen sogenannten Fremden gibt, der kein Mitglied des Vereins ist. Zudem ist bekannt: Von jeden zwei Teilnehmern ist höchstens einer ein Fremder. Wie viele Fremde nehmen an der Trainingsstunde teil?

Lösung der Aufgabe 1

Wenn man zunächst für jeden Teilnehmer des Festes ein Würstchen grillt, dann bleiben $200 - 163 = 37$ Würstchen übrig – und die sind für die Erwachsenen vorgesehen, die ja zwei Würstchen bekommen sollen. Also nehmen 37 Erwachsene und somit 126 Kinder an dem Fest teil.

Lösung der Aufgabe 2

Annahme: Im Flugzeug befinden sich mindestens drei Glaziologen. Bei vier Glaziologen könnten diese zusammensitzen; sind es drei Glaziologen, so könnte ein

Klimatologe bei ihnen sitzen. In beiden Fällen ist des Piloten Aussage – „stets!“– nicht wahr. Da die Annahme folglich falsch ist, gilt: Es sind höchstens zwei Glaziologen im Flugzeug.

Da es jedoch mindestens einen Klimatologen und mehr Glaziologen als Klimatologen gibt, befinden sich zwei Glaziologen und daher ein Klimatologe sowie 13 Geologen im Flugzeug.

Lösung der Aufgabe 3

An der Trainingsstunde nimmt mindestens ein Fremder teil. Einer von ihnen sei x genannt. Wenn man nun der Reihe nach aus x und jedem der übrigen 33 Teilnehmer ein Paar gebildet denkt, dann gibt es unter diesen 33 möglichen Paaren nach Voraussetzung keines, das aus zwei Fremden besteht. Folglich nimmt nur ein Fremder an der Trainingsstunde teil.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Wieder einmal wollen Peter und Paul ins Kino gehen. Diesmal darf Paul eine Wette vorschlagen, deren Verlierer den Gewinner einladen muss. Paul sagt zu Peter: „Hier habe ich für dich drei Haufen Spielsteine vorbereitet. Der eine besteht aus 51, der zweite aus 49, der kleine Haufen aus 5 Steinen. Du darfst nacheinander ziehen, wobei ein Zug entweder bedeutet, dass du zwei Haufen zusammenlegst oder dass du einen Haufen, wenn er eine gerade Anzahl von Steinen enthält, in zwei gleich große Haufen aufteilst.“

„Worauf soll das hinaus?“ fragt Peter. Paul entgegnet: „Wenn du es schaffst, mit diesen Zügen 105 Haufen aus je einem Spielstein herzustellen, dann hast du gewonnen, sonst ich.“

„Das ist aber streng. Du musst mir ein wenig entgegenkommen. Es sollte schon reichen, wenn ich 40 Haufen erhalten habe“, meint Peter. Paul, leicht überrumpelt, akzeptiert den Wunsch von Peter, der daraufhin gleich die ersten Züge durchführt.

Wer von den beiden kann sich sicher sein, vom anderen eingeladen zu werden? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2018 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

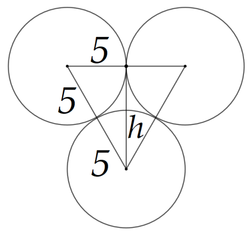
Lösung der Aufgabe aus Heft 131

In Heft 131 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Apfelernte

Herr Pommer hatte in diesem Jahr eine reichhaltige Apfelernte. Seine Nichte Eva half ihm, alle Äpfel im Keller einzulagern. Da sämtliche Äpfel den gleichen Durchmesser von 10 cm besaßen, passten sie genau in die Vorratsregale. Diese waren 160 cm breit und 90 cm tief. Während Eva die Äpfel zunächst in 9 Reihen zu 16 Früchten nebeneinander anordnete, kam ihr plötzlich eine Idee. „Glaubst Du, dass ich auch mehr als 144 Äpfel in einem Regal unterbringen kann?“ fragte sie ihren Onkel. „Dann liegen aber nicht mehr alle Äpfel auf dem Boden des Regals,“ entgegnete dieser. „Doch, doch, das geht trotzdem,“ beharrte Eva. „Hier, schau einmal!“ Herr Pommer schaute sich das von seiner Nichte gefüllte Regal an und begann zu zählen... Lassen sich mehr als 144 Äpfel dieser Größe auf den Boden eines Regals mit der angegebenen Fläche legen? (Die Lösung soll auch eine kurze Begründung enthalten.)

Lösung



Wenn Eva die erste Reihe mit 16 und die zweite Reihe versetzt mit 15 Äpfeln füllt, bilden die Mittelpunkte der Früchte ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 10 (siehe Figur, alle Angaben in cm).Der Abstand der einzelnen Reihen ist dann die Höhe h dieses Dreiecks.

Mit dem Satz von Pythagoras gilt: $h^2 = 10^2 - 5^2$, also $h = \sqrt{75} \approx 8,66$. Die Mittelpunkte der Äpfel in der ersten und der letzten Reihe haben einen Abstand von jeweils 5 zum Rand, so dass die Anzahl x der auf diese Weise zur ersten Reihe hinzugefügten Reihen durch die Abschätzung $90 \geq 2 \cdot 5 + x \cdot \sqrt{75}$ bestimmt ist. Auflösen ergibt $x \leq \frac{80}{\sqrt{75}} \approx 9,24$. Insgesamt kann Eva daher 10 Reihen in ein Regal legen anstatt 9 Reihen bei der ersten Methode. Die Anzahl der Äpfel beträgt somit $5 \cdot 16 + 5 \cdot 15 = 155$. Daher ist die Frage mit Ja zu beantworten.

Eine völlig oder fast vollständig richtige Lösung haben Maximilian Göbel, Rebecca Pergament, Julian Scheinert, Sönke Schneider, Marc Strufe und Yannik Spitzley eingesandt. Bei den anderen Einsendern fehlte der Nachweis, dass sich wirklich eine Reihe mehr legen lässt, wenn man die Äpfel versetzt anordnet.

Die analoge Überlegung für die erste Reihe mit 9 Äpfeln entlang der 90-cm-Kante ergibt eine Einsparung von zwei Reihen, so dass 18 Reihen mit insgesamt 153 Äpfeln möglich sind. Die optimale Anzahl hängt also von der Richtung des Einordnens ab. Und vielleicht wäre ja ein Verzicht auf 16 Äpfel in der ersten Reihe zugunsten breiterer Lücken, in welche die Früchte der zweiten Reihe etwas tiefer hineinrutschen könnten, unter Umständen noch besser? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

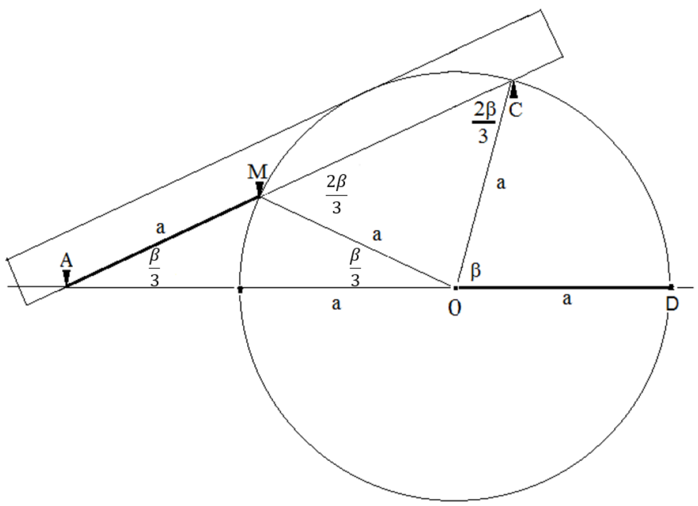
Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von Zirkel und markiertem Lineal nach Archimedes

von Hans-Jürgen Schuh

In Monoid 132 habe ich erwähnt, dass Winkel nur in Spezialfällen mit Hilfe von Zirkel und *unmarkiertem* Lineal gedrittelt werden können. Hier hilft die Verwendung eines *markierten* Lineals, das geschickt in die Konstruktion eingepasst wird. Ich habe dort die Winkeldreiteilung nach Nikomedes (griechischer Mathematiker im 2. Jh. v. Chr.) vorgeführt.

In diesem Artikel wird eine weitere Variante der Dreiteilung vorgestellt, die auf Archimedes (ca. 287 v. Chr.–212 v. Chr.), den berühmten Mathematiker, Physiker und Philosophen der Antike zurückgeht. Abschließend wird gezeigt, dass die Konstruktionen von Nikomedes und von Archimedes einander äquivalent sind. Näheres hierzu in

Konstruktion



Figur 1

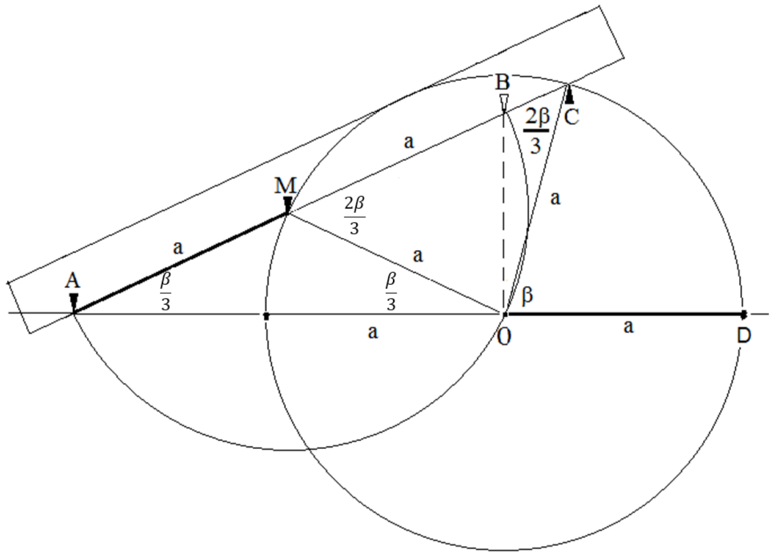
Eine horizontale Gerade diene als x-Achse. Auf ihr wird eine Strecke $\overline{OD}$ der Länge a abgetragen. Um O schlage man den Kreis mit Radius a und trage in O einen Winkel β, mit $0 < \beta < 90^\circ$, gegen die positive x-Achse an. Dessen freier Schenkel schneidet die Kreislinie in einem Punkt C. Folglich ist $|\overline{OC}| = a$.

Außerdem präpariere man ein Lineal mit den Marken A und M im Abstand a, und passe dieses so in die Konstuktion ein, dass es durch den Punkt C verläuft und A auf der x-Achse und M auf der Kreislinie zu liegen kommen (siehe Figur 1).

Behauptung: $\sphericalangle OAC = \frac{\beta}{3}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\beta &= \sphericalangle OAC + \angle ACO \quad (\text{Außenwinkel an } \triangle AOC)\\ &= \sphericalangle OAC + \sphericalangle OMC \quad (\triangle CMO \text{ ist gleichschenklig})\\ &= \sphericalangle OAC + \sphericalangle OAC + \sphericalangle MOA \quad (\text{Außenwinkel an } \triangle AOM)\\ &= 3 \cdot \sphericalangle OAC \quad (\triangle AOM \text{ ist gleichschenklig}) \implies \sphericalangle OAC = \frac{\beta}{3}\end{aligned}$$



Figur 2

Zeichnet man in die Konstruktion aus Figur 1 im Punkt O die Senkrechte auf die x-Achse ein (y-Achse), so schneidet diese die Gerade durch A und M in einem Punkt B (siehe Figur 2).

Da der Kreis um M mit Radius a durch A und O verläuft und $\sphericalangle AOB = 90°$, ist dieser Kreis gerade der Thaleskreis über der Hypotenuse $\overline{BA}$, und folglich ist auch $|\overline{BM}| = a$.

Dreht man Figur 2 im Uhrzeigersinn um 90°, so erhält man Figur 3 aus dem früheren Artikel in Monoid 132, was bedeutet, dass die Konstruktionen von Nikomedes und von Archimedes einander äquivalent sind.

Eine farbige Geometrie

von Hartwig Fuchs

Der Anfang

Als der englische Student Francis Guthrie am 23. Oktober 1852 seinem Lehrer Auguste de Morgan (Logiker, 1806-1971) erzählte*, er sei auf ein anscheinend einfaches geometrisches Problem gestoßen, da konnte er nicht ahnen, dass die Mathematiker noch 124 Jahre brauchen sollten, um es zu lösen.

* So berichtete es de Morgan in einem Brief an seinen Kollegen William R. Hamilton (Mathematiker, Entdecker der Quaternionen; 1805-1865).

Guthrie hatte eine Landkarte der englischen Grafschaften koloriert und dabei war ihm aufgefallen, dass er dazu nur vier Farben benötigte, wenn er zwei Grafschaften mit einer gemeinsamen Grenze verschieden färbte. Guthrie vermutete daher

(1) Man kann jede (2-dimensionale) Landkarte mit höchstens vier Farben so kolorieren, dass jede zwei Gebiete mit einer gemeinsamen Grenze verschiedenfarbig sind.**

Beispiel 1: Kolorierungen

Bei manchen Landkarten reichen 2 Farben wie in Abb. 1 oder 3 Farben wie in Abb. 2 zur Kolorierung; für eine Landkarte wie in Abb. 3 – in der jedes der vier Gebiete eine gemeinsame Grenze mit jedem der drei anderen Gebiete aufweist – sind dazu 4 Farben erforderlich.

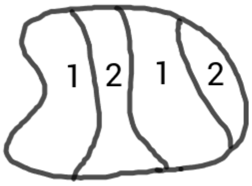


Abb. 1

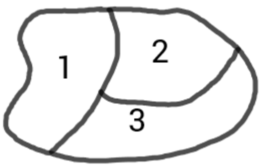


Abb. 2

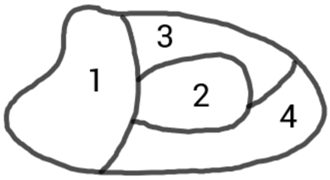


Abb. 3

Die farbige Geometrie

Der Vier-Farben-Satz (1)** ist das wohl bekannteste Beispiel für Probleme, die in einer Geometrie untersucht werden, die wir die *farbige Geometrie* nennen werden. Diese Geometrie konstruiert nicht. Sie berechnet und misst nicht wie die euklidische Geometrie, die man in den Schulen lehrt. Sie färbt ihre Objekte und beschreibt die mathematischen Konsequenzen solchen Tuns.

Kolorierbarkeit

Der Vier-Farben-Satz weist auf eine Grundfrage der farbigen Geometrie hin: kann man gegebene geometrische Objekte unter bestimmten Voraussetzungen kolorieren oder nicht? Dieser Frage gehen wir an zwei Beispielen nach, die zeigen sollen, dass eine Antwort wohl nicht immer naheliegend ist.

Beispiel 2: Eine mögliche Kolorierung

Ein konvexes n-Eck P_n, $n \geq 4$ sei durch sich nicht kreuzende Diagonalen in Dreiecke zerlegt (vgl. Abb. 5) – eine solche Triangulierung ist stets möglich. Dann gilt:

(2) Es gibt eine Färbung der Eckpunkte der Dreiecke mit den Farben – etwa blau (b), grün (g) und rot (r) – mit der Eigenschaft: Die Eckpunkte eines jeden Dreiecks der Triangulierung von P_n sind verschieden gefärbt.

Nachweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Ecken von P_n.
Die Behauptung gilt für $n = 4$, also für ein 4-Eck P_4 (vgl. Abb. 4). Annahme: (2) gilt für $n = k$, $k \geq 4$. Wir zeigen, dass dann (2) auch für $n = k + 1$ zutrifft.

** Wolfgang Haken und Kenneth Appel haben 1976 die Vermutung von Guthrie mit Hilfe von Computern und umfangreichen graphentheoretischen Überlegungen bewiesen.

Es seien A, B und C aufeinander folgende Eckpunkte eines triangulierten $k+1$-Ecks P_{k+1} und P_k sei das konvexe k-Eck, das man erhält, wenn man das Dreieck ABC (ohne die Seite AB) von P_{k+1} abschneidet, vgl. Abb. 5. Nach Induktionsvoraussetzung gilt (2) für P_k. Weil dann A und B als Eckpunkte eines Dreiecks von P_k verschieden gefärbt sind, kann man den Punkt C in der noch nicht verwendeten dritten Farbe kolorieren. Es gilt also (2) auch für $n = k + 1$.

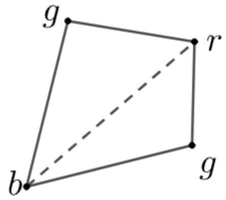


Abb. 4

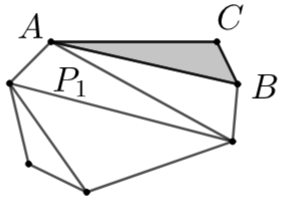


Abb. 5

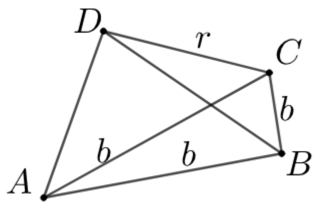


Abb. 6

Beispiel 3: Eine unmögliche Kolorierung

In der Ebene sei ein konvexes Viereck $ABCD$ samt seinen Diagonalen gegeben. Jede Seite des Vierecks sei so mit einer der Farben blau, grün, rot gefärbt, dass gilt:

(3) Eines der vier Dreiecke ABC, ACD, BCD, BDA hat nur blaue Seiten und eines nur rote Seiten.

Kann man eine Kolorierung der Viereckseiten mit der Eigenschaft (3) finden?
Annahme: Es gibt ein blaues Dreieck.
Es sei A ein Eckpunkt des blauen Dreiecks. Dann hat entweder das Dreieck ABC oder das Dreieck ABD nur blaue Seiten. Die Abb. 6 zeigt: Im ersten Fall ist keines der Dreiecke ACB, BCD und BDA rot; im zweiten Fall ist keines der Dreiecke ABC, BCD und BDA rot. Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man von B, von C und von D als Eckpunkten eines blauen Dreiecks ausgeht. Daraus folgt: Gibt es ein blaues Dreieck, so gibt es kein rotes Dreieck. Ist jedoch die Annahme falsch, so gibt es kein blaues Dreieck. Also ist es nicht möglich, die Viereckseiten so zu färben, dass (3) gilt.

Folgen einer Kolorierung

Neben dem Problem der Kolorierbarkeit stellt sich für die farbige Geometrie die spannendere Frage: Welche Eigenschaften besitzen geometrische Objekte nach ihrer Färbung? In den nachfolgenden Beispielen – in denen die Existenz einer Kolorierung jeweils vorausgesetzt ist – werden sich dazu einige Antworten ergeben.

Beispiel 4: Farbige Punkte

Die Punkte der Ebene seien beliebig blau, grün oder rot gefärbt. Dann gilt:

(4) Es gibt zwei gleichfarbige Punkte vom Abstand 1.

Mit M_b, M_g, M_r seien die Mengen der blau, grün, rot gefärbten Punkte bezeichnet.

Sind zwei dieser Mengen endlich, dann gibt es eine Halbebene H der Ebene, in der sämtliche Punkte gleichfarbig sind, und in H befinden sich dann Punktepaare, für die (4) gilt.
Genau eine der drei Mengen, etwa die Menge M_b, sei endlich. Dann gibt es eine Halbebene H der Ebene, in der jeder Punkt entweder grün oder rot ist.
Annahme: Die Behauptung (4) ist falsch.
In H sei GXY ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1 mit dem grünen Eckpunkt G. Nach Annahme ist X ein roter Punkt und der Punkt Y ist weder grün noch rot; also ist er blau – ein Widerspruch. Somit ist die Annahme falsch – es gilt (4).
Keine der Mengen M_b, M_g, M_r ist endlich.
Annahme: Die Behauptung (4) ist falsch.

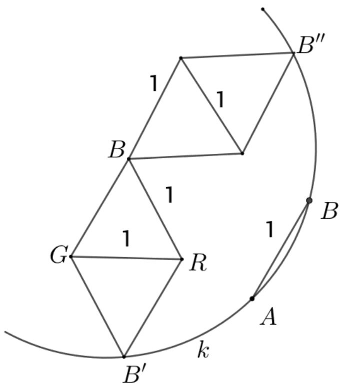


Abb. 7

Es sei BGB eine Raute, in der jede Seite sowie die Diagonale GR die Länge 1 haben.
Nach Annahme sind die Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks BGR verschiedenfarbig – es sei daher etwa B ein blauer Punkt, G ein grüner und R ein roter Punkt. Man drehe nun die Raute mit dem Drehzentrum B um einen beliebigen Winkel. Der Eckpunkt B'' der gedrehten Raute ist dann aus den gleichen Gründen wie B' ein blauer Punkt.
Bei einer Drehung der Raute um 360° durchläuft daher der Punkt B' einen Kreis k vom Radius $2 \cdot \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}^2)} = \sqrt{3}$ aus lauter blauen Punkten.
Dieser Kreis k hat dann Sekanten der Länge 1 – z.B. ist die Strecke AB in Abb. 7 eine solche Sekante. Die Tatsache, dass AB blaue Endpunkte besitzt, steht im Widerspruch zur Annahme. Es gilt also (4).

Aufgabe 1

In der Ebene seien n Punkte, $n \geq 2$, gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen und von denen jeder mit mindestens einem und höchstens $n-1$ anderen Punkten durch eine Strecke verbunden ist. Ein Punkt P sei mit der Farbe f_k der $n-1$ Farben $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ gefärbt, wenn P mit k anderen Punkten verbunden ist. Dann gilt: Es gibt mindestens zwei gleichfarbige Punkte.

Beispiel 5: Farbige Strecken

Jeder Punkt einer Kreisscheibe k sei beliebig blau oder rot gefärbt. Die Verbindungsstrecke zweier blauer Punkte sei blau und die zweier roter Punkte sei rot. Dann gilt:

(5) Es gibt eine blaue oder eine rote Strecke der Länge r in der Kreisscheibe k.

Annahme: Es gibt in der Kreisscheibe k weder eine blaue noch eine rote Strecke der Länge r.

Sind alle Punkte in k von gleicher Farbe, dann folgt daraus unmittelbar ein Widerspruch zur Annahme; es gilt also (5).
In k gebe es daher Punkte verschiedener Farbe. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge r in k (ein solches gibt es); sein Eckpunkt A sei blau. Nach Annahme ist dann weder B noch C blau – also sind sie es beide. Daher ist BC eine rote Strecke im Widerspruch zur Annahme. Somit gilt (5).

Aufgabe 2

Jeder Punkt einer Geraden g sei in einer von zwei unterschiedlichen Farben gefärbt. Dann kann man stets drei Punkte A, B und C von g mit gleicher Farbe finden, für die gilt: $|AB| = |BC|$.

Beispiel 6: Farbige Dreiecke

In der Ebene seien 6 Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Jeder dieser Punkte sei mit jedem anderen Punkt durch eine beliebige blau (b) oder rot (r) gefärbte Strecke verbunden. Für die aus drei Punkten und drei Strecken gebildeten Dreiecke gilt dann:

(6) Es gibt mindestens ein Dreieck, dessen Seiten von gleicher Farbe sind.

Beweis: Sind alle Strecken gleich koloriert, dann gilt (6). Daher seien nun nicht alle Strecken gleichfarbig. Da jeder der 6 Punkte ein Endpunkt von 5 Strecken ist, sind nach dem Schubfachprinzip mindestens 3 dieser 5 Strecken entweder blau (b) oder rot (r). Es sei A ein Endpunkt von mindestens 3 blauen Strecken (sind diese 3 Strecken rot, so vertausche man im Folgenden blau und rot).

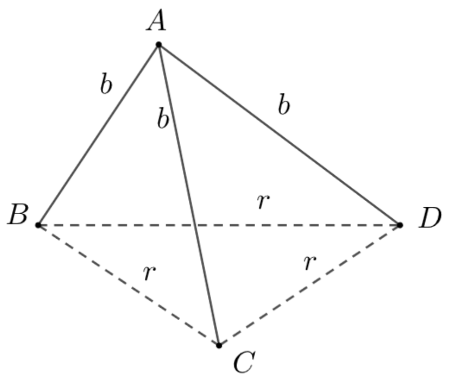


Abb. 8

Mit den Bezeichnungen der Abb. 8 gelte:
Ist dann noch eine der Strecken BC, BD oder CD blau, so ist eines der Dreiecke ABC, ABD oder ACD ein blaues Dreieck.
Ist jedoch keine der Strecken BC, BD und CD blau, dann hat das Dreieck BCD nur rote Seiten.

In beiden Fällen gilt daher die Behauptung (6).

Aufgabe 3:

Die Punkte der Ebene seien beliebig blau oder rot gefärbt. Dann kann man stets ein gleichseitiges Dreieck finden, dessen sämtliche Eckpunkte entweder blau oder rot sind.

Beispiel 7: Farbige Vierecke

In der Ebene seien n Punkte, $n \geq 5$, gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Jeder dieser n Punkte sei mit jedem der anderen $n-1$ Punkte durch eine Strecke verbunden. Jede dieser Strecken ist in einer der Farben beliebig blau oder rot gefärbt und zwar so, dass es einen Punkt gibt, der Endpunkt von mindestens 4 blauen Strecken, jedoch kein Endpunkt eines Dreiecks mit lauter blauen Seiten ist. Dann gilt:

(7) Es gibt ein Viereck, dessen vier Seiten rot sind.

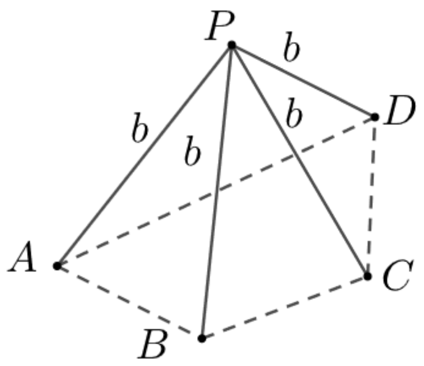


Abb. 9

Es seien A, B, C und D Endpunkte von blauen Strecken mit dem gemeinsamen Endpunkt P (Abb. 9). Da P kein Endpunkt eines blauen Dreiecks ist, sind die Seiten AB, BC, CD und AD der Dreiecke PAB, PBC, PBD und PAD jeweils rot. Die Punkte A, B, C und D sind somit Eckpunkte eines Vierecks mit lauter roten Seiten, was (7) beweist.

Beispiel 8: Farbige Kreise

Die Punkte der Ebene seien beliebig blau, grün oder rot so koloriert, dass keine der Mengen M_b, M_g, M_r der blauen, grünen, roten Punkte endlich ist. Dann gilt:

(8) Zu jeder positiven, reellen Zahl r gibt es einen Kreis vom Radius r, dessen Punkte sämtlich gleichfarbig sind.

Wie im letzten Teil des Beweises von (4) in Beispiel 4 zeigt man: Für eine Raute $BGB'R$, deren Seiten und Diagonale GR Länge $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$ haben, gilt: B und B' haben die gleiche Farbe. Bei einer Volldrehung der Raute um das Zentrum B durchläuft der Punkt B' einen Kreis vom Radius r aus lauter Punkten derselben Farbe wie B'.

Kolorierung als Beweisprinzip

In den bisherigen Beispielen befasste sich die farbige Geometrie ausschließlich mit Fragen, die sie selbst betreffen.

Nun ist es aber fast schon eine Regel in der Mathematik: Eine neue Theorie wird entwickelt – und irgendwann später stellt sich dann heraus, dass die Methoden und Techniken dieser Theorie auch in anderen mathematischen Gebieten mit Erfolg verwendbar sind.

Das ist auch bei der farbigen Geometrie passiert: Es hat sich gezeigt, dass ihr Kolorierungsprinzip in manch einem unübersichtlichen, nicht notwendig geometrischen Zusammenhang ein nützliches Beweisinstrument ist.

Beispiel 8: Flohsprünge

In jedem der 49 gleich großen quadratischen Felder eines 7x7-Gitterquadrats sitzt ein Floh. Auf ein Zeichen hin springt jeder Floh auf ein benachbartes Feld: das ist ein Feld, welches mit dem Startfeld eine gemeinsame Seite hat. Nach dem Felderwechsel gilt:

(8) Es gibt mindestens 7 Felder, auf denen kein Floh sitzt.

Wir beweisen die Behauptung (8) mit Hilfe einer Kolorierung:

Die Felder unseres Gitterquadrats färben wir wie bei einem 8x8-Schachbrett im Wechsel schwarz und weiß – wobei die Eckfelder schwarz seien. Dann gibt es $4 \cdot 7 = 28$ schwarze und $3 \cdot 7 = 21$ weiße Felder und daher auch 28 „schwarze“ und 21 „weiße“ Flöhe.
Beim Felderwechsel verlassen die „schwarzen“ Flöhe ihre 28 schwarzen Felder, von denen jedoch nur höchstens 21 Felder von „weißen“ Flöhen besetzt werden. Mindestens 7 schwarze Felder bleiben daher leer.

Beispiel 9: Routenplanung

(7) Es gibt ein Viereck, dessen vier Seiten rot sind.

Die Abb. 10 sei eine Landkarte mit 12 Dörfern und den sie verbindenden Straßen. Gibt es dann (mindestens) eine Route R, sodass die Post bei der Auslieferung von Paketen jedes Dorf genau einmal passiert?
Die Dörfer in der Karte seien blau (•) oder rot (○) gefärbt, wobei jede zwei benachbarten – also durch eine Straße verbundenen Dörfer – verschiedenfarbig seien. Aus der Abb. 10 ergibt sich durch eine solche Kolorierung:

(9) Stets sind 7 Dörfer blau und 5 Dörfer rot (bei entsprechender Umfärbung sind es 7 rote und 5 blaue Dörfer).

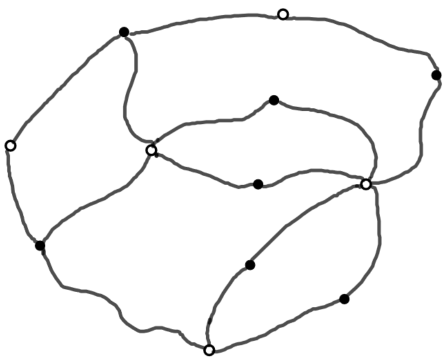


Abb. 10

Wenn es nun die gesuchte Route R durch die 12 Dörfer gäbe, dann müsste R nach der Kolorierungsvorschrift vom Typ • ○ • ○ ··· • ○ oder ○ • ○ • ··· ○ • sein und daher durch genau 6 blaue und 6 rote Dörfer führen. Das aber steht im Widerspruch zu (9). Daher gibt es die Route R nicht.

Beispiel 10: Ein Party-Problem

Sechs Gäste einer Party sitzen zusammen an einem Tisch. Für sie gilt:

(10) Unter den sechs Gästen gibt es stets eine Gruppe von drei Personen, in der entweder alle einander kennen oder aber keiner die beiden anderen kennt.

Die sechs Personen seien durch Punkte in der Ebene repräsentiert, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Wenn sich zwei Personen kennen, dann verbinde man die entsprechenden Punkte durch eine blaue Strecke; falls sie sich nicht kennen, verbinde man die zugehörigen Punkte durch eine rote Strecke. Damit ist jeder Punkt mit jedem anderen Punkt durch eine farbige Strecke verbunden.
Falls sich nun drei Personen kennen, so wird das in der „farbigen“ Interpretation von einem blauen Dreieck, falls sie sich nicht kennen von einem roten Dreieck repräsentiert.
Der Party-Behauptung (10) entspricht daher der „farbigen“ Behauptung: Es gibt ein Dreieck, dessen Seiten von gleicher Farbe sind. Damit befinden wir uns in der

Situation des Beispiels 6. Aus der dort bewiesenen Aussage (6) folgt daher: Es gilt die Behauptung (10).

Das Party-Problem und seine Interpretation als eine Frage nach der Existenz eines farbigen Dreiecks führt unmittelbar in die Ramsey-Theorie[***] – deren Thema die Untersuchung von Verallgemeinerungen des Beispiels 6 ist. Die dort auftretenden Fragen gehören zu den tiefliegendsten und schwierigsten - und weithin auch ungelösten – Problemen der farbigen Geometrie.

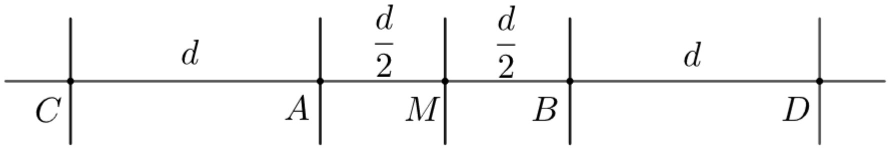
Lösungen

Aufgabe 1:

Da zur Färbung von n Punkten nur $n - 1$ Farben zur Verfügung stehen, muss es nach dem Schubfach-Prinzip zwei Punkte gleicher Farbe geben.

Aufgabe 2:

Es seien A, B Punkte von g gleicher Farbe f mit $|AB| = d$. C und D seien zwei weitere Punkte auf g, für die gilt $|CA| = |AB| = |BD| = d$ (vgl. Figur)



Ist C oder D von der Farbe f, so beweist das Punkte-Tripel (C, A, B) oder (A, B, D) die Behauptung. Es seien nun C und D beide nicht von der Farbe f. Für den Mittelpunkt M der Strecke AB und somit auch den Mittelpunkt M der Strecke CD gilt dann: Ist M von der Farbe f, so beweist das Tripel (A, M, B) die Behauptung; ist M nicht von der Farbe f, so leistet das Tripel (C, M, D) das gleiche.

Aufgabe 3:

Es gibt zwei blaue Punkte A und M, denn sonst gilt die Behauptung unmittelbar. Die blauen Punkte A und M seien ein Eckpunkt und der Mittelpunkt eines regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$; S sei der Schnittpunkt der Verlängerung von AF und von DE (vgl. Abb. 11) Wir bestimmen nun – ausgehend von A und M – die Farben der Punkte B, F, D, E, C und S unter der Annahme: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck mit gleichfarbigen Eckpunkten.

[***] Diese Theorie ist nach dem englischen Mathematiker Frank P. Ramsey (1903-1930) benannt, der sie 1928 mit zwei grundlegenden Sätzen initiierte.

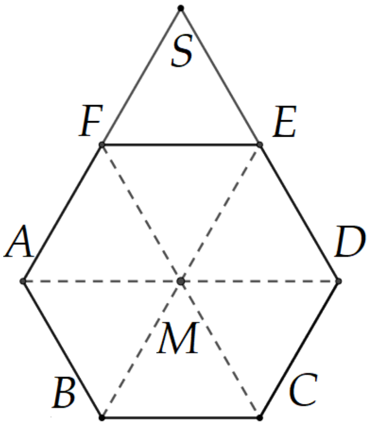


Abb. 11

Bezeichnet man ein gleichseitiges Dreieck XYZ mit $g(XYZ)$, so folgt der Reihe nach aus der Annahme:
In $g(MAB)$ und $g(AMF)$ sind A und M blau $\Rightarrow B$ und F sind rot;
In $g(FBD)$ sind B und F rot $\Rightarrow D$ ist blau;
In $g(MDE)$ und $g(DMC)$ sind M und D blau $\Rightarrow E$ und C sind rot;
In $g(FES)$ sind F und E rot $\Rightarrow S$ ist blau;

Weil nun A, D und S blaue Punkte sind, widerspricht $g(ADS)$ der Annahme – es gibt also ein gleichseitiges Dreieck mit lauter gleichfarbigen Eckpunkten.

Mathematische Entdeckungen

Eine spezielle Folge

Die Folge (n_i), $i = 1, 2, 3, \dots$ sei festgelegt durch $n_{i+2} = \frac{c+n_{i+1}}{n_i}$ mit den Startzahlen $n_1 = a$, $n_2 = b$, mit a, b, c reelle Zahlen, die so gewählt sind, dass $n_i \neq 0$ für alle $i \geq 1$.
Suche nach Zahlen p mit der Eigenschaft: Die Folge $n_1, n_2, n_3, \dots$ hat für einen geeigneten c-Wert die Periode p unabhängig davon, wie a und b gewählt sind, abgesehen von $n_i \neq 0$.
(Ermittle z.B. als erstes die Periode für $c = 1$.) (Herr Prof. Dr. Günter Pickert)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2018 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 131

In Heft 131 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Wer forscht mit? Lösungsformel für eine biquadratische Gleichung

In der Schule lernt man für die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ die Lösungsformel* $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$. Damit findet man leicht auch eine Lösungsformel für die spezielle biquadratische Gleichung

(*) $x^4 + ax^2 + b = 0$, mit a und b reelle Zahlen.

* Lösungsformel bedeutet hier: Formel zur Bestimmung der **reellen** Lösungen x.

Man braucht dazu nur $x^2 = y$ zu setzen, um über die quadratische Gleichung $y^2 + ay + b = 0$ zu einer Lösungsformel für die Gleichung (*) zu gelangen.
Um eine Lösungsformel für die allgemeine biquadratische Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, a, b, c und d reelle Zahlen herzuleiten sind erheblich größere Schwierigkeiten zu überwinden. Um einen - wenn auch nur schwachen Eindruck von diesen Problemen zu erlangen, fordern wir unsere entdeckungsfreudigen Leser auf:
Man entwickle für die im Vergleich zu (*) nicht wesentlich schwerer zu lösende Gleichung $x^4 - 2ax^2 - x + (a^2 - a) = 0$, a reell, eine Lösungsformel.

Ergebnisse

Drei der Einsendungen haben das Polynom als (quadratisches) Polynom in den Variablen a aufgefasst. Aus den beiden Lösungen erhielten sie zwei quadratische Gleichungen für x, deren Lösungen insgesamt 4 Lösungen der biquadratischen Gleichung ergeben.
Die anderen beiden Einsendungen haben das Polynom faktorisiert:

$$x^4 - 2ax^2 - x + (a^2 - a) = (x^2 - x - a)(x^2 + x + (1 - a))$$

und das Auffinden der Nullstellen somit ebenfalls auf das von quadratischen Gleichungen zurückgespielt. Die Lösungen lauten

$$x_{1,x} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a + 1}), x_{1,x} = \frac{3}{4}(-1 \pm \sqrt{4a - 3}).$$

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt Maximilian Göbel, Maximilan Hauck, Julian Scheinert, Yannik Spitzley und Marc Strufe.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 132

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Addition mit Buchstaben

$$\begin{array}{rcccc} & Z & W & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline & F & Ü & N & F \end{array}$$

Ersetze jeden Buchstaben durch eine Ziffer, so dass eine korrekte Addition entsteht. Dabei sollen verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern zugeordnet werden. Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen – finde zwei davon. (H.F.)

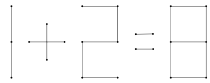
Lösung:
Mögliche Lösungen:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 4 & 3 \\ + & 5 & 7 & 4 & 3 \\ \hline & 6 & 9 & 8 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 3 & 1 & 6 & 4 \\ + & 5 & 7 & 6 & 4 \\ \hline & 8 & 9 & 2 & 8 \end{array}$$

II. Hölzchenknobelei

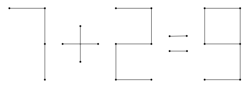
a) Lege *ein* Hölzchen so um, dass die Gleichung unten stimmt.

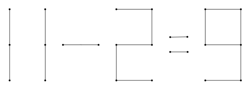
b) Lege *zwei* Hölzchen so um, dass die Gleichung unten stimmt.



Bemerkung: Es ist nicht erlaubt, aus dem Gleichheitszeichen $=$ ein ungleich $\neq$ zu machen. (A.K.)

Lösung:

a) 

b) 

III. Geburtstagsknobelei

An ihrem 60. Geburtstag wird Tante Inge von Katja gefragt, wie alt ihre drei Enkelinnen seien. Sie antwortet: „Das Produkt ihrer Alter ist genau mein Alter und die Summe ist eine Primzahl.“ Katja kann daraus die Antwort nicht schließen, bis Tante Inge hinzufügt: „Lässt du in der Summe das Alter der Jüngsten weg, so bleibt wieder eine Primzahl.“ Wie alt sind die drei? (WJB)

Lösung:

Von den Zerlegungen der Zahl 60 in drei Faktoren:

$$\mathbf{(1,1,60)}, \mathbf{(1,2,30)}, \mathbf{(1,3,20)}, \mathbf{(1,4,15)},$$
$$(1,6,10), (2,2,15), \mathbf{(2,3,10)}, (2,5,6), \mathbf{(3,4,5)}$$

entfallen die fettgedruckten, weil die Summe nicht prim ist. In $(1,6,10)$ ist die Summe $6+10$ nicht prim und in $(2,2,5)$ gibt es keine Jüngste. Also bleibt nur der Fall, dass die Kinder 2, 5 und 6 Jahre alt sind.

IV. Quersumme

Gibt es eine Quadratzahl z mit Quersumme 93? Begründe Deine Entscheidung. (WJB)

Lösung:

Nein. 93 ist durch 3 teilbar, also müsste z durch 3 teilbar sein. Als Quadratzahl wäre sie denn auch durch $3^2 = 9$ teilbar, also auch ihre Quersumme. 93 ist aber nicht durch 9 teilbar.

V. Die Zahl 30

Jana hat festgestellt, dass sie die Zahl 30 nur mit der Ziffer 6 und den Rechenzeichen für die Grundrechenarten und Klammern darstellen kann. So ist zum Beispiel $6 \cdot 6 - 6$ eine solche Darstellung, bei der die Ziffer 6 genau dreimal verwendet wird.

a) Gib solche Darstellungen an, bei der die Ziffer viermal bzw. fünfmal verwendet wird.
b) Begründe: Für jede vorgegebene Anzahl $n \geq 4$ lässt sich die Zahl 30 mit n-mal der Ziffer 6 und sonst nur den Rechenzeichen für die Grundrechenarten und Klammern darstellen.
c) Mit der Ziffer 5 ist das ebenfalls möglich, sogar auch für $n = 3$. – Zeige dies.

Lösung:

a) Für $n = 4$ gilt $66 - 6 \cdot 6 = 30$, für $n = 5$ ist $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$.
b) Für $n = 4 + 2k$ bzw. $n = 5 + 2k$ multipliziert man diese Ausdrücke k-Mal mit $6 : 6 = 1$ oder addiert $6 - 6 = 0$.
c) Hier geht man aus von den Fällen $5 \cdot 5 + 5 = 30$ für $n = 3$ und $55 - 5 \cdot 5 = 30$ für $n = 4$ und geht dann so vor wie in a) mit $5 : 5 = 1$ oder $5 - 5 = 0$.

VI. ZT-Zahlen

Die Zahl 36 lässt sich sowohl durch 3 als auch durch 6 teilen.
Eine natürliche Zahl n mit dieser Eigenschaft, dass sie sich durch ihre sämtlichen Ziffern teilen lässt, nenne ich ZT-Zahl.

a) Wie heißt die kleinste dreiziffrige gerade ZT-Zahl ohne wiederholte Ziffern?
b) Wie heißt die kleinste dreiziffrige ungerade ZT-Zahl ohne wiederholte Ziffern?

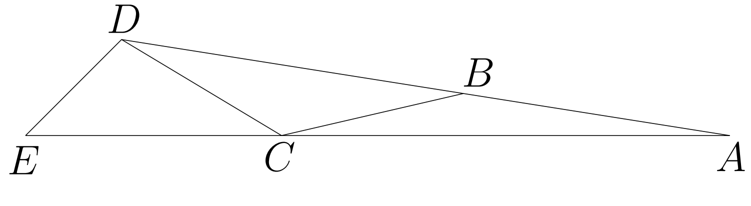
(H.F.)

Lösung:

Wir probieren die erste Ziffer 1, weil 1 ein Teiler von n ist; n hat also die Form $n = 1xy$ mit Ziffern x und y. Da 0 kein Teiler einer Zahl ist, gilt $x, y \neq 0$.

a) Sei n gerade. Es ist $x \neq 1$. Sei also $x = 2$. Dann ist $y \neq 2$, also $y \geq 4$. Daraus folgt: $n = 124$ ist die kleinste gerade dreiziffrige ZT-Zahl.
b) Sei n ungerade. Dann sind x und y beide ungerade, denn eine gerade Ziffer ist kein Teiler einer ungeraden Zahl. Weil $x \neq 1$ ist, gilt $x \geq 3$. Sei $x = 3$. Dann ist $y \neq 1, y \neq 3$, also $y \geq 5$. Für $y = 5$ erhält man die Zahl $n = 135$ und 3 sowie 5 sind Teiler von 135 – so dass 135 die kleinste ungerade dreiziffrige ZT-Zahl ist.

VII. Winkelbestimmung



In der abgebildeten Figur gelte $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$ sowie $\sphericalangle ADE = 156^\circ$. Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle DAE$? (H.F.)

Lösung:
Es sei $\alpha = \sphericalangle DAE$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle ACB = \sphericalangle DAE = \alpha, \quad \text{weil } \triangle ABC \text{ gleichschenklig ist.}\\
&\sphericalangle CBA = 180^\circ - 2\alpha\\
&\sphericalangle DBC = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 2\alpha\\
&\sphericalangle CDB = 2\alpha, \quad \text{weil } \triangle BDC \text{ gleichschenklig ist.}\\
&\sphericalangle BCD = 180^\circ - 2 \cdot 2\alpha\\
&\sphericalangle DCE = 180^\circ - \sphericalangle BCD - \sphericalangle ACB = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha\\
&\sphericalangle CED = 3\alpha, \quad \text{weil } \triangle CDE \text{ gleichschenklig ist.}
\end{aligned}$$

Im Dreieck $\triangle ADE$ gilt daher: $180^\circ = 156^\circ + 3\alpha + \alpha$. Daraus folgt: $\alpha = 6^\circ$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Vier Summanden einer Zahl

Jana hat vier natürliche Zahlen a, b, c und d notiert. Die Summe dieser vier Zahlen ist 3345. Außerdem stellt Jana fest: Wenn sie zur ersten Zahl a noch 1 addiert, von b hingegen 2 subtrahiert, die Zahl c mit 3 multipliziert und d durch 4 dividiert, so erhält sie als Summe stets das gleiche Ergebnis n.

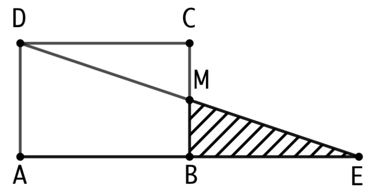
Bestimme die vier Zahlen a, b, c, d sowie die Zahl n. (H.F.)

II. Punkte-Verteilung

Im Innengebiet eines Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Flächeninhalt 4 sind 37 Punkte beliebig verteilt. Man zerlege das Dreieck $\triangle ABC$ in vier Teildreiecke.

Zeige: Im Innengebiet samt Rand eines dieser vier Teildreiecke befinden sich (mindestens) 10 Punkte. (H.F.)

III. Flächenberechnung



Im Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|AB| = a$ und $|BC| = b$ sei M der Mittelpunkt der Seite BC. Die Verlängerung der Strecke DM schneide die Verlängerung der Seite AB im Punkte E. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks MBE? (H.F.)

IV. Ziffern statt Buchstaben

$$\begin{array}{l} A\,A\,A : B = C\,D \\ \underline{E\,F} \\ \;\;G\,A \\ \;\;\underline{G\,A\quad\;} \\ \qquad\;\; 0 \end{array}$$

Ersetze jeden Buchstaben durch eine Ziffer, so dass man eine korrekte Division erhält. Dabei soll gelten: Verschiedenen Buchstaben sind verschiedene Ziffern zuzuordnen.

(H.F.)

V. Quadratzahlen gesucht

Für welche natürlichen Zahlen n ist $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ eine Quadratzahl?(H.F.)
Hinweis: $n!$ ist das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ mit $1! = 1$.

VI. Mindestanzahl von Teilern

Es seien p und q unmittelbar aufeinander folgende ungerade Primzahlen, $p < q$.

a) Zeige: Die Summe $p + q$ hat stets mindestens 4 verschiedene Teiler.

b) Unter welchen Bedingungen hat $p+q$ mindestens 8 verschiedene Teiler? (H.F.)

VII. Teilbarkeit

$p = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ sei das Produkt von 5 aufeinander folgenden Zahlen. Zeige

a) p ist immer durch 120 teilbar.

b) Ist n gerade, so ist p durch 240 teilbar.

c) Ist n nicht durch 3 teilbar, so ist p durch 360 teilbar. (WJB)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Die Mathematik ist eine wunderbare Lehrerin für die Kunst, die Gedanken zu ordnen, Unsinn zu beseitigen und Klarheit zu schaffen. “

J. H. Fabre
1823 – 1915

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1204: Erfolg beim Mathematik-Wettbewerb

Bei einem Mathematik-Wettbewerb kann ein Teilnehmer maximal 16 Punkte erlangen. Für 16 oder 15 Punkte erhält er einen 1. Preis, für 14 oder 13 Punkte einen 2. Preis und für 12 oder 11 Punkte einen 3. Preis.

Die vier Teilnehmer Alf (A), Bob (B), Cher (C) und Dan (D) erzielen jeweils verschiedene Punkte, jeder aber mindestens 6 Punkte; 2 Teilnehmer erhalten unterschiedliche Preise. Die Summe der Punkte von A und C sowie von B und D stimmen überein; während die Summe der Punkte von A und B größer als die von C und D ist. D erzielt mehr Punkte als B und C zusammen. Zwei Teilnehmer erhalten keinen Preis.

a) Bestimme die Rangfolge der 4 Teilnehmer.

b) Wie viele Punkte haben A, B, C und D jeweils erhalten? (H.F.)

Aufgabe 1205: Polynomrätsel

„Ich denke mir ein Polynom f mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten“, sagt Anna zu Joachim, „und Du musst es raten. Du darfst Dir zwei Stellen aussuchen, an denen ich Dir den Funktionswert nenne.“ „Gut,“ sagt Joachim, „Was ist $f(1)$?“ Anna antwortet: „$f(1) = 8$“. Joachim fragt direkt nach $f(10)$. Wieso? (V.B.)

Aufgabe 1206: Die Unglückszahl 17

Die 17 war nach Auffassung der alten Griechen eine *Unglückszahl*, weil sie zwischen den Zahlen 16 und 18 liegt und diese beiden Zahlen durch die folgende Eigenschaft „ausgezeichnet“ sind:

> Zu 16 und 18 gehört jeweils ein Rechteck, bei dem Fläche und Umfang zahlenmäßig übereinstimmen: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks sind $a = 4$ und $b = 4$; beim zweiten Rechteck sind $a = 6$ und $b = 3$.

Begründe: Es gibt keine weiteren Rechtecke ganzzahliger Seitenlängen mit dieser Eigenschaft. (H.F.)

Aufgabe 1207: Wie viele Quadrate sieht man?

a) Ein 10×10-Quadrat sei in 100 gleich große Teilquadrate zerlegt. – Wie viele Rechtecke gibt es im großen Quadrat?

b) Überlege nun allgemeiner: Ein $n \times n$-Quadrat sei in n^2 gleich große Teilquadrate zerlegt. – Wie viele Rechtecke gibt es im großen Quadrat? (H.F.)

Aufgabe 1208: Eigenschaften einer 100-gliedrigen Summe

Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

Für die Summe S von 100 aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen gilt stets:

a) S ist eine Primzahl;
b) S hat mindestens 10 Teiler;
c) $S > 5000$;
d) S ist als eine Potenz a^t mit ganzen Zahlen $a, t > 1$ darstellbar. (H.F.)

Aufgabe 1209: Punkte im Kreis

Wir wählen n Punkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ zufällig und unabhängig voneinander auf einem Kreis vom Radius 1.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle n Punkte auf einem fest vorgegebenen Kreisbogen der Länge α (gemessen als Winkel im Bogenmaß) liegen, $0 < \alpha < 2\pi$.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E, dass es einen Kreisbogen der Länge α, $0 < \alpha < \pi$ gibt, auf dem alle n Punkte liegen. (WJB)

Aufgabe 1210: Eine Teilbarkeitsfrage

Für jede Primzahl $p > 5$ gilt: 120 ist ein Teiler von $p^4 - 1$. Man zeige dies. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 132

Klassen 9–13

Aufgabe 1197: Die Zahl 20172017...

Wir betrachten die Zahl $S = 201720172017\dots2017$, die entsteht, indem man 2017-mal die Zahl 2017 hintereinanderschreibt.

a) Eine Zahl, die die Summe aller Zahlen von 1 bis zu einem bestimmten n ist, heißt *Dreieckszahl*. Zum Beispiel 10 ist eine Dreieckszahl, denn $1+2+3+4 = 10$. – Ist S eine Dreieckszahl?
b) Für welche positiven ganzen Zahlen a und b mit $b \geq 2$ kann man S auch schreiben als $S = a^b$?
Hinweis: Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt: Ist a eine natürliche Zahl und p eine Primzahl, dann hat a^p bei Division durch p den gleichen Rest wie a bei Division durch p. (Matthias Bergen, Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied, Klasse 13)

Lösung:

a) Wir bezeichnen die n-te Dreieckszahl mit $d(n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(n) &= 1+2+3+...+n-1+n \\ &= \frac{(1+2+3+...+n)+(1+2+3+...+n)}{2} \\ &= \frac{(1+2+3+...+n)+(n+(n-1)+...+2+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)+(n-1+2)+(n-1+3)+...+(n-(n-1)+n)}{2} \\ &= \frac{(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}{2} \text{ (Der Summand kommt } n\text{-mal vor.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir alle möglichen Endziffern von $2d(n)$:

Endziffer von n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Endziffer von $2d(n) = n(n+1)$	2	6	2	0	0	2	6	2	0	0

Es soll gelten $S = d(n)$ für ein bestimmtes $n \implies 2S = 2d(n)$. Die Endziffer von $2S$ ist 4; es gibt jedoch keine Zahl $2d(n)$ mit der Endziffer 4. Somit kann S keine Dreieckszahl sein.

b) Da $S = a^b$ gelten soll, muss jeder Primfaktor, der in S vorkommt, mindestens b-mal in S vorkommen. Offensichtlich ist S durch 2017 teilbar. Nach genauerer Betrachtung fällt auf, dass 2017 eine Primzahl ist, somit muss S auf jeden Fall durch 2017^2 teilbar sein.
Es gilt: $S = 2017 \cdot \sum_{i=0}^{2016} 10000^i$.
Daher müssen wir herausfinden, ob $\sum_{i=0}^{2016} 10000^i$ durch 2017 teilbar ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2016} 10000^i &= \frac{9999 \cdot \sum_{i=0}^{2016} 10000^i}{9999} \\ &= \frac{9999\cdots9999}{9999} \text{(Im Zähler haben wir } 4 \cdot 2017\text{-mal 9999.)} \\ &= \frac{10^{4\cdot2017}-1}{9999} = \frac{10000^2017-1}{9999}. \end{aligned}$$

Da 2017 eine Primzahl ist, hat 10000^{2017} bei Division durch 2017 den gleichen Rest wie 10000 bei Division durch 2017; dieser Rest beträgt 1932. Somit hat $10000^{2017}-1$ bei Division durch 2017 den Rest 1931. Da $10000^{2017}-1$ nicht durch 2017 teilbar ist, kann auch $\frac{10000^{2017}-1}{9999}$ nicht durch 2017 teilbar sein. Also tritt der Primfaktor 2017 nur einmal in S auf; daher kann man S nicht als $s = a^b$ schreiben. Es gibt keine ganzen Zahlen a und b mit $b \geq 2$, die die geforderten Eigenschaften erfüllen.

Aufgabe 1198: Geburtsdatum

Die Lehrerin Silke Köhler unterrichtet die Klasse 10b schon seit 5 Jahren. In der ersten Stunde des Schuljahres 2017 ließ sie sich endlich überreden, der Klasse ihren Geburtstag zu verraten. Sie tat das so: „Dividiert man die Zahl der Tage von Neujahr bis zu meinem Geburtstag (einschließlich) durch die Anzahl n der Tage nach meinem Geburtstag bis zu Silvester, so ist das Ergebnis q um eine Quadratzahl größer als mein jetziges Alter (wie üblich auf eine ganze Zahl abgerundet), eine Primzahl". Wann ist Frau Köhler geboren? (WJB)

Lösung:

Die Gleichung $q = \frac{365-n}{n}$ formen wir um zu $365 = n(q+1)$. Die Lösungen sind $n = 73$, $q+1 = 5$ und $n = 5, q+1 = 73$. Die erste dieser Lösungen kommt offenbar nicht in Frage. Mit $q = 72$ ergibt sich $q - 3^2 = 63$, $q - 4^2 = 66$, $q - 6^2 = 36$, sind keine Primzahlen. $q - 1^2, q - 2^2$ ergäben ein zu hohes, $q - 7^2, \ldots$ ein zu niedriges Alter. $q - 5^2 = 47$ ist also das richtige Alter. Der Geburtstag ist wegen $n = 5$ der 26. Dezember. Am 26.12.2017 feiert Frau Köhler ihren 48. Geburtstag, sie ist also am 26.12.1969 geboren.

Aufgabe 1199: Folgen einer unzuverlässigen Waage

Ein Gemüsehändler auf dem Markt hat eine recht unzuverlässige Waage.

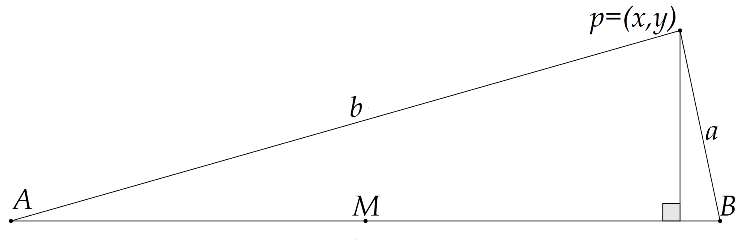
Ist das Gewicht einer Ware höchstens 2 kg, dann zeigt sie mit 90 %-iger Wahrscheinlichkeit den korrekten Preis an. Wiegt die Ware mehr als 2 kg, dann gibt sie nur noch mit 82 %-iger Wahrscheinlichkeit den richtigen Preis an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer zufällig ausgewählten Käuferin für eine gekaufte Ware der falsche Preis genannt wird? Die Wahrscheinlichkeit, dass die Käuferin höchstens 2 kg Gemüse kauft, ist 0,5. (H.F.)

Lösung:

Falls die Käuferin höchstens 2 kg kauft, dann zahlt die Käuferin mit Wahrscheinlichkeit 90 % den richtigen Preis. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie jedoch mehr als 2kg Gemüse kauft, beträgt ebenfalls 50% und mit Wahrscheinlichkeit 82 % zahlt sie dann den richtigen Preis. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Käuferin beim Kauf einer Ware den korrekten Preis bezahlt, lautet daher: $50\,\% \cdot 90\,\% + 50\,\% \cdot 82\,\% = 86\,\%$. Also bezahlt sie mit 14 % Wahrscheinlichkeit den falschen Preis.

Aufgabe 1200: Abstände

A und B seien die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ auf der x-Achse. Bestimme alle Punkte P in der x, y-Ebene, deren Abstand vom Koordinatenursprung M das geometrische Mittel der Abstände a von A und b von B, also gleich $\sqrt{ab}$, ist. (WJB)



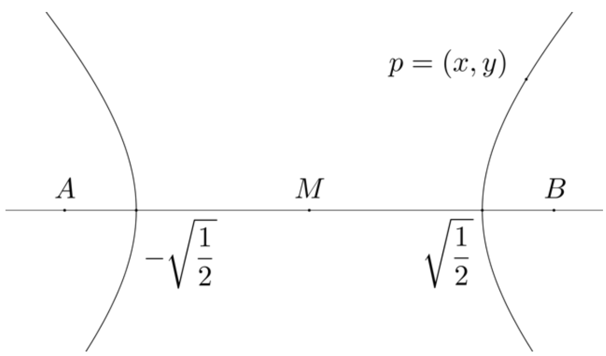
Lösung:
Die dreimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras ergibt $m^2 = x^2 + y^2$, $a^2 = (1+x)^2 + y^2$ und $b^2 = (1-x)^2 + y^2$. Die Forderung $m = \sqrt{ab}$ schreiben wir zur Vermeidung von Wurzelzeichen als $m^4 = a^2b^2$. Wir berechnen zunächst

$$m^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

sowie

$$\begin{aligned} a^2b^2 &= ((1+x)^2 + y^2)^2((1-x)^2 + y^2)^2 \\ &= (1+x)^2(1-x)^2 + (1+x)^2y^2 + y^2(1-x)^2 + y^4 \\ &= ((1+x)(1-x))^2 + (1+x)^2y^2 + y^2(1-x)^2 + y^4 \\ &= (1-x^2)^2 + (1+x)^2y^2 + y^2(1-x)^2 + y^4 \\ &= 1 - 2x^2 + x^4 + y^2((1+x)^2 + (1-x)^2) + y^4 \\ &= 1 - 2x^2 + x^4 + y^2(2 + 2x^2) + y^4 \\ &= 1 - 2x^2 + 2y^2 + (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\ &= 1 - 2x^2 + 2y^2 + m^4. \end{aligned}$$

Die Gleichung $m^4 = a^2b^2$ gilt also für die Punkte mit $1 - 2x^2 + 2y^2 = 0$, d.h. $y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$.



Aufgabe 1201: Zahlenknobelei

$$\begin{array}{ccccccc} & & & R & E & D \\ + & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline & B & R & O & W & N \end{array}$$

Ersetze gleiche (verschiedene) Buchstaben durch gleiche (verschiedene) Ziffern, so dass eine korrekte Addition entsteht, in der jede der Ziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ vorkommt. Ferner soll keine führende Ziffer einer Zahl eine Null sein – und *BLUE* entspreche einer Quadratzahl.

Lösung:
Wir bezeichnen die Additionsüberträge der von rechts nach links nummerierten Spalten 1,2,3 und 4 in der 2., 3., 4. bzw. in der 5. Spalte mit U_1, U_2, U_3 und U_4. Dabei gilt: $0 \le U_1, U_2, U_3 \le 2, 0 \le U_4 \le 1$.
Spalte 4: Aus $B + R + U_3 = U_4 \cdot 10 + R \implies B + U_3 = U_4 \cdot 10 = 10$. Wegen $1 \le U_3 \le 2$ ist $B = 8$ oder $B = 9$.
BLUE ist eine Quadratzahl zwischen 8000 und 10000. Lassen wir die Quadratzahlen mit mehreren übereinstimmenden Ziffern weg, so sind die möglichen Werten von *BLUE*: 8649, 9025(*), 9216(*), 9604(*), 9801(*). Die mit (*) gekennzeichneten Quadratzahlen entfallen. Denn aus $D + E + N = U_1 \cdot 10 + N$ folgt

(1) $D + E = 10$ und $U_1 = 1$.

Für $E = 1$ ist $D = 9$ und $BLUE = 9081$ entfällt, weil $B = D = 9$ wäre; für $E = 4$ ist $D = 6 = L$, so dass auch 9604 entfällt. Schließlich ist $D = 5$ für $E = 5$ und 9025 entfällt.
Es sei nun $BLUE = 9216$, also $E = 6, U = 1$ und $D = 4, U_1 = 1$ wegen (1). Spalte 2: Aus $E + U + E + U_1 = 14 = U_1 \cdot 10 + W \implies W = 4$. Somit entfällt die Quadratzahl 9216. Es bleibt die Möglichkeit: $BLUE = 8649$, also ist $B = 8, L = 6, U = 4, E = 9$ und wegen (1) ist $D = 1, U_1 = 1$. Aus der Spalte 2 folgt damit $W = 3$ und $U_2 = 2$. Für Spalte 3 gilt: $R + 6 + 9 + 2 = U_3 \cdot 10 + O$. Nun ist $R \neq 0, 1, 3, 4, 6, 8, 9$. Wäre $R = 2$, dann wäre $O = 9 = E$; wäre $R = 7$, so wäre $O = 4 = U$. Also ist $R = 5$.
Aus Spalte 4 und 5 folgt: $B + R > 10$, also $U_4 = 1$, so dass sich aus $G + U_4 = B$ ergibt: $G = 7$. Danach erhält man leicht $O = 2$ und schließlich $N = 0$. Die eindeutige Lösung ist daher

$$\begin{array}{rrrrr} & & 5 & 9 & 1 \\ & 8 & 6 & 4 & 9 \\ +7 & 5 & 9 & 9 & 0 \\ \hline 8 & 5 & 2 & 3 & 0. \end{array}$$

Aufgabe 1202: Rational oder irrational

Zeige, dass die Behauptung „Ist der Quotient $\frac{a}{b}$, wobei $b \neq 0$ ist, rational, so sind a und b beide rational oder beide irrational“ mit einer Ausnahme richtig ist.

Lösung:
Die Ausnahme ist $a = 0$, so ist $\frac{a}{b} = 0$ rational, unabhängig davon, ob b rational ist oder nicht.
Für $a \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ist $a = \frac{m}{n} \cdot \frac{z}{j}$ rational, falls $b = \frac{j}{z}$ rational ist. Ist $a = \frac{i}{l}$ rational, so auch $b = \frac{in}{lm}$. Also sind a, b beide rational, falls eines davon rational ist. (WJB)

Aufgabe 1203: Drei Frösche

Drei Frösche sitzen auf den Punkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ eines Koordinatensystems. In jedem Schritt kann ein beliebiger Frosch über einen beliebigen anderen Frosch hüpfen und sich folgendermaßen auf einen neuen Punkt des Koordinatensystems setzen: Der übersprungene Frosch bewegt sich dabei nicht und sein Standpunkt halbiert genau die Strecke zwischen Ausgangspunkt und Endpunkt des springenden Frosches.

a) Ist es möglich, dass durch fortgesetztes Springen schließlich ein Frosch auf dem Feld $(1,1)$ landet?

b) Ist es möglich, dass durch fortgesetztes Springen schließlich die drei Frösche auf den Feldern $(0,0), (2,0), (0,2)$ landen? (V. Blomer)

Lösung:

a) Springt ein Frosch, der auf dem Punkt (a,b) sitzt, über einen Frosch auf dem Punkt (x,y), so sind die neuen Koordinaten des springenden Frosches $(a+2(x-a), b+2(y-b))$, also bleibt die Parität der Koordinaten konstant. Da zu Beginn kein Frosch zwei ungerade Koordinaten hat, kann nie ein Frosch den Punkt $(1,1)$ erreichen.

b) Wir bezeichnen die Punkte, auf denen die drei Frösche zu einem Zeitpunkt sitzen, mit A, B, C. Springt etwa der Frosch auf B über den Frosch auf C und landet auf B', so ist C die Seitenhalbierende im Dreieck ABB', die bekanntlich den Flächeninhalt halbiert, also haben die Dreiecke ABC und ACB' die gleiche Fläche. Damit bleibt die Fläche des Dreiecks, das durch die Frösche beschrieben wird, stets gleich. Insbesondere können die drei Frösche nicht auf den Feldern $(0,0), (2,0), (0,2)$ landen.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Mystische 3-stellige Zahlen und ihre Folgen

Schreibweise:

Im Folgenden werden natürliche Zahlen mit maximal vier Stellen in der Form $[thze]$ geschrieben. Dabei stehen t, h, z, e für die Tausender, Hunderter, Zehner und Einer; führende Nullen entfallen dabei.

Definition:

Eine dreistellige natürliche Zahl $z = [hze]$ kann man in der Form $z = 100h + 10z + e$ schreiben. Die Summe der digitalen 3-ten Potenzen von z ist $S_3(z) = h^3 + z^3 + e^3$. Gilt $z = S_3(z)$, so heißt z „Mystische Zahl“.

Iterationsvorschrift:

Obige Definition mit der Summe der digitalen 3-ten Potenzen kann man als Vorschrift zur Iteration von natürlichen Zahlen N mit höchstens 4 Stellen benutzen: $N = [thze] \to N' = S_3(N)$. (Ist N z.B nur 2-stellig, so ist in der Definition entsprechend $t = 0$ und $h = 0$ zu verwenden). Beginnt man mit der Startzahl N, so hat die Iterationsfolge die Elemente $N, S_3(N), S_3^2(N) = S_3(S_3(N)), S_3^3(N)$ etc. Kommt ein Element $S_3^i(n)$ schon einmal bei den vorhergehenden i Gliedern vor, so gerät die Folge in einen *Zykel*. Ein solches Element wird *Endzahl* genannt (Beispiel unten). Falls $N = N'$ gilt, so nenne ich die mystische Zahl N auch *Fixpunkt*.

Beispiele Zyklen, Fixpunkten und Endzahlen:

Startzahl $N = 235$; Folge = [160, 217, 352, 160]. Die Folge selbst ist *zyklisch*, 160 ist eine *Endzahl*

Startzahl $N = 236$; Folge = [251, 134, 92, 737, 713, 371, 371]. Es reproduziert sich die *Endzahl* 371, sie ist also auch ein *Fixpunkt*

Startzahl $N = 238$; Folge = [547, 532, 160, 217, 352, 160]. Ab dem dritten Folgenglied entsteht ein *Zykel* 160, 217, 352, ganz ähnlich der Periode bei Dezimalbrüchen. Folge =|547,532,$\overline{160, 217, 352}$|

Startzahl $N = 697$; Folge = [1288, 1033, 55, 250, 133, 55], ein Beispiel dafür, dass 4-stellige Folgenglieder auftreten können.

Aufgaben

a) Für 3-stellige Zahlen gibt es nur vier Fixpunkte; berechne sie mit Hilfe eines Programms!

b) Berechne alle Iterationsfolgen für 3-stellige Startzahlen! Es fällt auf, dass bei Startzahlen, die einen bestimmten Primteiler besitzen, immer derselbe Fixpunkt als Endzahl erscheint. Welcher ist das? Ein allgemeiner theoretischer Beweis dieses Phänomens ist dem Autor nicht bekannt und ergäbe ZUSATZPUNKTE!

c) Zusatz: HARDY's APOLOGY: Die Aussage b) ist möglicherweise nur im Zehnersystem gültig. Untersuche dies mit einem Programm, indem du b) für die in Python vorhandenen Oktalzahlen durchführst ODER eine andere Zahlenbasis zwischen 2 und 16 wählst!

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2018 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 131

Wettrennen von Primzahlen

Zwei „Läufer" L1 und L2 erzeugen Primzahlen nach den Formeln $4n+1$ bzw. $4n-1$; dabei läuft n von 1 bis zu einer größten Stelle n_{max}. Gewonnen hat derjenige, der dabei die meisten Primzahlen erhalten hat. Berechnet man die Anzahl der jeweiligen Primzahlen für n von 1 bis $n_{max} = 20$, so haben die beiden am Ende 9 (L1) bzw. 12 (L2) Primzahlen erzeugt; L2 hat also gewonnen. Überraschend ist dabei, dass L2 nie hinten liegt ($1 <= n <= 20$). Lediglich sind beide Anzahlen ab und zu gleich; d.h. L1 hat L2 zwar eingeholt, nie aber überholt.

a) Zeige dies mit einem Computer-Programm!

b) Wann wird L2 erstmals von L1 überholt? Wie lange bleibt danach L1 vor L2?

c) Wann wird L2 das zweite Mal von L1 überholt? Wie groß war zwischendurch der maximale Vorsprung von L2 vor L1?

d) Wird L2 ein drittes Mal von L1 überholt?

Es bleiben einige theoretische Fragen, die mit Computer-Simulationen nicht geklärt werden können: Wie oft überholt L1 seinen Gegner L2 auf lange Sicht ($n = \infty$)? Erzeugen die beide Läufer jeweils unendlich viele Primzahlen? (W.G.)

Ergebnisse

Lösung (a): Computer-Ergebnisse der ersten 20 (`nmax`) Primzahl-Listen PL1 und PL2 der beiden Läufer, `anzprim1`, `anzprim2` bezeichnen die Anzahl der Primzahlen von L1, L2 zu dem jeweiligen n. `GLEICH`, `VORNE`, `HINTEN` = Position von L2 bzgl. L1.

```
n=1 anzprim1=1 anzprim2=1 PL1= [5]   PL2= [3] GLEICH
n=2 anzprim1=1 anzprim2=2 PL1= [5]   PL2= [3, 7]  VORNE
n=3 anzprim1=2 anzprim2=3 PL1= [5, 13]   PL2= [3, 7, 11]  VORNE
n=4 anzprim1=3 anzprim2=3 PL1= [5, 13, 17]   PL2= [3, 7, 11] GLEICH
n=5 anzprim1=3 anzprim2=4 PL1= [5, 13, 17]   PL2= [3, 7, 11, 19]  VORNE
n=6 anzprim1=3 anzprim2=5 PL1= [5, 13, 17]   PL2= [3, 7, 11, 19, 23]  VORNE
n=7 anzprim1=4 anzprim2=5 PL1= [5, 13, 17, 29]   PL2= [3, 7, 11, 19, 23]  VORNE
n=8 anzprim1=4 anzprim2=6 PL1= [5, 13, 17, 29]   PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31]  VORNE
n=9 anzprim1=5 anzprim2=6 PL1= [5, 13, 17, 29, 37]   PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31]  VORNE
n=10 anzprim1=6 anzprim2=6 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41]
                           PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31] GLEICH
n=11 anzprim1=6 anzprim2=7 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41]
                           PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43] VORNE
n=12 anzprim1=6 anzprim2=8 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41]
                           PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47] VORNE
n=13 anzprim1=7 anzprim2=8 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53]
                           PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47] VORNE
n=14 anzprim1=7 anzprim2=8 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53]
                           PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47] VORNE
n=15 anzprim1=8 anzprim2=9 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61]
                           PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59] VORNE
n=16 anzprim1=8 anzprim2=9 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61]
                           PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59] VORNE
n=17 anzprim1=8 anzprim2=10 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61]
                            PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67] VORNE
n=18 anzprim1=9 anzprim2=11 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73]
                            PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71] VORNE
n=19 anzprim1=9 anzprim2=11 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73]
                            PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71] VORNE
n=20 anzprim1=9 anzprim2=12 PL1= [5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73]
                            PL2= [3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79] VORNE
```

Bemerkung: Man erkennt, dass L2 nie HINTEN ist! Und dass PL1+PL2 alle ungeraden Primzahlen <4*nmax enthalten. Das Computer-Programm muss für $4n+-1$ jeweils einen aufwendigen Primzahl-Test machen; insofern hat man keine Primzahl-Formel gefunden!

Im Folgenden wird nmax so gewählt, dass die Fragen beantwortet werden können.

Lösung (b): Wann wird L2 erstmals von L1 überholt? Wie lange bleibt danach L1 vor L2?

Python-Ergebnisse zeigen (siehe unten), dass L2 ab n=21 lange vorne ist, erst bei n=115 wieder von L1 eingeholt, aber nicht überholt wird. Auch bis $n = 6714$ gelingt L1 kein Überholmanöver, obwohl er immer wieder mal zu L2 aufschließen kann. Bei $n = 6715$ ist L2 das erste Mal hinten; danach ist er bei 6716/6717 wieder GLEICH/VORNE. Der Vorsprung von L1 ist also nur für die eine Stelle 6715 vorhanden; wie es danach weiter geht, wird in Frage (c) geklärt.

Ausschnitt Python-Ergebnisse

```
n= 6712  L2  vorne  von 6710 bis 6711
n= 6715  L2  gleich  von 6712 bis 6714
n= 6716  L2  hinten  von 6715 bis 6715
n= 6726  L2  gleich  von 6716 bis 6725
n= 6730  L2  vorne  von 6726 bis 6729
```

Lösung (c): Wann wird L2 das zweite Mal von L1 überholt Wie groß war zwischendurch der maximale Vorsprung von L2 vor L1 ?

Lösung (d): Wird L2 ein drittes Mal von L1 überholt ?
Die erneute Führung (L2>L1) ab $n = 6726$ hält bis $n = 154206$; bei 154207/8/9 ist L1 gleich auf und bei 154210 ist L2 wieder hinten, L1 hat ihn ein zweites Mal überholt. Ein drittes Mal passiert das bei $n = 154219$. Im Folgenden wechseln sich L1 und L2 immer wieder in der Führung ab; L2 liegt aber öfter in Führung und durchschnittlich auch weiter vor L1 (der Autor hat dies bis 3 Millionen getestet). Es bleiben einige theoretische Fragen, die mit Computer-Simulationen nicht geklärt werden können: Wie oft überholt L1 seinen Gegner L2 auf lange Sicht ($n = \infty$)? oder Erzeugen die beiden Läufer jeweils unendlich viele Primzahlen?

Folgende Schüler haben sich mit der Aufgabe beschäftigt: Maximilian Hauck mit einem Python-Programm und einem theoretischen Teil zu (c+d) mit gruppentheoretischen Argumenten, Marc Alexander Strufe mit vier verschiedenen Pythondateien, die die unterschiedichen Fragen zu anzprim1/2 und zum Überholvorgang berücksichtigen, Yannik Spitzley mit einem Python-Programm für alle gestellten Fragen, Namgyu Kim vom Gymnasium Oberursel mit Teil (a) und Fabian von der Warth. Eine Bepunktung der Arbeiten wird demnächst erfolgen.

Bundeswettbewerb Mathematik 2018

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Welches ist die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner ist als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern?

Lösung

Wir nennen eine natürliche Zahl *konvex*, wenn sie die Eigenschaft der Aufgabenstellung besitzt. Die größte konvexe Zahl ist 96.433.469.

Beweis: Es sei $a := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$ mit $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle i mit $0 \leq i \leq n$ und $a_n \neq 0$ eine $(n+1)$-stellige konvexe Zahl, das heißt, es gilt nach Definition

$$a_i < \frac{a_{i+1} + a_{i-1}}{2} \text{ für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n-1. \tag{1.1}$$

Weil wir die größte konvexe Zahl suchen und weil die 3-stellige Zahl 100 eine (kleine) konvexe Zahl ist, können wir im folgenden $n \geq 2$ annehmen.

Wir beweisen nun die in der Lösung behauptete Aussage in zwei Schritten.

S1 Eine konvexe Zahl ist höchstens 8-stellig.

S2 Die größte konvexe Zahl ist 96.433.469.

(Erst aus einem Schritt wie S1 folgt mit Sicherheit, dass es überhaupt eine größte konvexe Zahl gibt.)

Wir betrachten eine beliebige konvexe Zahl $a = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$. Die definitorische Ungleichung (1.1) lässt sich äquivalent umformen zu

$$a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i \text{ für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n-1. \tag{1.2}$$

Wenn wir die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Ziffern über $d_i := a_i - a_{i-1}$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ definieren, so ist (1.2) gleichbedeutend mit

$$d_i < d_{i+1} \text{ für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n-1, \tag{1.3}$$

das heißt, die Folge der n ganzzahligen Differenzen $d_1, d_2, \dots, d_n$ ist streng monoton wachsend. Auf Grund der strengen Monotonie ist $d_k = 0$ für höchstens einen

Index k mit $1 \leq k \leq n$. Außerdem gilt: enthält die streng monotone Differenzen-Folge $(d_i)_{1\leq i\leq n}$ positive Glieder, so folgen diese alle als $d_n > d_{n-1} > ... > 0$ unmittelbar aufeinander; ebenso folgen die negativen Glieder alle als $d_1 < d_2 < d_3 < ... < 0$ unmittelbar aufeinander.
Zum Beweis von Schritt S1 stellen wir (durch Widerspruch) fest, dass höchstens 3 Glieder von $(d_i)_{1\leq i\leq n}$ positiv sind. Denn existieren mindestens 4 positive Glieder, so sind $0 < d_{n-3} < d_{n-2} < d_{n-1} < d_n$, also auf Grund der Ganzzahligkeit der Folgenglieder d_i sogar $1 \leq d_{n-3}, 2 \leq d_{n-2}, 3 \leq d_{n-1}$ und $4 \leq d_n$. Damit folgt für die Ziffern $a_n, a_{n-4} \in \{0, 1, ..., 9\}$, dass

$$\begin{aligned} 9 \geq a_n &= a_{n-4} + \sum_{j=0}^{3} (a_{n-j} - a_{n-j-1}) && (1.4) \\ &= a_{n-4} + \sum_{j=0}^{3} d_{n-j} \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10; \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Ebenso folgt aus der Annahme, dass mindestens 4 negative Glieder existieren, dass $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < 0$, auf Grund der Ganzzahligkeit der Folgenglieder d_i sogar $d_4 \leq -1, d_3 \leq -2, d_2 \leq -3$ und $d_1 \leq -4$, also für die Ziffern $a_0, a_4 \in \{0, 1, ..., 9\}$, dass

$$9 \geq a_0 = a_4 - \sum_{j=1}^{4} (a_j - a_{j-1}) = a_4 - \sum_{j=1}^{4} d_j \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10; \quad (1.5)$$

ein Widerspruch.
Die Differenzen-Folge $(d_i)_{1\leq i\leq n}$ besitzt also höchstens je 3 Glieder, die positiv bzw. negativ sind, und höchstens ein Glied, das den Wert 0 annimmt; die Differenzen-Folge hat also insgesamt höchstens $3 + 1 + 3 = 7$ Glieder, das heißt, für jede konvexe Zahl ist $n \leq 7$. Jede konvexe Zahl ist damit höchstens 8-stellig. Das beweist den Schritt S1.
Wir beweisen nun Schritt S2: Die in der Lösung genannte Zahl $a = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot 10^i = 96.433.469$ ist konvex. Wir beobachten, dass für ihre Differenzen-Folge $d_i = a_i - a_{i-1}$ die Beziehungen

$$d_i = -4 + i \iff a_i - a_{i-1} - i = -4 \text{ für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq 7 \quad (1.6)$$

gelten. Wir weisen durch Widerspruch nach, dass a die größte konvexe Zahl ist. Nehmen wir an, dass eine konvexe Zahl $b := \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot 10^i$ existiert, die größer ist als a. Für deren ganzzahligen Differenzen-Folge gilt analog zur Monotoniebedingung (1.2), dass

$$\begin{aligned} b_i - b_{i-1} < b_{i+1} - b_i \iff b_i - b_{i-1} - i \leq b_{i+1} - b_i - (i+1) \quad (1.7) \\ \text{für alle } \ i \ \text{ mit } 1 \leq i \leq 7. \end{aligned}$$

Auf Grund der Annahme $b > a$ und wegen $a_7 = 9$ existiert ein Index j mit $1 \leq j \leq 7$, so dass $b_i = a_i$ für $j \leq i \leq 7$ (das heißt, Gleichheit für die führenden Ziffern von a und b) und $b_{j-1} > a_{j-1}$ gilt. Es ist dann $b_j - b_{j-1} = a_j - b_{j-1} < a_j - a_{j-1}$, und für alle i mit $1 \leq i < j$

$$b_i - b_{i-1} - i \leq b_j - b_{j-1} - j < a_j - a_{j-1} - j = -4 \tag{1.8}$$

wegen der Monotoniebedingungen (1.7) und (1.6). Mit (1.8) folgt

$$\begin{aligned} b_0 = b_j - \sum_{i=1}^{j}(b_i - b_{i-1}) &> b_j - \sum_{i=1}^{j}(-4+i) \qquad (1.9)\\ = a_j - \sum_{i=1}^{j}(-4+i) &= a_j - \sum_{i=1}^{j}(a_i - a_{i-1}) = a_0 = 9, \end{aligned}$$

ein Widerspruch zu $b_0 \leq 9$. Das beweist Schritt S2 und damit die Aufgabe. □

Aufgabe 2

Bestimme alle reelle Zahlen x, für die $\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor = 1$ gilt.
Erläuterung: Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist.

Lösung

Die Gleichung in der Aufgabenstellung ist für alle reellen Zahlen erfüllt, die im Bereich $]-8;2[\cup]2;22[$ liegen. Dabei bezeichnet $]y;z[:= \{x|y < x < z\}$ das offene Intervall mit den Grenzen y und z.

Beweis: Der Definitionsbereich des Terms $\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor$ sind die reellen Zahlen x mit $x \neq -18$. Wir werten den Term auf den beiden Halbachsen des Definitionsbereichs abschnittsweise aus.

Auf der Teilmenge des Definitionsbereichs...	gilt...		...,also für den Term der Aufgabenstellung
$22 \leq x$	$0 < \frac{20}{x+18} \leq \frac{1}{2}$	$2 \leq \frac{x+18}{20}$	$\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor \geq 0 + 2 = 2$
$2 < x < 22$	$\frac{1}{2} < \frac{20}{x+18} < 1$	$1 < \frac{x+18}{20} < 2$	$\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor = 0 + 1 = 1$
$x = 2$	$\frac{20}{x+18} = 1$	$\frac{x+18}{20} = 1$	$\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor = 1 + 1 = 2$
$-8 < x < 2$	$1 < \frac{20}{x+18} < 2$	$\frac{1}{2} < \frac{x+18}{20} < 1$	$\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor = 1 + 0 = 1$
$-18 < x \leq -8$	$2 \leq \frac{20}{x+18}$	$0 < \frac{x+18}{20} \leq \frac{1}{2}$	$\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor \geq 2 + 0 = 2$
$x < -18$	$\frac{20}{x+18} < 0$	$\frac{x+18}{20} < 0$	$\lfloor \frac{20}{x+18} \rfloor + \lfloor \frac{x+18}{20} \rfloor \leq -1 + (-1) = -2$

Damit ist der behauptete Lösungsbereich nachgewiesen. □

Bemerkung: Tatsächlich nimmt der Term der Aufgabenstellung nur für $x = -38$ den Wert -2 an; für alle anderen $x < -18$ wird ein Wert kleiner oder gleich -3 angenommen.

Aufgabe 3

Im spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ wird der Höhenschnittpunkt mit H bezeichnet. Die Höhe von A schneide die Seite BC im Punkt H_a und die Parallele zu BC durch H schneide den Kreis mit Durchmesser AH_a in den Punkten P_a und Q_a. Entsprechend seien die Punkte P_b und Q_b sowie P_c und Q_c festgelegt.

Beweise, dass die sechs Punkt P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c und Q_c auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

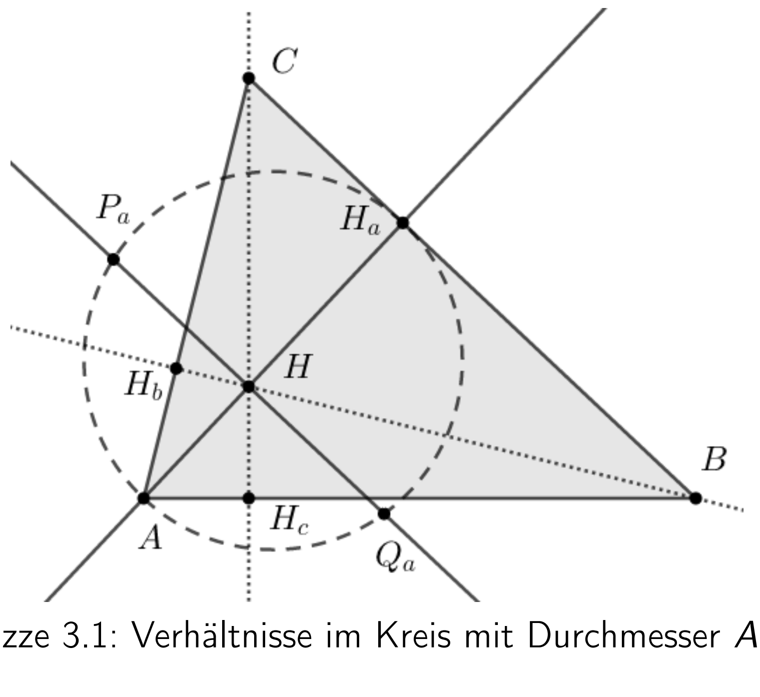
Lösung

Behauptung: Die sechs Punkte P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c und Q_c liegen alle auf einem gemeinsamen Kreis, dessen Mittelpunkt der Höhenschnittpunkt H ist.

Vorbemerkung: Wir motivieren zunächst anhand der Verhältnisse im Kreis mit Durchmesser AH_a (siehe Skizze 3.1) unseren Lösungsweg; alle Aussagen beweisen wir später. Weil P_aQ_a nach Konstruktion orthogonal zum Durchmesser AH_a des Kreises verläuft, gilt $\overline{P_aH} = \overline{HQ_a}$. Wenn ein Kreis durch die Punkte P_a und Q_a geht, so muss der Mittelpunkt dieses Kreises auf der Mittelsenkrechten der Strecke P_aQ_a liegen; das ist nach Konstruktion die Gerade AH_a. Für die Strecken P_bQ_b sowie P_cQ_c gelten entsprechende Überlegungen. Der Schnittpunkt der drei Geraden AH_a, BH_b und CH_c ist der Höhenschnittpunkt H; als Mittelpunkt eines gemeinsamen Kreises, auf dem die sechs Punkte P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c und Q_c liegen, kommt also nur H in Frage. Die Aufgabe ist bewiesen, wenn wir

$$\overline{P_aH} = \overline{P_bH} = \overline{P_cH} \tag{3.1}$$

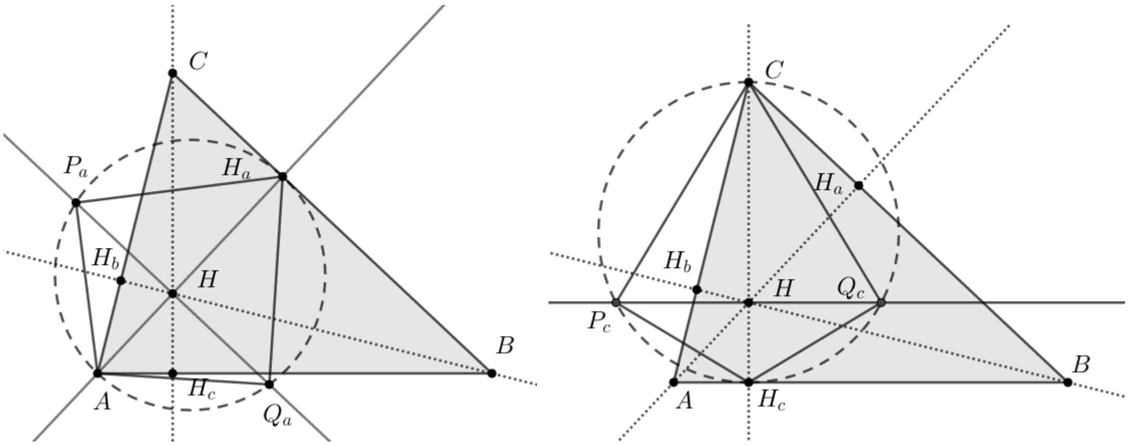
zeigen.



Skizze 3.1: Verhältnisse im Kreis mit Durchmesser AH_a

Bekanntermaßen verlaufen im Dreieck $\triangle ABC$, weil es spitzwinklig ist, alle Strecken AH_a, BH_b und CH_c (bis auf die Endpunkte) im Inneren des Dreiecks; insbesondere liegt damit auch der Höhenschnittpunkt H im Inneren dieser Strecken und des Dreiecks.

1. Beweis (Höhensatz): Wir betrachten zunächst im Kreis mit Durchmesser AH_a die Dreiecke $\triangle AH_aP_a$ und $\triangle H_aAQ_a$ (siehe Skizze 3.2 links); Weil die Punkte P_a, Q_a auf dem Kreis liegen, sind beide Dreiecke nach dem Satz von Thales rechtwinklig. Außerdem schneidet nach Konstruktion die Gerade P_aQ_a als Parallele zu BC die Gerade AH_a im Punkt H rechtwinklig: Die Strecke P_aH ist also die Höhe von P_a im Dreieck $\triangle AH_aP_a$; ebenso ist die Strecke Q_aH die Höhe von Q_a im Dreieck $\triangle H_aAQ_a$.



Skizze 3.2: Anwendung des Höhensatzes

Aus dem Höhensatz in rechtwinkligen Dreiecken folgen die Beziehungen

$$\overline{P_aH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{Q_aH}^2; \tag{3.2}$$

ebenso ergibt sich (siehe Skizze 3.2 rechts)

$$\overline{P_cH}^2 = \overline{H_cH} \cdot \overline{HC} = \overline{Q_cH}^2. \tag{3.3}$$

Wir betrachten nun die beiden Dreiecke $\triangle HAH_c$ bzw. $\triangle CHH_a$. Beide besitzen mit Scheitel H_c bzw. H_a einen rechten Winkel, außerdem haben die Dreiecke in H denselben Winkel (Scheitelwinkel). Die beiden Dreiecke sind also zueinander ähnlich, und es gilt mit (3.2) und (3.3)

$$\begin{aligned} \overline{H_cH} : \overline{HH_a} = \overline{AH} : \overline{HC} \iff& \overline{H_cH} \cdot \overline{HC} = \overline{AH} \cdot \overline{HH_a} \\ \iff& \overline{P_cH} = \overline{P_aH}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ebenso lässt sich $\overline{P_bH} = \overline{P_aH}$ begründen, und das beweist (3.1). □

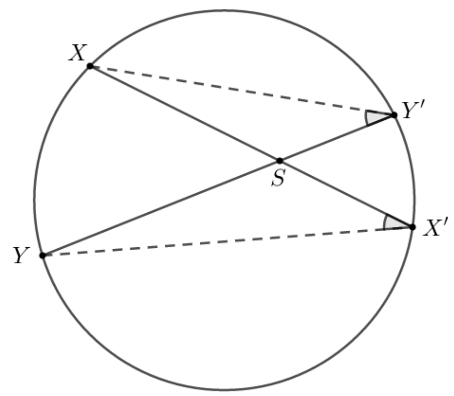
2. Beweis: Wir beginnen mit einem Hilfssatz, den wir im Beweis mehrfach benötigen;

Hilfssatz (Sehnensatz): Gegeben seien ein Kreis und ein beliebiger Punkt S im Inneren des Kreises. Zwei Geraden durch S mögen den Kreis in den Punkten X, X' bzw. Y, Y' schneiden. Dann gilt

$$\overline{SX} \cdot \overline{SX'} = \overline{SY} \cdot \overline{SY'}. \tag{3.5}$$

Beweis des Hilfssatzes:

Die eingezeichneten Winkel $\angle SX'Y$ mit Scheitel X' und $\angle XY'S$ mit Scheitel Y' sind nach dem Satz über den Umfangs- und Mittelpunktswinkel gleich, weil sie Umfangswinkel über demselben Kreisbogen k_{XY} sind. Die Dreiecke $\triangle YX'S$ und $\triangle Y'XS$ haben auch in S denselben Winkel (Scheitelwinkel), also sind die beiden Dreiecke ähnlich.

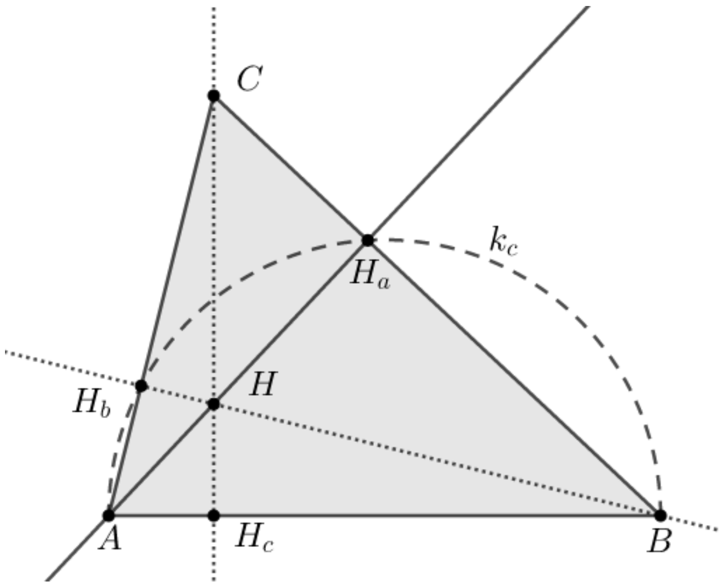


Demnach gilt $\overline{SX} : \overline{SY} = \overline{SY'} : \overline{SX'}$, und das beweist (3.5). ◇

Vergleichbare Aussagen wie im Hilfssatz, die sehr ähnlich bewiesen werden können, gelten auch, wenn der Punkt S außerhalb des Kreises liegt (Sekantensatz) oder wenn eine der Geraden den Kreis berührt (Tangentensatz); aber diese Aussagen benötigen wir im Rahmen der Aufgabe nicht.

Eine Eigenschaft des Höhenschnittpunkts folgt direkt aus dem Hilfssatz. Mit den Bezeichnungen der Aufgabenstellung gilt im spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ stets

$$\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b} = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c} =: r_H^2 \text{ mit } r_H > 0. \qquad (3.6)$$



Skizze 3.3: Beweis der Eigenschaft von H aus (3.6)

Zum Nachweis von (3.6) betrachten wir zunächst die Dreiecke $\triangle ABH_b$ bzw. $\triangle ABH_a$. Sie haben nach Konstruktion einen rechten Winkel in H_b bzw. H_a. Aus der Umkehrung des Satzes von Thales folgt damit, dass beide Punkte H_a und H_b auf dem Kreis k_c mit Durchmesser $AB = c$ liegen. Die Strecken AH_a und BH_b sind daher Sehnen des Kreises k_c, sie schneiden sich im Punkt H, der im Inneren des Kreises k_c liegt. Aus dem Hilfssatz folgt $\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b}$.

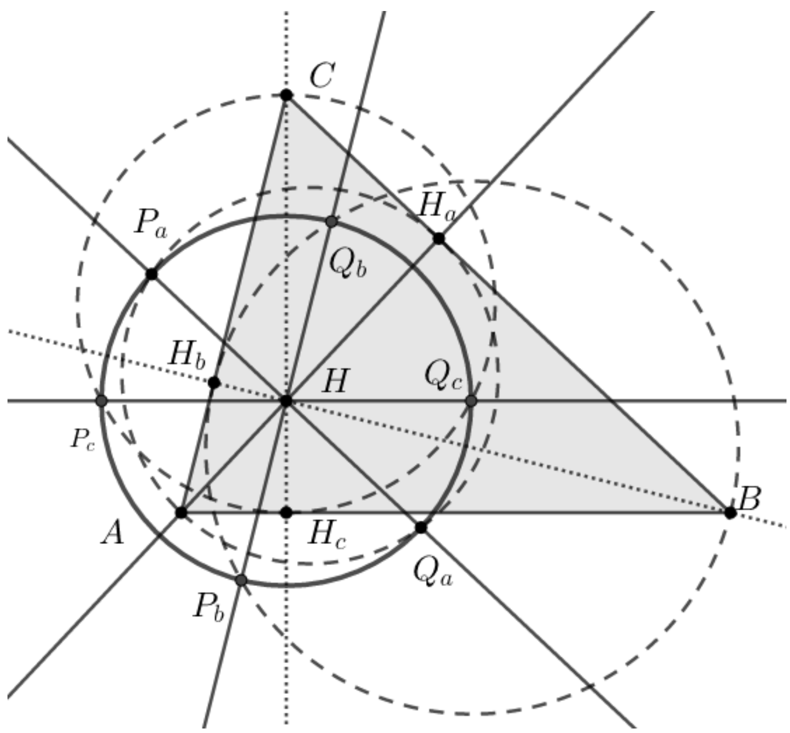
Aus einer entsprechenden Betrachtung im Kreis k_a mit Durchmesser BC folgt $\overline{BH} \cdot \overline{HH_b} = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c}$. Weil der Punkt H im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$, die Punkte A, B, C, H_a, H_b, H_c jedoch auf den Seiten des Dreiecks liegen, haben alle Strecken in (3.6) positive Länge, und das beweist (3.6).

Wir betrachten nun wie in der Aufgabenstellung die Verhältnisse im Kreis mit Durchmesser AH_a; vgl. Skizze 3.1. In diesem Kreis sind AH_a und P_aQ_a Sehnen, die sich im Höhenschnittpunkt H schneiden, der im Inneren dieses Kreises liegt. Weil P_aQ_a nach Konstruktion orthogonal zum Durchmesser AH_a des Kreises verläuft, gilt aus Symmetriegründen $\overline{P_aH} = \overline{HQ_a}$, und aus dem Hilfssatz und (3.6) folgt

$$\overline{P_aH}^2 = \overline{HQ_a}^2 = \overline{P_aH} \cdot \overline{HQ_a} = \overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = r_H^2. \tag{3.7}$$

Durch entsprechende Betrachtungen in den Kreisen mit den Durchmessern BH_b bzw. CH_c schließen wir

$$\begin{aligned}\overline{P_bH}^2 = \overline{HQ_b}^2 = \overline{P_bH} \cdot \overline{HQ_b} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b} = r_H^2 \\ = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c} = \overline{P_cH}^2 = \overline{HQ_c}^2 = \overline{P_cH} \cdot \overline{HQ_c}.\end{aligned} \tag{3.8}$$



Das beweist (3.1). Die sechs Punkte P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c und Q_c liegen also alle auf dem gemeinsamen Kreis um den Höhenschnittpunkt H mit Radius r_H. □

Aufgabe 4

Im Raum sind sechs Punkte gegeben, die paarweise verschiedene Entfernungen voneinander haben und von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten alle Dreiecke mit Ecken in diesen Punkten.

Beweise, dass es unter diesen Dreiecken eines gibt, dessen längste Seite zugleich kürzeste Seite in einem anderen dieser Dreiecke ist.

Beweis: Zunächst färben wir alle Strecken zwischen zwei der sechs gegebenen Punkte *blau* ein. Für ein beliebig gewähltes Dreieck, das Ecken in drei der sechs gegebenen Punkte hat, existiert genau eine Seite, die die kürzeste Seite dieses Dreiecks ist, da die Punkte nach Voraussetzung paarweise verschiedene Entfernungen voneinander haben. Wir färben diese Seite *rot* um, und verfahren auf diese Weise mit jedem der Dreiecke. Wenn wir alle Dreiecke auf diese Weise durchlaufen haben, enthält jedes der Dreiecke mindestens eine rot gefärbte Seite (nämlich mindestens die kürzeste seiner Seiten).

Für das weitere Vorgehen im Beweis ist die folgende Beobachtung grundlegend: existiert unter den zwanzig Dreiecken ein Dreieck, in dem alle drei Seiten rot gefärbt sind, so haben wir ein Dreieck wie in der Aufgabenstellung gefunden, das heißt, wir haben damit ein Dreieck gefunden, dessen längste Seite zugleich kürzeste in einem anderen dieser Dreiecke ist: Denn die längste Seite des gefundenen Dreiecks ist ja rot gefärbt und ist damit kürzeste Seite in einem anderen der Dreiecke.

Interessanterweise können wir die Existenz eines Dreiecks, das drei rot gefärbte Seiten hat, ohne weitergehende Kenntnis der konkreten Entfernungen zwischen den sechs Punkten beweisen:

Wir wählen hierfür einen beliebigen Punkt A der sechs gegebenen Punkte. Von ihm gehen fünf Strecken aus, die nach Konstruktion entweder blau oder rot gefärbt sind. Nach dem Schubfachprinzip haben mindestens drei dieser Strecken dieselbe Farbe; diese gleichfarbigen Strecken mögen zu den Punkten B, C und D führen.

- Sind die drei gleichfarbigen Strecken AB, AC und AD blau gefärbt, so sind alle Strecken, die B, C und D untereinander verbinden, rot gefärbt, denn sie müssen jeweils die kürzeste Strecke in den Dreiecken $\triangle ABC, \triangle ABD$ bzw. $\triangle ACD$ sein.
- Sind die drei gleichfarbigen Strecken AB, AC und AD rot gefärbt, so entsteht zusammen mit der kürzesten Seite im Dreieck $\triangle BCD$ ein Dreieck (mit Ecke A), in dem alle Seiten rot gefärbt sind.

Nach der oben formulierten Beobachtung ist die Aufgabe damit bewiesen. $\square$

Wir danken Herrn Prof. Quaisser und Herrn StD Fegert für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Engel, Michael: Die Namen der Zahlen.

Wer bei dem Titel des Buches vermutet, dass hier die Namen der Zahlen von acht bis zehntausend alphabetisch aufgelistet werden, der liegt leider falsch. ☺
Stattdessen geht es um Namen und Bedeutung von Zahlen mit besonderen Eigenschaften. Was Quadratzahlen, Primzahlen oder römische Zahlen sind, wird jeder wissen, der einmal eine Schule besucht hat. Binärzahlen und Hexadezimalzahlen lassen Informatiker-Augen leuchten; über Fibonacci-Zahlen oder Dreieckszahlen freuen sich Mathematikbegeisterte. Aber wer weiß schon was mit befreundeten Zahlen oder glücklichen Zahlen gemeint ist?

Nach einem kurzen Vorspann mit den üblichen und bekannten Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ folgt die Vorstellung von 141 Zahlennamen von Abundanten bis zu zyklischen Zahlen. Als alphabetisch sortiertes Lexikon findet man neben dem Namen der Zahl deren Eigenschaften, eventuell eine Berechnungsformel und – sofern sie nach einem Menschen benannt wurden – Vor- und Nachnamen des Betreffenden.

Abgerundet wird Engels Buch durch eine Tabelle, in der zu den Zahlen von 1 bis 100 aufgeführt wird, welche der genannten Eigenschaften zutrifft.

Fazit:

Michael Engel ist ein schönes Lexikon gelungen, in dem man sowohl die Beschreibung zu einer Benennung nachschlagen als auch einfach nur ziel- und wahllos blättern und schmökern kann.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Engel, Michael: Die Namen der Zahlen, Köln (Anaconda) 2017, ISBN 978-3-7306-0508-0, gebunden 143 Seiten.

Art des Buches:	mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 130

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Michel Schultealbert 8, Oskar Su 19, Jan Christian Weber 8;
Kl. 6: Lars Schall 14;
Kl. 7: Linus Kemmeter 8, Nils Koch 8 Arvin Plaumann 7, Oskar Schott 6;
Kl. 8: Lukas Born 14, Lea Daum 12, Jonas Schneider 12, Trevor Schöller 7;
Kl. 10: Torben Bürger 10, Maximilian Hauck 25.

Bad Dürkheim, Werner-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 10: Marc Strufe 20.

Bielefeld, Gymnasium am Waldhof: Kl. 8: Roxana Mittelberg 25.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 8: Noah Böhm 10; **Kl. 9:** Luca Keil 14, Alina Chiara Stock 6,5.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 5: Konstantin Herbst 5; **Kl. 8:** Aleksandra Herbst 22.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 11: Maximilian Göbel 22, Linda Theten 19.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule
Kl. 7: Johannes Sabel 12, Alina Wick 12;
Kl. 8: Yosra el Mahjoub 30;
Kl. 9: Dominik Horstkötter 18;
Kl. 11: Melanie Schuy 5;
Kl. 12: David Storzer 21.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter: Kl. 10: Dennis Mayle 22.

Linz, Martinus Gymnasium: Kl. 7: Simon Waldek 10.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 6: Gregor Salaru 37.

Maxdorf, Lise-Meitner-Gymnasium:
Kl. 6: Dominik Göbel 17; **Kl. 9:** Gergana Marinova 10; **Kl. 11:** Vabian von der Warth 23.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 6: Jonathan Friedel 13, Luca Petri 14, Esther Schmedding 5;
Kl. 8: Kathrin Bormann 22, Paulina Herber 18;
Kl. 9: Annika Borrmann 14,5, Sönke Schneider 31,5;
Kl. 11: Jonas Blumenroth 20, Lennard Freud 17, Jonas Glückmann 17, Fabian Rasch 10; **Kl. 12:** Namgyu Paul Kim 23, Jan Wabnig 17.

Schwedt/Oder, Carl-Friedrich-Gaus-Gymnasium:
Kl. 11: Julian Scheinert 17.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 6: Tu Sam Dong 16,5; **Kl. 8:** Miriam Büttner 74.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium: Kl. 8: Raphael Gaedtke 19.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium: Kl. 7: Mareike Bühler 20.

Mitteilungen

- Die nächste Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) findet vom 29. August bis 2. September 2018 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  `www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie.`

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Emily Searle-White
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 38 Heft 133 März 2018

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid