

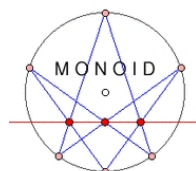
Jahrgang 38

Heft 135

September 2018

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der

15.11.2018.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion**

Tel.: 06131/3926107

Fax: 06131/3924389

55099 Mainz

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

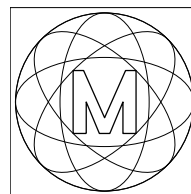
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider oder Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfisch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2018

mit der Preisvergabe

an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2017/2018

am Samstag, dem 24. November 2017, Beginn 10 Uhr,

im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,

Frankenstraße 17, 55232 Alzey.

Den Festvortrag wird Bettina Wiebe, Universität Mainz, halten.

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.

Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite

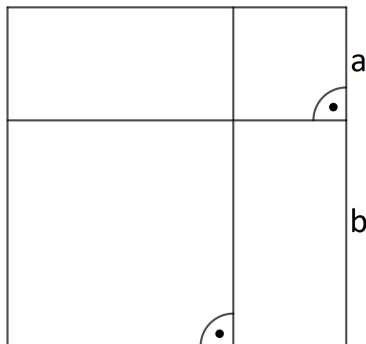
www.mathematik.uni-mainz.de/monoid.

Beweis ohne Worte

Die binomische Formel

von Hartwig Fuchs

Aus der frühen chinesischen Mathematik ist ein geometrischer Beweis ohne Worte der binomischen Formel überliefert:



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Es sei $a + b = c$ gesetzt. Dann hat das größte Quadrat die Fläche

$$(1) \quad c^2 = (a + b)^2$$

Die beiden Rechtecke sind kongruent. Jedes von ihnen hat daher die gleiche Fläche ab . Die Teilquadrate des großen Quadrats besitzen die Fläche a^2 bzw. b^2 . Somit gilt für das große Quadrat:

$$(2) \quad c^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich die binomische Formel.

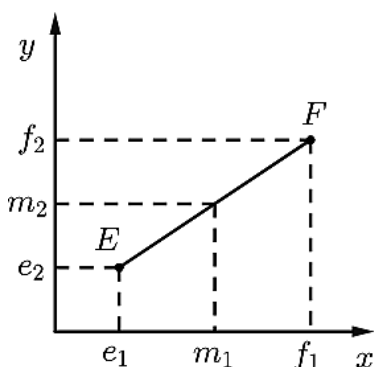
Jedes Dreieck gehorcht der Zahl $\frac{16}{15}$

von Hartwig Fuchs

Gegeben sei ein Dreieck ABC . Dann kann man in die Ebene des Dreiecks ein Koordinatensystem so legen, dass der Punkt A im Ursprung und der Punkt B auf der x -Achse des Systems liegen. Die Koordinaten von A, B und C seien dann: $A = (0, 0)$, $B = (4b, 0)$ und $C = (4c, 4d)$.

Jedes Dreieck ABC besitzt ein Mittendreieck – das ist jenes von uns mit PQR bezeichnete Dreieck, dessen Eckpunkte P, Q und R die Mittelpunkte der Seitenhalbierenden von ABC sind.

Welche Koordinaten haben die Punkte P, Q und R ?



Wir bestimmen sie mit einer Formel, mit der man die Koordinaten des Mittelpunktes $M = (m_1, m_2)$ einer Strecke EF mit $E = (e_1, e_2)$ und $F = (f_1, f_2)$ berechnen kann:

$$(1) \quad m_1 = \frac{1}{2}(e_1 + f_1) \text{ wegen } m_1 = e_1 + \frac{1}{2}(f_1 - e_1);$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(e_2 + f_2) \text{ wegen } m_2 = e_2 + \frac{1}{2}(f_2 - e_2).$$

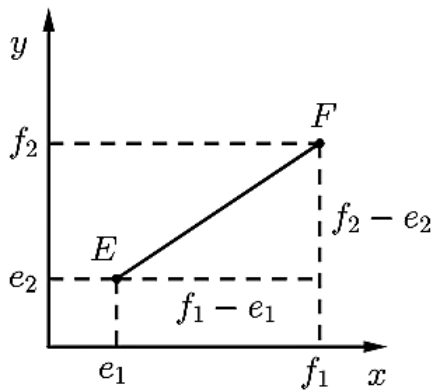
Es seien nun H, K und L die Mittelpunkte der Seiten AB, BC und AC des Dreiecks ABC . Dann gilt mit (1)

$$H = (2b, 0), \quad K = (2b + 2c, 2d), \quad \text{und} \quad L = (2c, 2d).$$

Nun können wir die Koordinaten der Mittelpunkte P, Q und R der Seitenhalbierenden AK, BL und CH mit (1) bestimmen:

$$P = (b + c, d), \quad Q = (2b + c, d), \quad \text{und} \quad R = (b + 2c, 2d).$$

Um die in der Überschrift enthaltene Behauptung zu beweisen, stellen wir eine Beziehung her zwischen den quadrierten Seitenlängen des Dreiecks ABC und den drei Dreiecken AQR, BRP und CPQ (vgl. die Figur unten), die durch die Zahl $\frac{15}{16}$ charakterisiert ist.



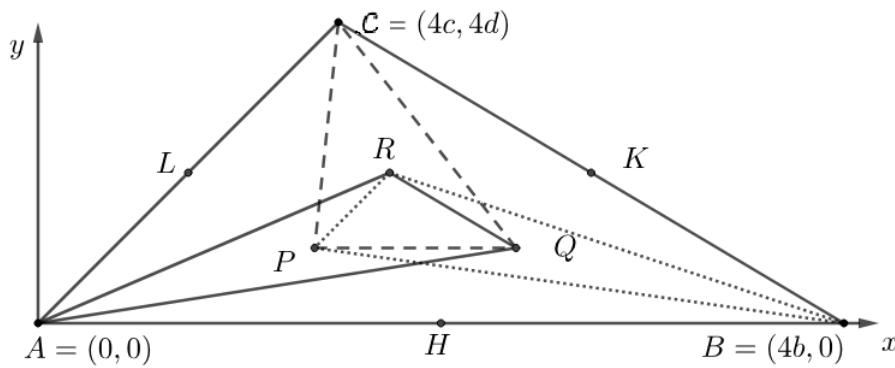
Die quadrierte Länge $|EF|^2$ einer Strecke EF mit $E = (e_1, e_2)$ und $F = (f_1, f_2)$ ergibt sich aus der Formel

$$(2) \quad |EF|^2 = (f_1 - e_1)^2 + (f_2 - e_2)^2,$$

die aus dem Satz des Pythagoras folgt.

Wir bezeichnen mit $V(ABC)$ die Summe der quadrierten Seitenlängen des Dreiecks ABC . Dann ist mit der Formel (2):

$$\begin{aligned} V(ABC) &= |AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \\ &= 16b^2 + (16(c-b)^2 + 16d^2) + (16c^2 + 16d^2) \\ &= 32(b^2 - bc + c^2 + d^2). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V(AQR) &= |AQ|^2 + |QR|^2 + |RA|^2 \\ &= (2b+c)^2 + d^2 + (c-b)^2 + d^2 + (b+2c)^2 + 4d^2 \\ V(BRP) &= |BR|^2 + |RP|^2 + |PB|^2 = \\ &= (2c-3b)^2 + 4d^2 + (-c)^2 + (-d)^2 + (3b-c)^2 + (-d)^2 \\ V(CPQ) &= |CP|^2 + |PQ|^2 + |QC|^2 = \\ &= (3c-b)^2 + (-3d)^2 + b^2 + (3c-2b)^2 + (3d)^2. \end{aligned}$$

Wenn man nun die drei letzten Gleichungen addiert, die Klammern auflöst und dann die Summanden der rechten Seite geeignet zusammenfasst, so erhält man

$$V(AQR) + V(BRP) + V(CPQ) = 30(b^2 - bc + c^2 + d^2).$$

Damit gilt – und zwar für jedes Dreieck –

$$\frac{V(ABC)}{V(AQR) + V(BRP) + V(CPQ)} = \frac{16}{15}.$$

Was uns über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

Welche Summe ist größer: die der 9 Zahlen links oder die der 9 Zahlen rechts?

9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1		1	2	3	4	5	6	7	8	
7	6	5	4	3	2	1			1	2	3	4	5	6	7		
6	5	4	3	2	1				1	2	3	4	5	6			
5	4	3	2	1					1	2	3	4	5				
4	3	2	1						1	2	3	4					
3	2	1							1	2	3						
2	1								1	2							
1									1								

Beide Summen sind gleich groß!

Monoidale Knebeleien

von Hartwig Fuchs

Man ersetze in den Buchstabenfolgen *MON* und *OID* verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern so, dass man zwei dreiziffrige natürliche Zahlen erhält, für deren Summe S gilt:

$$S = MON + OID$$

ist minimal.

Lösung

Es ist nicht möglich, dass $MON = OID$ ist, weil sonst z.B. $N = D$ wäre. Wir setzen daher $MON > OID$ voraus.

Da MON und OID dreiziffrige Zahlen zuzuordnen sind, ist $M \neq 0$ und $O \neq 0$ und daher $M + O \geq 3$.

Weil S minimal sein soll setzen wir zunächst $M = 2$, $O = 1$. Damit ist $O + I = 1$ möglich. Wir setzen daher $I = 0$.

Dann ist $N \geq 3$ und $D \geq 3$, sodass $N + D \geq 7$ ist. Wir wählen $N = 4$, $D = 3$ oder $N = 3$, $D = 4$, womit wir $213 + 104 = 317$ oder $214 + 103 = 317$ erhalten.

Wenn man $MON < OID$ voraussetzt, dann braucht man in den Überlegungen oben nur M durch O und O durch M zu ersetzen, damit man erhält: $M = 1$, $O = 2$, $I = 0$, $N = 3$ und $D = 4$ oder $N = 4$ und $D = 3$. Dann ist $123 + 204 = 124 + 203 = 327$. Die minimale Summe ist daher $S = 317$.

Ein mathematischer Zaubertrick mit Zahlen

von Frank Rehm

Bei einer Feier sind Zaubertricks besonders beliebt, und wenn dabei auch noch Mathematik dahinter steckt, haben alle neben viel Spaß vielleicht noch ein „Knoff-Hoff“-Erlebnis.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Hinter Kartenkunststücken stecken oft einfache Rechenregeln, hier wurde ein Trick mit Zahlenkarten von 1 bis 16 ausgewählt. Es genügt auch, die Zahlen auf einem großen Stück Papier zu notieren (siehe Abb.1).

Abb.1 – Ausgangslage

Bei einem Trick ist der Beifall umso größer, wenn scheinbar zufällige Aktionen am Ende zu einem finalen Resultat führen, das der mathematisch versierte Magier voraussagt. Die Antwort (= *die Summe der vier zufällig ausgewählten Zahlen*) hat er bereits in einem Kuvert hinterlegt, das er für alle sichtbar vorher auf einem Tisch postiert hat. Ihr fragt nun nach einem Gehilfen, der das Zahlenquadrat nach folgenden Regeln verändert:

Es wird eine beliebige nicht markierte Zahl mit einem Kreis markiert und danach alle Zahlen der gleichen Zeile und Spalte weggestrichen. Nach drei weiteren Aktionen sind alle Zahlen verbraucht. Der Helfer addiert nun die vier markierten Zahlen (siehe Abb. 2 für die Züge 1 und 2)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Abb.2 – die Züge 1+2 bei dem Zaubertrick (erst 10, dann 4 wählen)

Mit Pathos könnt Ihr nun das Kuvert öffnen und demonstrieren, dass Ihr die Summe wirklich voraussagen konntet. Wichtig ist hier noch der Hinweis, dass es keine Absprachen mit dem Ausführenden gab.

Pfiffige Gäste werden dann vielleicht eine Wiederholung verlangen, darauf solltet Ihr Euch aber nicht einlassen! Fragt besser, wer eine Idee hat! Worin könnte das Geheimnis des Tricks bestehen? In diesem Heft erfahrt Ihr im hinteren Teil die Auflösung des Zahlenrätsels mit einem kurzen Beweis.

Ihr könnt später versuchen, den Trick zu verallgemeinern. Wir werden im nächsten Heft die Mathematik erläutern, die sich ganz allgemein dahinter verbirgt. Es erwartet Euch dann noch eine überraschende Anwendung auf einen dreidimensionalen Fall mit 6 Zahlen-Würfeln, die wir einem kreativen Hersteller von Denkspielen, Jean-Claude Constantin verdanken.

Die restlichen zwei Züge könnten z.B. wie folgt aussehen (Abb. 3):

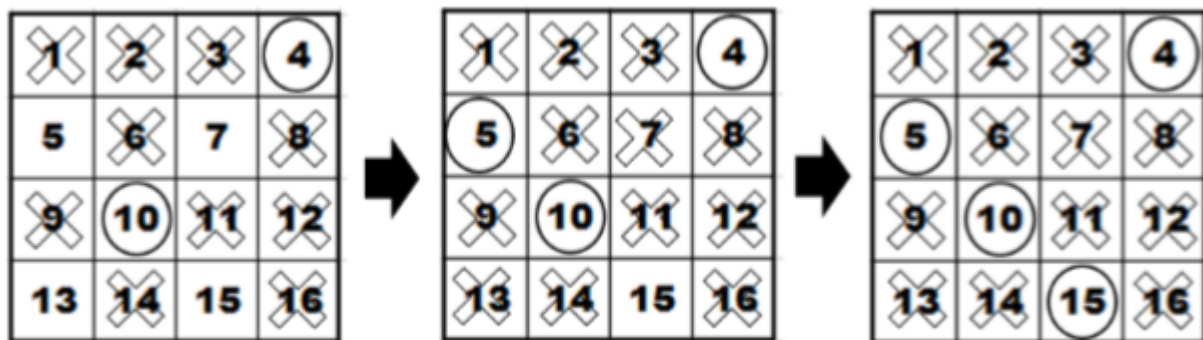


Abb.3 – Züge 3 und 4 für den Zaubertrick mit den Zahlen von 1 bis 16: es ergibt sich $4+5+10+15=34$

Wie man sieht, müsst Ihr im Kuvert nur die Lösungssumme 34 notieren, wie lässt sich das erklären?

Vorher noch etwas Kombinatorik: Wie viele verschiedene Züge gibt es überhaupt? Für den ersten Zug gibt es 16 Möglichkeiten, dann streicht man $2 \cdot 3 = 6$ Zahlen. Für die verbleibenden Zahlen gibt es noch $16 - 7 = 9$ Möglichkeiten, dann streicht man weitere $2 \cdot 2 = 4$ Zahlen, in Abb. 2 sind das die Zahlen 1,3,8,16. Im nächsten Zug (siehe Abb. 3 Mitte) wird aus den restlichen vier Zahlen die 5 markiert und es werden weitere $2 \cdot 1 = 2$ Zahlen (7 und 13) gestrichen. Am Ende bleibt nur eine Zahl zu markieren, im Beispiel die 15. Insgesamt erhält man also $16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = 576 = 24^2 = (4!)^2$ mögliche Zugfolgen. Der Wert ergibt sich auch daraus, dass man für die markierten vier Zahlen unabhängig jeweils eine Zeile und eine Spalte in beliebiger Reihenfolge auswählen kann, und Permutationen von vier Zeilen bzw. vier Spalten gibt es bekanntlich $24 = 4!$, also für die Kombinationen Zeile/Spalte sind dies 24^2 .

Zum Nachweis, dass man immer die Summe 34 erhält: Die markierten Zahlen müssen aus verschiedenen Zeilen und Spalten stammen, wir reduzieren zunächst die Vielfalt an Möglichkeiten, indem wir die Zahlen durch die vier Zahlen der ersten Zeile ersetzen und anschließend die Differenzen hinzufügen. Da alle vier

Zahlen aus verschiedenen Spalten stammen, müssen alle Differenzen: 0, 4, 8, 12 vorkommen, allerdings in beliebiger Reihenfolge. Denn die Zahlen jeder Zeile sind immer genau um 4 erhöht gegenüber der Zeile vorher. Somit lässt sich die „magische“ Lösungszahl wie folgt berechnen: $(1 + 2 + 3 + 4) + (0 + 4 + 8 + 12) = 10 + 24 = 34$, q.e.d.

Der Beweis fokussiert sich exakt auf das Quadrat mit 16 Zahlen, dann erhebt sich die Frage, ob man diesen Trick auch mit kleineren und größeren Quadraten, also allgemein mit den Zahlen 1 bis n^2 vorführen kann ($n \geq 1$, ganzzahlig)? Können auch Rechtecke $m \times n$ mit den Zahlen 1 bis mn verwendet werden?

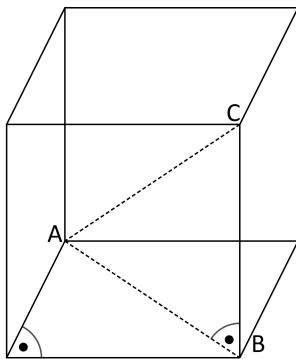
Mathematisch überlistet

von Hartwig Fuchs

Ein Junge steigt mit seinem 1,62m langen Surfbrett in die Straßenbahn. Der Fahrer sagt ihm, er dürfe nicht mitfahren, denn der Transport von Objekten größer als 1m sei nicht erlaubt.

Dennoch gelingt es dem Jungen, von der Straßenbahn mitgenommen zu werden. Wie hat er das erreicht?

Der Junge stellt sein Surfbrett diagonal in eine würfelförmige Box mit der Seitenlänge 1m – deren Raumdiagonale hat eine Länge von etwa 1,73m.



Die Länge einer Raumdiagonale AC ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras so (vgl. die Figur):

$$|AC|^2 = |AB|^2 + 1^2 = (1^2 + 1^2) + 1^2 = 3, \text{ also} \\ |AC| = \sqrt{3} \approx 1,73$$

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Dies ist das erste Denkerchen in diesem Schuljahr. Also träumen wir doch einmal davon, wie der Schulleiter einer großen Schule am ersten Schultag alle 1600 Schülerinnen und Schüler auf dem Pausenhof versammelt und in einer Reihe Aufstellung nehmen lässt. Die Schüler zählen einmal durch, so dass jeder seine Platznummer kennt. Stellen wir uns weiter vor, wie anschließend die Hausmeister mit Körben voller Mohrenköpfe kommen und jedem der Schüler einen Mohrenkopf austeilen. Aber halt – anschließend wird allen Schülern mit einer durch 2 teilbaren Platznum-

mer ihr Mohrenkopf wieder abgenommen! In einem dritten Durchgang verändern die Hausmeister bei allen Schüler mit einer durch 3 teilbaren Platznummer den „Mohrenkopf-Zustand“. Wer von diesen also vorher einen hatte, muss ihn abgeben; wer gerade keinen hatte, erhält einen. So geht es mit den durch 4, 5, ... teilbaren Platznummern weiter: Jedes Mal wird für die betroffenen Schüler der „Mohrenkopf-Zustand“ geändert.

Nachdem die Hausmeister leicht erschöpft schließlich bei dem einzigen Schüler, dessen Platznummer durch 1600 teilbar ist, den „Mohrenkopf-Zustand“ gewechselt haben, gibt der Schulleiter das Kommando, und alle Besitzer eines Mohrenkopfs dürfen endlich hineinbeißen.

Welche Platznummern haben diese glücklichen Schüler? Die Antwort ist zu begründen.

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. November 2018 an die MONOID-Redaktion senden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 133

In Heft 133 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Wieder einmal wollen Peter und Paul ins Kino gehen. Diesmal darf Paul eine Wette vorschlagen, deren Verlierer den Gewinner einladen muss. Paul sagt zu Peter: „Hier habe ich für dich drei Haufen Spielsteine vorbereitet. Der eine besteht aus 51, der zweite aus 49, der kleine Haufen aus fünf Steinen. Du darfst nacheinander ziehen, wobei ein Zug entweder bedeutet, dass du zwei Haufen zusammenlegst oder dass du einen Haufen, wenn er eine gerade Anzahl von Steinen enthält, in zwei gleich große Haufen aufteilst.“

„Worauf soll das hinaus?“ fragt Peter. Paul entgegnet: „Wenn du es schaffst, mit diesen Zügen 105 Haufen aus je einem Spielstein herzustellen, dann hast du gewonnen, sonst ich.“

„Das ist aber streng. Du musst mir ein wenig entgegenkommen. Es sollte schon reichen, wenn ich 40 Haufen erhalten habe“, meint Peter. Paul, leicht überrumpelt, akzeptiert den Wunsch von Peter, der daraufhin gleich die ersten Züge durchführt. Wer von den beiden kann sich sicher sein, vom anderen eingeladen zu werden? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Paul kann sich sicher sein, von Peter eingeladen zu werden.

Da zu Beginn alle Haufen aus einer ungeraden Anzahl von Spielsteinen bestehen, kann Peter im ersten Zug nur zwei Haufen zusammenlegen. Dafür gibt es genau drei Möglichkeiten:

1. Fall: Er legt die Haufen mit den Anzahlen 5 und 49 zusammen. So entstehen zwei Haufen mit den Anzahlen 51 und 54. Der ggT dieser Zahlen ist 3. Daher wird ab sofort die Steineanzahl jedes der durch Halbieren oder Zusammenlegen gebildeten Haufen durch 3 teilbar sein. Dies heißt, dass am Ende jeder Haufen aus mindestens 3 Steinen besteht.

2. Fall: Er legt die Haufen mit den Anzahlen 51 und 49 zusammen. So entstehen zwei Haufen mit den Anzahlen 5 und 100. Der ggT dieser Zahlen ist 5. Daher wird ab sofort die Steineanzahl jedes der durch Halbieren oder Zusammenlegen gebildeten Haufen durch 5 teilbar sein. Dies heißt, dass am Ende jeder Haufen aus mindestens 5 Steinen besteht.

3. Fall: Er legt die Haufen mit den Anzahlen 5 und 51 zusammen. So entstehen zwei Haufen mit den Anzahlen 49 und 56. Der ggT dieser Zahlen ist 7. Daher wird ab sofort die Steineanzahl jedes der durch Halbieren oder Zusammenlegen gebildeten Haufen durch 7 teilbar sein. Dies heißt, dass am Ende jeder Haufen aus mindestens 7 Steinen besteht.

Weil sowohl $105:3=35$ als auch $105:5=21$ sowie $105:7=15$ kleiner als 40 sind, kann Peter die Mindestanzahl von 40 Haufen nicht erreichen.

Vollständig richtige Lösungen haben Cedric Friedrich, Maximilian Göbel, Maximilian Hauck, Julian Scheinert, Sönke Schneider, Yannik Spitzley, Daniel Waldek und Clemens Zabel eingereicht.

Wie ist die Situation, wenn Paul zu den drei genannten einen vierten Haufen von Spielsteinen vorbereiten muss? Gibt es auch dann die Möglichkeit, mit der gleichen Spielregel 40 Haufen nicht zu erreichen? Aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Die Aufgabe für den Computer-Fan



Auf dem Bild oben ist die Reihenfolge der Buchstaben durcheinander geraten. Ähnlich wie im Geheimtext unten. Zum Glück sind aber im Geheimtext unten alle Kehr- und Interpunktions-Zeichen erhalten geblieben, was wichtig für die (c)-Frage

ist. Außerdem entspricht jedem Klartextbuchstaben eineindeutig ein Geheimtextbuchstabe (damit die Umkehrung möglich wird)! Beim Geheimtext handelt es sich um ein mathematisches Gedicht, das entschlüsselt werden soll.

Als Alphabete werden jeweils die 26 Buchstaben des deutschen Alphabetes verwendet: A, B,..., Z oder a, b,..., z

jmf arslxkmhxvzwtlvd cvlhwkse.
uzv gxlhlvzs, wzv nvwsvls zd vgzkbvzs,
gvdd vhws uzv ncmvuv gvcs zlh cztls vhbxdzs;
uvh cvlhwkse, dxtl arslxkmhxw nvdxds,
kzcs lvisv, gzv vh kxcs ei wvzdvh evzs.
vzd mapvh lxs arslxkmhxw kvgvzls
uvd kmvssvhd, uzv uvd cztls wshxlc zlf kvwxds;
vw slxsvd bidu, kvwtlcxtlsvs idu jvnhxds,
vzdliduvhs mtlwvd wvzdv uxdbnxhbxzs.
uzv mtlwvd wvzs uvf sxkv, gvdd wzv gzssvhd,
uxww vzdv dviv gxlhlvzs wztl vdslivccv,
vhlvnd vzd idvducztlw kvnhivccv;
arslxkmhxw vhpivccs wzv fzs vdswwsevd;
idu fxtlscmw, wztl uvf cztls ei gzuvhwsevd,
jvhwtlczvwwvd wzv uzv xikvd idu vhezssvhd.

Aufgaben

- Schreibe ein Programm, welches die Häufigkeiten der kleinen Buchstaben des Geheimtextes ermittelt! Und daraus dann die häufigsten 10 Geheimtext-Buchstaben bestimmt!
- In einem sogenannten deutschen Standardtext sind E,T,N,I,H,S,R,A,L,D die häufigsten Buchstaben in der aufgelisteten Reihenfolge. Benutze dies, um mit dem Ergebnis aus (a) eine Teilentschlüsselung zu erhalten. Ersetze im Geheimtext die in (a) bestimmten zehn kleinen Buchstaben durch die ihnen entsprechenden großen Buchstaben des Klartextes!
- Ermittle die nicht entschlüsselten Stellen von Hand! Ergebnis soll das ganze Gedicht im Klartext sein!

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2018 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 133

Mystische 3-stellige Zahlen und ihre Folgen

Schreibweise:

Im Folgenden werden natürliche Zahlen mit maximal vier Stellen in der Form $[thze]$ geschrieben. Dabei stehen t, h, z, e für die Tausender, Hunderter, Zehner und Einer; führende Nullen entfallen dabei.

Definition:

Eine dreistellige natürliche Zahl $N = [hze]$ kann man in der Form $N = 100h + 10z + e$ schreiben. Die Summe der digitalen 3-ten Potenzen von N ist $S_3(z) = h^3 + z^3 + e^3$. Gilt $N = S_3(z)$, so heißt N „Mystische Zahl“.

Iterationsvorschrift:

Obige Definition mit der Summe der digitalen 3-ten Potenzen kann man als Vorschrift zur Iteration von natürlichen Zahlen N mit höchstens 4 Stellen benutzen: $N = [thze] \rightarrow N' = S_3(N)$. (Ist N z.B. nur 2-stellig, so ist in der Definition entsprechend $t = 0$ und $h = 0$ zu verwenden). Beginnt man mit der Startzahl N , so hat die Iterationsfolge die Elemente $N, S_3(N), S_3^2(N) = S_3(S_3(N)), S_3^3(N)$ etc. Kommt ein Element $S_3^i(n)$ schon einmal bei den vorhergehenden i Gliedern vor, so gerät die Folge in einen *Zykel*. Ein solches Element wird *Endzahl* genannt (Beispiel unten). Falls $N = N'$ gilt, so nenne ich die mystische Zahl N auch *Fixpunkt*.

Beispiele Zyklen, Fixpunkten und Endzahlen:

Startzahl $N = 235$; Folge = $[160, 217, 352, 160]$. Die Folge selbst ist *zyklisch*, 160 ist eine *Endzahl*

Startzahl $N = 236$; Folge = $[251, 134, 92, 737, 713, 371, 371]$. Es reproduziert sich die *Endzahl* 371, sie ist also auch ein *Fixpunkt*

Startzahl $N = 238$; Folge = $[547, 532, 160, 217, 352, 160]$. Ab dem dritten Folgenglied entsteht ein *Zykel* 160, 217, 352, ganz ähnlich der Periode bei Dezimalbrüchen. Folge = $[547, 532, 160, 217, 352]$

Startzahl $N = 697$; Folge = $[1288, 1033, 55, 250, 133, 55]$, ein Beispiel dafür, dass 4-stellige Folgenglieder auftreten können.

Aufgaben

- Für 3-stellige Zahlen gibt es nur vier Fixpunkte; berechne sie mit Hilfe eines Programms!
- Berechne alle Iterationsfolgen für 3-stellige Startzahlen! Es fällt auf, dass bei Startzahlen, die einen bestimmten Primteiler besitzen, immer derselbe Fixpunkt als Endzahl erscheint. Welcher ist das? Ein allgemeiner theoretischer Beweis dieses Phänomens ist dem Autor nicht bekannt und ergäbe Zusatzpunkte!

- c) Zusatz: Hardy's Apology: Die Aussage b) ist möglicherweise nur im Zehnersystem gültig. Untersuche dies mit einem Programm, indem Du b) für die in Python vorhandenen Oktalzahlen durchführst *oder* eine andere Zahlenbasis zwischen 2 und 16 wählst! (WG)

Ergebnisse

- a) Für alle Startzahlen $n = [hze]$ zwischen 100 und 999 wird mit einem Computer-Programm die Bedingung $n = 100h + 10z + e = h^3 + z^3 + e^3$ für einen Fixpunkt überprüft. Das liefert die vier Ergebnisse 153, 370, 371 und 407.
- b) Das in (a) benutzte Programm kann leicht so ergänzt werden, dass zu jeder Startzahl die Folgenglieder der Iteration bis zu einer Endzahl ermittelt werden. Es fällt sofort ins Auge, dass – beginnend mit 102 – die Folge jeder dritten Startzahl bei 153 endet. Beispiele: Startzahl $N = 237$, Folge = [378, 882, 1032, 36, 243, 99, 1458, 702, 351, 153, 153]; Startzahl $N = 102$, Folge = [9, 729, 1080, 513, 153].
- c) Python erlaubt das Rechnen mit Oktalzahlen. Mit dem Programm „Oktale n3-Folgen von bis PFZ.py“ (Quelltext siehe unten) lassen sich die dreistelligen oktalen Fixpunkte zwischen $64 = 0o100$ und $511 = 0o777$ berechnen: $92 = 2 \cdot 2 \cdot 23 = 0o134$; $133 = 7 \cdot 19 = 0o205$; $307 = 307 = 0o463$; $432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 0o660$; $433 = 433 = 0o661$; eine Kontroll-Rechnung: $6 \cdot 82 + 6 \cdot 6 + 1 = 433 = 0o661$. (oktale Schreibweise in Python: Zum Beispiel ist $0o327 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 7 = 239$ dezimal).
Hardy scheint Recht zu haben, denn aus den Ergebnissen ist kein Kriterium bezüglich Teilbarkeit bei einem Fixpunkt zu erkennen.

Oktale n3-Folgen von bis PFZ.py

```
def pfz(n): #PrimFaktorenZerlegung von n
    n0=n; ns=""; i=2; w=int(n**0.5)
    while i<=w:
        while (n0 modulo i==0):
            n0=n0//i
            if (n0<2):ns=ns+str(i)
            else:ns=ns+str(i)+'*'
        i=i+1
    if n0>w:ns=ns+str(n0)
    return ns
```

```
von=64; bis=511
```

```

endzahlen=[]
n=von;
while n<=bis:
    nn=n; ns=pfz(n);    #print("Dezimal=",n,"=",ns,"
                        octal:",oct(n),end="")
    folge=[]; weiter=True
    while weiter:
        no=oct(nn); lang=len(no); sum3=0; i=0
        while i<lang:
            z=nn\% 8; zo=oct(z); sum3=sum3+z**3; nn=nn//8
            i=i+1
        sumo3=oct(sum3)
        #print("Oktale n3-Summe=",sumo3)
        if sumo3 in folge:
            weiter=False
            if not (sumo3 in endzahlen):
                endzahlen=endzahlen+[sumo3]
            folge=folge+[sumo3]
            nn=sum3
        #print(" FOLGE=",folge,end=" ")
        if len(folge)<3:
            print("Dezimal=",n,"=",ns," octal:",oct(n),"
            FOLGE=",folge,end=" ")
            print("FIXPUNKT")
        #else: print()
        n=n+1
print("Endzahlen=",endzahlen)

```

Folgende Schüler haben sich mit der Aufgabe beschäftigt: Yannik Spitzley, Kurfürst-Balduin-Gymnasiums in Münstermaifeld, Klasse 13; Maximilian Hauck, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey, Klasse 11; Julian Scheinert, Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasium in Schwedt/Oder, Klasse 12. Maximilian löst (a) und (c) mit erstaunlich effektiven Python-Programmen und beweist (b) mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat! Julian geht beim Beweis von (b) einen anderen Weg. Er benutzt, dass er alle vierstelligen Zahlen als Fixpunkt-Kandidaten mit einem Computerprogramm ausschließen kann und verweist dann auf eine Internet-Adresse OEIS (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences), mit der er auch Zahlen mit mehr als vier Stellen ausschließen kann. Von Yannik habe ich leider nur eine EXE-Datei ohne Quelltext erhalten, die für (a) richtige Ergebnisse liefert.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 134

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Prozente

In einer Baumschule wurden 200 Bäume gepflanzt. Ein Sturm entwurzelte 33% der Bäume. 5 Wochen später verbrannten 50% der noch übrigen Bäume.

- a) Wie viele Bäume stehen noch?
- b) Wie viel Prozent der angepflanzten Bäume stehen noch?

(Tobit Roth, Klasse 7, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg)

Lösung:

- a) $200 \cdot \frac{33}{100} = 66$, $200 - 66 = 134$; $134 \cdot \frac{50}{100} = 67$ und $134 - 67 = 67$. Es stehen noch 67 Bäume.
- b) $\frac{67}{200} = \frac{33,5}{100}$. 33,5% der angepflanzten Bäume stehen noch.

II. Ziffernbestimmung

Bestimme alle dreiziffrigen, positiven, ganzen Zahlen xyz (x, y und z Ziffern!), für die gilt:

$$xyz = xy + yz + zx. (H.F.)$$

Lösung:

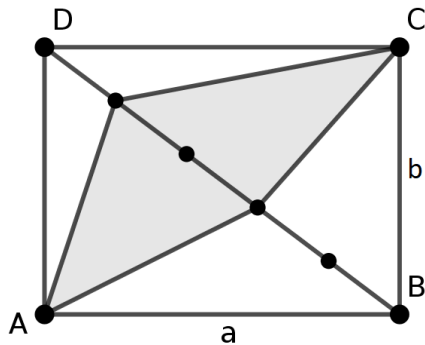
Es gilt $xyz = 100x + 10y + z = (10 \cdot x + y) + (10 \cdot y + z) + (10 \cdot z + x)$ mit $1 \leq x \leq 9, 0 \leq y, z \leq 9$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 89 \cdot x &= y + 10 \cdot z \leq 99 \\ \implies x &= 1 \\ \implies 89 &= y + 10 \cdot z \\ \implies y &= 9 \text{ und } z = 8 \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt: $198 = 19 + 98 + 81$.

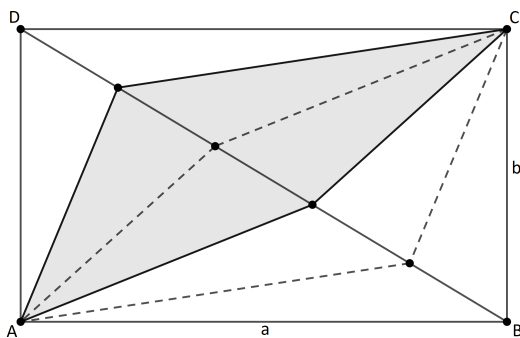
III. Flächeninhalt eines Vierecks



Das Rechteck $ABCD$ habe die Seitenlängen a und b . Die Diagonale BD sei in 5 gleich lange Strecken eingeteilt.

Berechne die Fläche des gefärbten Vierecks.
(H.F.)

Lösung:



Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $F = a \cdot b$. Verbindet man jeden der 4 Teilpunkte der Diagonale BD mit jeweils 2 Eckpunkten des Vierecks, so erhält man 10 Dreiecke mit Grundkanten gleicher Länge und Höhen jeweils gleicher Länge.

Daraus folgt: Die 10 Dreiecke besitzen den gleichen Flächeninhalt f und daher ist $f = \frac{1}{10}F = \frac{1}{10}ab$.

Mithin gilt: Die gefärbte Figur, bestehend aus 4 der 10 Dreiecke, hat den Flächeninhalt $\frac{2}{5}ab$.

IV. Hat Logo Recht?

Mathis fragt seinen Freund Logo: In welchem Verwandtschaftsverhältnis stehen Abe (A) und Babe (B), wenn gilt:

- (1) A ist der Sohn von B;
- (2) jedoch ist B nicht der Vater von A.

Logo antwortet – nach seiner Meinung ganz logisch:

- (3) Wenn B nicht der Vater von A ist, dann ist A nicht der Sohn von B.

Deshalb geht deine Frage ins Leere.

Hat Logo damit Recht?

(H.F.)

Lösung:

Logos Trugschluss erkennt man sofort, wenn man weiß, dass Babe die Mutter des Abe ist. Wie aber ist Logos Trugschluss logisch zu erklären?

Eine der wichtigsten Regeln der Logik, die den lateinischen Namen „modus ponens“ trägt, funktioniert so:

$$\frac{\text{Voraussetzungen} \quad \begin{array}{c} X \\ X \Rightarrow Y \end{array}}{\text{Folgerung} \quad Y}$$

Zwei Voraussetzungen sind gegeben: X (X ist eine wahre Aussage), $X \implies Y$ ($X \implies Y$ ist ein korrekter Schluss).

Folgerung: Y (Y ist eine wahre Aussage).

Nun zu Logos Trugschluss. Logo setzt (1) und (2) als wahr voraus; und selbstverständlich ist er auch von der Richtigkeit seines Schlusses (3) überzeugt. Dann aber gilt nach dem „modus ponens“ – wobei die Verneinung von (1) mit $\neg$ bezeichnet ist:

$$\begin{array}{ccc} (2) & ((2) \text{ ist eine wahre Aussage}) & \\ (2) \implies \neg(1) & ((2) \implies \neg(1) \text{ ist ein korrekter Schluss}) & \\ \hline \text{Folgerung} & \neg(1) & (\neg(1) \text{ ist eine wahre Aussage}) \end{array}$$

Damit sind $\neg(1)$ und nach Voraussetzung (1) beide wahre Aussagen. Dieser Widerspruch zeigt: $(2) \implies \neg(1)$ ist kein korrekter Schluss – damit ist Logos Überlegung als Trugschluss entlarvt.

V. Teilbarkeit durch 24

Es sei n eine weder durch 2 noch durch 3 teilbare natürliche Zahl. Dann ist $n^2 - 1$ durch 24 teilbar. Stimmt das? (H.F.)

Lösung:

Es ist $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Für die drei aufeinanderfolgenden Zahlen $n - 1$, n und $n + 1$ gilt: Da 3 kein Teiler von n ist, muss 3 ein Teiler von $n - 1$ oder von $n + 1$ sein. Da 2 kein Teiler von n ist, muss eine der Zahlen $n - 1$, $n + 1$ durch 2 und deshalb die andere durch 4 teilbar sein.

Daraus folgt: $(n - 1)(n + 1)$ ist durch 3 und 8 teilbar. Die Behauptung trifft also zu.

VI. Ein Zahlenquadrat

1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18
19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36

Wähle aus den nebenstehenden Zahlen möglichst wenige verschiedene Zahlen aus, sodass deren Produkt 36921225600 ist. (H.F.)

Lösung:

Es ist $36\,921\,225\,600 = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 19$

Man bildet aus den 19 Faktoren in der Produktdarstellung eine möglichst kurze Folge von Teilprodukten – etwa so:

$36\,921\,225\,600 = 19 \cdot (3 \cdot 7) \cdot 3^3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 2^5 \cdot (3 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 17) \cdot (5 \cdot 7)$. So ergibt sich 19, 21, 27, 30, 32, 34, 35 als mögliche Lösung.

Es gibt noch mehrere weitere Lösungen.

VII. Teilbarkeitsregeln

Für die gerade Zahl $10 = 2 \cdot 5$ gilt: Ist eine Zahl durch 2 und durch 5 teilbar, so ist sie auch durch 10 teilbar.

- Überprüfe diese Regel verallgemeinert für $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 4$, $12 = 2 \cdot 6$, $14 = 2 \cdot 7$, $16 = 2 \cdot 8$, $18 = 2 \cdot 9$, $20 = 2 \cdot 10$!
- Gibt es eine besondere Regel? Wenn ja, formuliere diese Regel!

(Tobit Roth, Klasse 7, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg)

Lösung:

- Sie gilt für 6, 14, 18, aber nicht für 8 (4 ist durch 2 und durch 4 teilbar, aber nicht durch 8), 12 (6 ist durch 2 und durch 6 teilbar, aber nicht durch 12), 16 (8 ist durch 2 und 8 teilbar, aber nicht durch 16), 20 (10 ist durch 2 und 10 teilbar, aber nicht durch 20).
- Regel: Wenn eine gerade Zahl durch 2 und eine beliebige ungerade Zahl teilbar ist, ist sie auch durch jede Zahl teilbar, die durch diese beiden Zahlen teilbar ist.

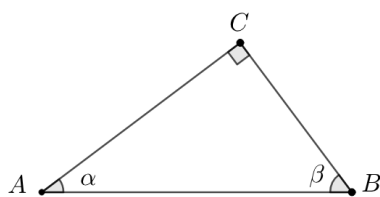
Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Aufgabe, wie sie der 7-jährige Carl Friedrich Gauß vielleicht gelöst hätte

Bestimme die Summe S aller Quersummen der Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots, 100000$. (H.F.)

II. Dreieck und Parallelogramm



Figur 1

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC . Spiegele die Seite AB an AC . Als Bild ergibt sich AB' . Spiegele danach die Seite BA an BC , es entsteht BA' . Die Parallele zu AB durch C schneidet die Gerade BA' in D und AB' in E .

- Zeige, dass das Viereck $ABDE$ ein Parallelogramm ist!

- Zeige, dass C in der Mitte der Seite DE liegt! (WG)

III. Sechseck und Dreieck

Ein regelmäßiges Sechseck und ein gleichseitiges Dreieck haben den gleichen Umfang. Bestimme (ohne den Satz von Pythagoras) das Verhältnis der Flächen von Sechseck und Dreieck! (H.F.)

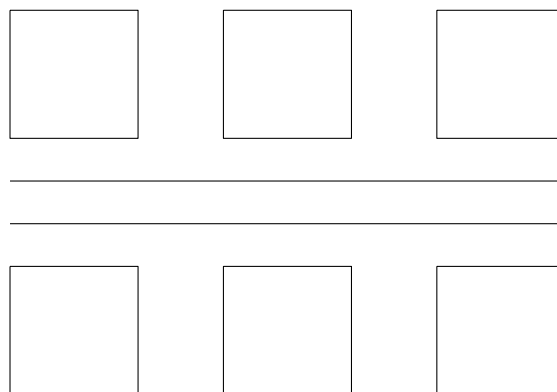
IV. Rechnung eines Kindes – mathematisiert

$$\begin{array}{r} ZWE\ I \\ +ZWE\ I \\ +ZWE\ I \\ \hline SE\ CHS \end{array}$$

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine korrekte Addition entsteht. Dabei sollen gleichen (verschiedenen) Buchstaben gleiche (verschiedene) Ziffern zugeordnet werden. Die erste Ziffer (von links) der Zahlen sei $\neq 0$. Bestimme die kleinste und die größte Lösung der Aufgabe.
(H.F.)

V. Reihenfolge

Auf einem Campingplatz gibt es sechs verschiedene Bungalows: A, B, C, D, E und F. Diese sind entlang eines Weges wie in der Skizze angeordnet.



Dabei steht A links von E, B gegenüber von F und A gegenüber von C. Außerdem ist C der am weitesten von B entfernte Bungalow sowie B der am weitesten von C entfernte.

- Wie sind die Bungalows angeordnet?
- Gibt es auch eine andere Lösung? Nenne sie!

(Tobit Roth, Klasse 7, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg)

VI. Lass' dich nicht in die Irre führen

Wieviele 10-ziffrige Primzahlen gibt es, in denen jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 genau zwei Mal vorkommt?
(H.F.)

VII. Zahlenfolge

Betrachte die Folge

5, 2, 25, 1, 25, 2, 625, 1, 625, ...

- Berechne fünf weitere Folgenglieder.
- Wie setzt sich die Folge zusammen?

(Tobit Roth, Klasse 7, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1218: Größte Zahl

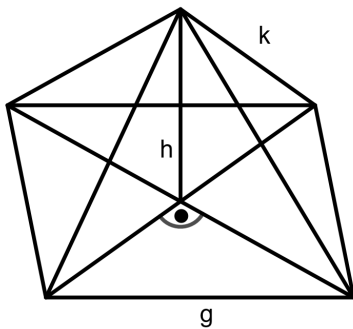
Welches ist die größte ganze n -ziffrige Zahl, die eine n -te Potenz ist? (H.F.)

Aufgabe 1219: Nullstellen

Wenn ich Dir verrate, dass das Polynom $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 2$ zwei Nullstellen x_1, x_2 hat mit $x_2 = \frac{1}{x_1}$, kannst Du dann alle Nullstellen von f bestimmen? (WJB)

Aufgabe 1220: Eine besondere Pyramide

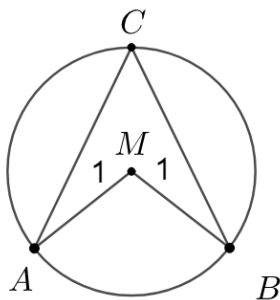
In einer quadratischen senkrechten Pyramide seien g, k und h die Längen der Grundseiten, der Seitenkanten und der Höhe.



- Können in einer solchen Pyramide h, g und k (in dieser Reihenfolge) aufeinander folgende natürliche Zahlen sein? Wenn ja, welches sind diese natürlichen Zahlen?
- Können h, g und k in beliebiger Reihenfolge aufeinander folgende ganze Zahlen sein?

(H.F.)

Aufgabe 1221: Ein Keil im Kreis



Im Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = 1$ sei der „Keil“ $AMBC$ mit den gleichlangen Seiten AC und BC und einem Winkel von 270° beim Punkt M gegeben. Welchen Flächeninhalt F hat der Keil?

(H.F.)

Aufgabe 1222: Beim Familientreffen

Bei einem Familientreffen begrüßt jeder Teilnehmer jeden anderen Teilnehmer mit Handschlag.

Wenn man nun jemanden, der bereits ungeradzahlig vielen Personen die Hand gegeben hat, als eine u -Person, alle anderen Teilnehmer als v -Personen bezeichnet, dann gilt:

- (*) Zu jedem Zeitpunkt ist die Anzahl der u -Personen gerade.

Trifft das zu?

(H.F.)

Aufgabe 1223: Nur Ziffern 1 und 2

Auf wie viele Arten kann man eine natürliche Zahl n als eine Summe aus den Zahlen 1 und/oder 2 schreiben, wenn es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt und $1 = 1$, $2 = 2$ als Summendarstellung für $n = 1$ und $n = 2$ gelten? (H.F.)

Aufgabe 1224: Teiler einer Fakultät

Es sei $n > 1$ eine ganze Zahl, die keine Primzahl ist. Dann gilt für jedes solche n : Die Zahl $(n - 1)!$ ist ohne Rest durch n teilbar. Dabei ist $(n - 1)!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1)$. Stimmt diese Behauptung? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 134

Klassen 9–13

Aufgabe 1204: Ziffernanzahl einer Quadratzahl

Mit $(1|n)$ sei eine natürliche Zahl mit n Ziffern 1 bezeichnet.

Beispiel: $(1|4) = 1111$. Wieviele Ziffern besitzt $(1|n)^2$? Begründe deine Antwort. (H.F.)

Lösung:

$(1|n)$ hat n Stellen. Also gilt: $10^{n-1} < (1|n) < 2 \cdot 10^{n-1}$. Man multipliziere die Ungleichung mit $(1|n)$ - es ergibt sich: $10^{n-1} \cdot (1|n) < (1|n)^2 < 2 \cdot 10^{n-1} \cdot (1|n)$. Mit $10^{n-1} \cdot 10^{n-1} = 10^{2n-2}$ und den beiden letzten Ungleichungen gilt: $10^{2n-2} < (1|n)^2 < 4 \cdot 10^{2n-2}$. Daher hat $(1|n)^2$ genau $2n - 1$ Stellen, also auch $2n - 1$ Ziffern.

Aufgabe 1205: Drei Ziffern ergeben immer 6

Stelle die 6 mit jeweils drei gleichen Ziffern dar. Erlaubt sind die üblichen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzel und Fakultät).

Beispiele: $6 = (1 + 1 + 1)!$ oder $6 = \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$

Erhältst du auch für die übrigen Ziffern eine Lösung?

(Lukas Metzger, MSS 12, Frauenlob Gymnasium Mainz)

Lösung:

Lösung für alle Ziffern:

$$6 = (0! + 0! + 0!)!$$

$$6 = \sqrt{3 \cdot 3} + 3$$

$$6 = 6 + 6 - 6$$

$$6 = \sqrt{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} + \sqrt{9}$$

$$6 = (1 + 1 + 1)!$$

$$6 = \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$$

$$6 = 7 - \frac{7}{7}$$

$$6 = 2 + 2 + 2$$

$$6 = \frac{5}{5} + 5$$

$$6 = (\sqrt{8 + \frac{8}{8}})!$$

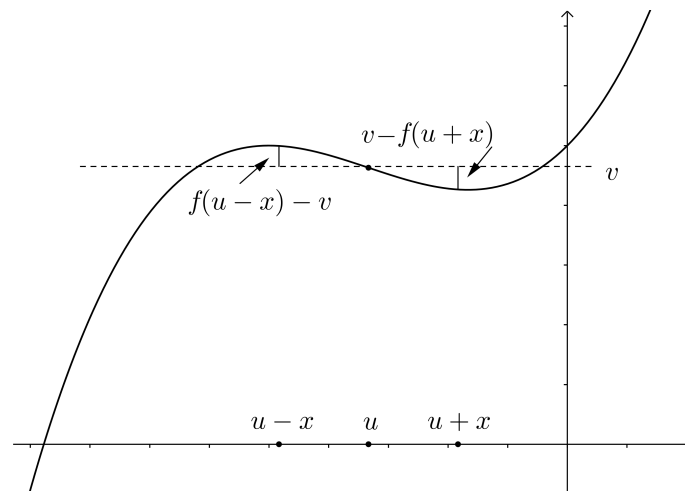
Aufgabe 1206: Wendepunkt

Zeige:

- a) Die zu einem Polynom dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gehörige Kurve besitzt einen Wendepunkt $P(u, v)$.
b) Die Kurve ist punktsymmetrisch um $P(u, v)$. (WJB)

Hinweis: Punktsymmetrie um $P(u, v)$ bedeutet

$$f(u-x) - v = v - f(u+x), \text{ d.h. } f(u+x) + f(u-x) = 2v = 2f(u).$$



Lösung:

- a) Dreimaliges Differenzieren von f liefert

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b, \quad f'''(x) = 6a.$$

Also ist $f''(u) = 0$ für $u = \frac{-2b}{6a} = \frac{-b}{3a}$ und somit (u, v) Wendepunkt mit $v = f(u)$.

- b) Wir bestätigen die Gleichung vom Hinweis durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} & (a(u+x)^3 + b(u+x)^2 + c(u+x) + d) \\ & + (a(u-x)^3 + b(u-x)^2 + c(u-x) + d) \\ & = 2au^3 + 0 \cdot x + 2a \cdot 3ux^2 + 0 \cdot x^3 + 2bu^2 + 0 \cdot x \\ & + 2bx^2 + 2cu + 0 \cdot x + 2d \\ & = 2(au^3 + bu^2 + cu + d) + (6au + 2b)x^2 \\ & = 2f(u) = 2v \end{aligned}$$

$$\text{da } (6au + 2b) = f''(u) = 0.$$

Aufgabe 1207: Rechteckige Platten

Ein rechteckiges Stück R eines öffentlichen Platzes, das 4-mal so lang wie breit ist, soll mit quadratischen Platten der Seitenlänge 1 belegt werden. Im Stadtbauamt berechnet man, dass man dazu genau k Platten benötigt. Der Bürgermeister – der

die städtischen Beamten gerne mit Rätseln plagt – verlangt, dass das Rechteck R so vergrößert wird, dass das neue Rechteck immer noch 4-mal so lang wie breit ist, jedoch 404 Platten mehr verlegt werden müssen.

Wie viele Platten benötigt man vorher, wie viele nachher? Welches sind die Abmessungen des Rechtecks vorher, nachher? (H.F.)

Lösung:

Bezeichnet man mit k bzw. n die Anzahl der „vorher“ bzw. der „nachher“ benötigten Platten, so soll gelten

$$(1) \quad n = k + 404.$$

Ist nun V die Länge der kurzen Seiten des Rechtecks R , dann ist

$$(2) \quad k = V \cdot 4V \text{ und } n = N \cdot 4N$$

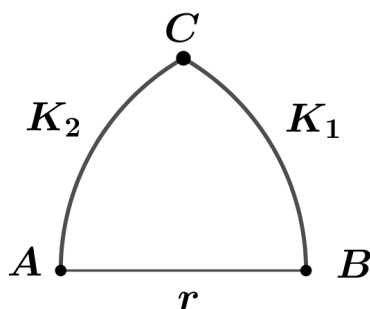
wenn N die kurze Seite des vergrößerten Rechtecks bezeichnet. Damit gilt wegen (1):

$$(3) \quad 4N^2 = 4V^2 + 404 \implies N^2 = V^2 + 101 \implies N^2 - V^2 = 101 \implies (N - V)(N + V) = 101$$

Aus (3) folgt: $N - V$ und $N + V$ sind Teiler von 101. Nun ist 101 eine Primzahl, d.h. 101 hat nur die Teiler 1 und 101. Also ist $N - V = 1$ und $N + V = 101 \implies V = 50, N = 51$. Daher ist die Anzahl der Platten vorher: $k = 4 \cdot 50^2 = 10000$ (vgl. (2)) und nachher $n = 4 \cdot 51^2 = 10404$. Die Abmessung des Rechtecks vorher sind $V = 50$ und $4V = 200$ und nachher $N = 51$ und $4N = 204$.

Aufgabe 1208: Berechnung von Apartments

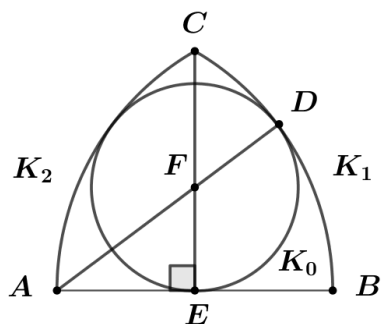
In einer Ebene liegt „Flächenland“, dessen Bewohner zwei-dimensionale geometrische Figuren sind. Ein Immobilien-Makler in „Flächenland“ bietet nur für Kreise ohne Familie Apartments an, deren Begrenzung aus drei Stücken besteht:



Einer Strecke AB der Länge r sowie den Bögen BC und AC zweier Kreise K_1, K_2 mit den Radien r und dem Mittelpunkt A bzw. B . Wie groß ist ein Kreis K_0 höchstens, der in einem solchen Apartment wohnen kann? (H.F.)

Lösung:

Der gesuchte Kreis K_0 habe den Mittelpunkt F und den Radius r_0 . Zunächst gilt: Wenn sich zwei Kreise berühren, dann liegen ihre Mittelpunkte und ihr gemeinsamer Berührungspunkt auf einer Geraden.



Daher liegen der Mittelpunkt A von K_1 , der Mittelpunkt F von K_0 sowie der Berührungspunkt D von K_1 und K_2 auf einer Geraden. Es sei nun $FE \perp AB$ und $|FE| = r_0$. Im Dreieck AEF ist dann $|AF|^2 = |AE|^2 + |FE|^2$. Daraus folgt wegen $|AD| = r$, $|AF| = r - r_0$ und $|AE| = \frac{r}{2}$: $(r - r_0)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r_0^2$ und daher $\frac{3}{4}r^2 = 2rr_0$. Weil $r \neq 0$ ist, gilt also $r_0 = \frac{3}{8}r$.

Der größtmögliche kreisförmige Apartment-Bewohner hat somit den Radius $r_0 = \frac{3}{8}r$.

Bemerkung: Die Figur, die in der Lösung angedeutet ist, der Spitzbogen mit Kreis, findet man auch in vielen gotischen Kirchenfenstern.

Aufgabe 1209: Lottospiel

Bei der Ausspielung im Lotto wird auch im „Spiel 77“ eine 7-stellige Zahl ausgespielt, wobei alle 7-stelligen Zahlen (evtl. mit führenden Nullen) mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Zahl ausgespielt wird, bei der die vierte Ziffer gerade ist und die Summe der Ziffern durch 9 teilbar? (WJB)

Lösung:

Vertauschen wir die vierte Ziffer mit der letzten, so ergeben die Bedingungen die Teilbarkeit durch 18 der so entstandenen Zahl.

Da $9999999 : 18 = 555555,5$ ist, gibt es zwischen 0000000 und 9999999 (einschließlich der 0000000) 555556 durch 18 teilbare Zahlen. Es ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{555556}{10000000} = \frac{138889}{2500000}$.

Aufgabe 1210: Vielfaches einer Zahl als Potenz-Summe

Zu jeder ungeraden natürlichen Zahl $a > 1$ kann man eine Summe $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^b$, wobei b eine natürliche Zahl ist, finden, so dass gilt: Die Summe ist ein Vielfaches von a . Stimmt das?

Tipp: Versuche zunächst mit Hilfe deines Computers die Behauptung für $a = 2018$ zu beweisen oder zu widerlegen. (H.F.)

Lösung:

Annahme: Keine der a Zahlen $2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^a - 1$ ist durch a teilbar. Da es dann bei der Division dieser Zahlen durch a in irgend einer Reihenfolge nur die $a - 1$ verschiedenen Reste $1, 2, \dots, a - 1$ gibt, müssen zwei der Zahlen $2^n - 1, n = 1, 2, \dots, a - 1$, etwa $2^i - 1$ und $2^j - 1$ mit $i < j$, den gleichen Rest haben. Daraus folgt:

Die Differenz $(2^j - 1) - (2^i - 1) = 2^i(2^{j-i} - 1)$ hat den Rest 0, das heißt: sie ist ein Vielfaches von a . Da a ungerade ist, muss $2^{j-i} - 1$ durch a teilbar sein.

Setzt man nun $j - i = b + 1$ und beachtet, dass $2^0 = 1$ und $(1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^b)(2 - 1) = 2^{b+1} - 1$ ist, dann sieht man: $2^{b+1} - 1$ und daher auch die Summe $(1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^b)$ ist ein Vielfaches von a .

Anzahl, Häufigkeit und Dichte

von Hartwig Fuchs

Im Jahr 1638 veröffentlichte Galileo Galilei (1564 - 1642) eine Schrift*, in der er in einem Kapitel sich mit dem Unendlichen in der Mathematik und seiner „Größe“ befasst. Er vertritt dabei die Auffassung, dass die Begriffe „kleiner als“, „größer als“, und „gleich“ auf unendliche Mengen mathematischer Objekte nicht anwendbar sind und er begründet das mit einem Beispiel, in welchem er die Menge N der natürlichen Zahlen** mit der Menge Q der Quadratzahlen „vergleicht“.

Er stellt dazu eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von N und Q her:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ | & | & | & & | & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

Jeder Zahl $n \in N$ ist ihre Quadratzahl $n^2 \in Q$ und jeder Quadratzahl $n^2 \in Q$ ist die Zahl $n \in N$ zugeordnet.

Daraus folgert er die nicht bezweifelbare Aussage

(*) Es gibt genau so viele Quadratzahlen wie natürliche Zahlen.

Mit (*) ergibt sich eine Paradoxie in zweierlei Hinsicht:

- Der logische Grundsatz, dass ein Ganzes größer als jeder seiner Teile ist, gilt nicht für die Menge N und ihre Teilmenge Q .
- (*) steht im Widerspruch zur Anschauung, nach der es deutlich mehr natürliche als quadrierte Zahlen gibt.

Beispiel Zwischen den Zahlen $(n-1)^2$ und $(n+1)^2$ gibt es nur die Quadratzahl n^2 , dagegen $4n-1$ natürliche Zahlen, was etwa für $n = 10^6$ bereits $4 \cdot 10^6 - 1$ Zahlen sind.

In der von Georg Cantor (1845 - 1918) entwickelten Mengentheorie ist das galileische Zuordnungsprinzip die fundamentale Methode zum Mengenvergleich: Jede zwei Mengen, für deren Elemente es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung gibt und die in diesem Sinne vergleichbar sind, nennt er gleich mächtig. Weit über

* G. Galilei: Discorsi e Dimostrazione Matematiche Intorno a Due Nueve Scienze, erschien bei Elsevir (Holland).

** Das Wort „Zahl“ bedeutet im Folgenden stets „natürliche Zahl“.

Galileis Zuordnungsbeispiel hinausgehend konnte Cantor dann beweisen, dass die Menge N und jede ihrer unendlichen Teilmengen gleich mächtig sind. Für die Zahlentheoretiker stellte diese Aussage im Blick auf Galileis Paradoxie (vgl. das Beispiel oben) eine Herausforderung dar.

Es galt, ein Maß zu finden, das die numerische Unterscheidung unendlicher gleich mächtiger Mengen natürlicher Zahlen möglich macht. Mit jeweils als *Dichte* bezeichneten Maßen konnten sie das Problem in gewissem Umfang lösen.

Anzahl

Es sei $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n | n \geq 1\}$ eine geordnete Menge von Zahlen, für die gilt: $m_1 < m_2 < \dots < m_n$. Wir bezeichnen die Anzahl der Elemente von M mit $A(M)$.

Wenn die Elemente von M gegeben sind, kann man meist $A(M)$ leicht bestimmen.

- Für die Menge $M_1 = \{2, 4, 6, \dots, 4038\}$ ist $A(M) = 2019$
- Es sei $M_2 = \{5, 8, 11, 14, \dots, 6059\}$. Wie groß ist $A(M)$?
Wegen $5 = 1 \cdot 3 + 2, 8 = 2 \cdot 3 + 2, \dots, 6059 = 2019 \cdot 3 + 2$ ist $A(M) = 2019$.
- Für die Menge M_3 aller Vielfachen von 5, die $\leq 5n$ sind, n eine gegebene Zahl ≥ 1 , ist $A(M_3) = n$.
- Es sei M_4 die Menge aller Quadratzahlen $\leq n^2$, n eine gegebene Zahl ≥ 1 . Dann ist $A(M_4) = n$.

Nicht immer ist es so einfach $A(M)$ zu bestimmen – etwa dann, wenn die Elemente von M durch eine ihnen allen zukommende Eigenschaft festgelegt sind.

- Es sei M_5 die geordnete Menge aller Primzahlen $\leq p$, p eine Primzahl. Weil Primzahlen ganz unregelmäßig in der Menge $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ vorkommen, hat man bisher trotz größter Bemühungen keine Regel gefunden, mit der man die Anzahl der Primzahlen $\leq p$ berechnen kann.
Allerdings hat Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) eine Möglichkeit entdeckt, wie diese Anzahl wenigstens angenähert berechenbar ist***:
Für die Menge M_5 aller Primzahlen $\leq p$, p prim, ist $A(M_5) \approx \frac{p}{\ln(p)}$.
- Man berechne $A(M_6)$ für die Menge M_6 aller Zahlen $\leq n$ mit genau 3 Teilern, wobei auch n genau 3 Teiler hat.
Eine Primzahl p hat nur die Teiler 1 und p ; jede Zahl p^m mit $m \geq 3$, sowie jede Zahl $p = p_1 p_2 \dots$ mit mindestens zwei Primfaktoren p_1, p_2 hat mehr als 3 Teiler.
Jedoch hat p^2 genau 3 Teiler, nämlich 1, p und p^2 . Mit $n = p^2$ folgt: M_6 besteht nur aus $A(M_5)$ quadrierten Primzahlen. Also ist $A(M_6) = A(M_5) = p : \ln(p)$.

*** Es sind heute bessere als die Näherungsformel von Gauß bekannt.

Häufigkeit

Es sei M eine geordnete Menge aus $A(M)$ Zahlen, von denen n die größte sei. Dann ist der Anteil der Zahlen aus M an den Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$, den wir als $H(M)$ bezeichnen:

$$H(M) = \frac{A(M)}{n}, \quad M \text{ eine Zahlenmenge mit größtem Element } n.$$

Man nennt dann $H(M)$ auch eine *Häufigkeit*, weil $H(M)$ eine numerische Aussage darüber macht, wie häufig die Zahlen aus M in der Menge $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ vorkommen.

Im folgenden bestimmen wir die Häufigkeiten der Mengen $M_i, i = 1, 2, 3, 4$, bei denen jeweils die Anzahl $A(M_i)$ der Elemente und das größte Element n bekannt sind.

- Für M_1 ist $A(M_1) = 2019$ und $n = 4038$. Also ist $H(M_1) = \frac{1}{2}$. In der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 4038\}$ sind also die Hälfte der Zahlen gerade.
- Für M_2 gilt: $A(M_2) = 2019$ und $n = 6059$. Somit $H(M_2) = \frac{2019}{6059} \approx \frac{1}{3}$.
- M_3 mit dem größten Element $5n$ hat die Häufigkeit $H(M_3) = \frac{n}{5n} = \frac{1}{5}$.
- Für M_4 mit dem größten Element n^2 ist $H(M_4) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ – mit wachsendem n werden Quadratzahlen immer rarer in $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Die Häufigkeiten der Mengen M_5 und M_6 können wir nur angenähert angeben, da für die zugehörigen $A(M_5)$ und $A(M_6)$ mit der Gauß-Formel nur Näherungswerte berechnet werden können.

- Für M_5 mit größtem Element p ist $H(M_5) = \frac{A(M_5)}{p} \approx \frac{p}{\ln(p)} : p = \frac{1}{\ln(p)}$.
- M_6 mit größtem Element p^2 hat die Häufigkeit $H(M_6) = \frac{A(M_6)}{p^2} \approx \frac{p}{\ln(p)} : p^2 = \frac{1}{p \cdot \ln(p)}$

Dichte

Bisher sind alle betrachteten Zahlenmengen endlich. Deshalb sei nun $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$ eine unendliche geordnete Zahlenmenge. Wie groß ist dann der „Anteil“ der Zahlen von M an den natürlichen Zahlen?

Aus M bilden wir die Folge der Teilmengen

$$T_1 = \{m_1\}, T_2 = \{m_1, m_2\}, T_3 = \{m_1, m_2, m_3\}, \dots, T_n = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}, \dots$$

An Beispielen betrachten wir dann die Folge der Häufigkeiten

$$H(T_n) = \frac{A(T_n)}{m_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und schauen, welche Einsichten sich dabei hinsichtlich unserer Fragestellung ergeben. Dazu erweitern wir die Mengen $M_1, M_2, \dots, M_6$ zu unendlichen geordneten Mengen $M_1^*, M_2^*, \dots, M_6^*$.

- Es sei $M_1^* = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$. Dann ist $T_n = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
Dann ist

$$H(T_1) = \frac{1}{2}, H(T_2) = \frac{2}{4}, H(T_3) = \frac{3}{6}, \dots, H(T_n) = \frac{n}{2n}, \dots$$

Wie auch immer wir n wählen, stets ist $H(T_n) = \frac{1}{2}$. Man sagt dann: Die Menge M_1^* hat die Dichte $D(M_1^*) = \frac{1}{2}$.

- Es sei $M_2^* = \{5, 8, 11, \dots, n \cdot 3 + 2, \dots\}$ und $T_n = \{5, 8, 11, \dots, n \cdot 3 + 2\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
Dann ist

$$H(T_1) = \frac{1}{5}, H(T_2) = \frac{2}{8}, H(T_3) = \frac{3}{11}, \dots, H(T_n) = \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3+\frac{2}{n}}, \dots$$

Je größer man n wählt, umso näher liegt $\frac{2}{n}$ bei 0 und daher $3 + \frac{2}{n}$ bei 3 und schließlich $H(T_n)$ bei $\frac{1}{3}$. Die Analysis beschreibt diesen Sachverhalt so:

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} H(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$.

Man sagt dann: M_2^* hat die Dichte $D(M_2^*) = \frac{1}{3}$.

- Überlege selbst, warum man der Menge M_3^* der Vielfachen von 5 die Dichte $D(M_3^*) = \frac{1}{5}$ zuordnet.
- Für die Menge $M_4^* = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots\}$ ist $T_n = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
Wegen $H(T_n) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} H(T_n) = 0$
und M_4^* hat die Dichte 0.
Anschaulich bedeutet das: Quadratzahlen sind Raritäten in $\mathbb{N}$.

Nach dem Muster dieser Beispiele definiert man:

Es sei $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, \dots\}$ eine unendliche geordnete Zahlenmenge und $T_n = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ eine Folge endlicher Teilmengen von M mit $H(T_n) = \frac{A(T_n)}{m_n}$. Wenn dann der „Grenzwert“ $\lim_{n \rightarrow \infty} H(T_n)$ existiert, dann bezeichnet man ihn als die Dichte $D(M)$ von M .

Wegen ihrer verschiedenen Dichten darf man die Mengen $M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^*$ als verschieden „groß“ betrachten und so entgeht man der anschaulichen Paradoxie des Galilei. Doch auch bei der Dichte lässt sich diese Paradoxie nicht immer vermeiden!

- Die Dichte der Menge M_5^* aller Primzahlen können wir nicht unmittelbar bestimmen, weil wir für die Teilmengen $T_n = \{2, 3, 5, \dots, p | p \text{ eine Primzahl}\}$ nur den Näherungswert $H(T_p) \approx \frac{1}{\ln(p)}$ haben.

Man hat jedoch bewiesen:

Es gibt positive reelle Zahlen r und s , sodass für jedes $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{r}{\ln(p)} < \frac{A(T_p)}{p} = H(T_p) < \frac{s}{\ln(p)}$$

Wenn hier $p \rightarrow \infty$ strebt, dann gilt auch $\ln(p) \rightarrow \infty$. Daher folgt aus der Ungleichung wegen $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{r}{\ln(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{s}{\ln(p)} = 0$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} H(T_n) = 0$ ist. Also ist $D(M_5^*) = 0$.

- Die Menge M_6^* ist eine echte Teilmenge von M_4^* . Daher ist (ohne Beweis) $0 \leq D(M_6^*) \leq D(M_4^*) = 0$; M_6^* hat die Dichte 0.

Quadratzahlen sind in jeder Menge $\{1, 2, 3, \dots, n | n \geq 2\}$ häufiger anzutreffen als Primzahlquadrate.

Numerisches Beispiel:

In der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ gibt es 100 Quadratzahlen, jedoch nur 25 quadrierte Primzahlen, denn 97 ist die größte Primzahl mit $97^2 < 10000$, und es gibt 25 Primzahlen ≤ 97 .

Obgleich also M_6^* eine echte Teilmenge von M_4^* ist, vermag das Häufigkeitsmaß „Dichte“ wegen $D(M_6^*) = D(M_4^*)$ die beiden Mengen nicht zu unterscheiden. Die Mengen $D(M_6^*)$ und $D(M_4^*)$ zeigen somit:

Das Ziel, die galileische Paradoxie zu vermeiden, kann mit der Dichte D nicht erreicht werden.

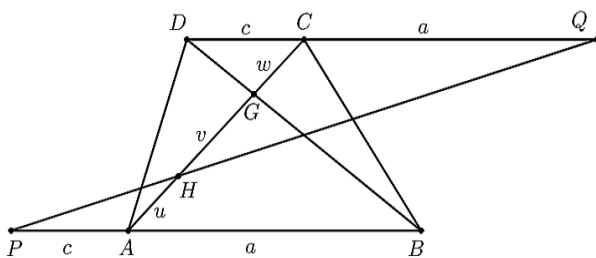
Das hat die Zahlentheoretiker dazu gebracht, weitere meist schärfer trennende Häufigkeitsmaße zu definieren – aber das führt in ein weites Gebiet, in das einzudringen hier nicht möglich ist.

Aus den Archiven der Mathematik: Wo liegt der Fehler?

von Hartwig Fuchs

In seinem 1913 erschienenen Buch „Wo liegt der Fehler?“ behauptet der Autor Walter Lietzmann (1880 – 1959):

- (1) Die Summe der Längen der beiden parallelen Seiten eines Trapezes ist null.
Sein angeblicher „Beweis“: Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $|AB| = a$, $|CD| = c$.



Wie in der Figur sei die Seite AB um die Länge c bis zum Punkt P und die Seite CD um die Länge a bis zum Punkt Q verlängert. G sei der Diagonalschnittpunkt im Trapez und H sei der Schnittpunkt der Strecke PQ und der Diagonale AC . Es sei $|AH| = u$, $|HG| = v$ und $|GC| = w$ gesetzt.

Nach dem Strahlensatz mit Zentrum H sowie dem Zentrum G gilt:

$$(2) \quad \frac{a}{c} = \frac{u}{v+w} \text{ und}$$

$$(3) \quad \frac{c}{a} = \frac{w}{u+v}, \text{ so dass}$$

$$(4) \quad \frac{u}{v+w} = \frac{w}{u+v}.$$

Eine wenig bekannte arithmetische Regel besagt nun: Ist $\frac{f}{g} = \frac{x}{y}$, so gilt $\frac{f}{g} = \frac{f-x}{g-y}$.

Beweis der Regel: Aus der Voraussetzung folgt:

$$fy = gx \implies -fy + fg = -gx + fg \implies f(g-y) = g(f-x) \implies \text{Behauptung}.$$

Wenden wir die Regel auf die Gleichung (4) an, so erhält man mit (2):

$$(5) \quad \frac{c}{a} = \frac{u}{v+w} = \frac{u-w}{(v+w)-(u+v)} = \frac{u-w}{w-u} = -1.$$

Und aus $\frac{c}{a} = -1$ folgt $c = -a$ und daher $c + a = 0$, wie in (1) behauptet ist.

Wo liegt der Fehler?

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned} u^2 + uv &= w^2 + vw \implies u^2 - w^2 + uv - vw = 0 \\ &\implies (u-w)(u+w) + (u-w)v = 0, \end{aligned}$$

und das impliziert

$$(6) \quad (u-w)(u+v+w) = 0.$$

Da im Trapez $ABCD$ für die Länge der Diagonale AC gilt: $|AC| = u+v+w \neq 0$, folgt aus (6) dass $u-w=0$, also $u=w$ ist. Aus (5) folgt dann: $c \cdot (w-u) = a \cdot (u-w)$ und damit $c \cdot 0 = a \cdot 0$. Die letzte Gleichung ist stets richtig, wie auch immer c und a gewählt sind. Daraus folgt: aus $c \cdot 0 = a \cdot 0$ kann man weder c noch a und schon gar nicht ihre Summe $a+c$ bestimmen. Genau das Letzte aber wird in (1) behauptet. Die Division durch Null führt also in die falsche Aussage (1).

Die besondere Aufgabe

Primzahlen mit gleichen Endziffern

von Hartwig Fuchs

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen mit der Endziffer 1.

Euklid, der um 300 v.Chr. in Alexandria lebte und dort als Mathematiker wirkte, hat den berühmten Satz bewiesen:

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Damit ist zunächst geklärt, dass die Behauptung (1), die wir beweisen wollen, überhaupt eine sinnvolle Aussage ist.

Einem Nachweis von (1) legen wir einen wichtigen zahlentheoretischen Satz zugrunde, den J. P. Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) im Jahr 1837 veröffentlicht hat.

Der Primzahlen-Satz von Dirichlet

- (2) Für natürliche Zahlen a und b mit größtem gemeinsamen Teiler 1 (dafür kurz: $\text{ggT}(a, b) = 1$) gilt: In der arithmetischen Folge $\{a, a + b, a + 2b, \dots\}$ gibt es unendlich viele Primzahlen.

Beispiel: Jede Primzahl $p \geq 7$ ist entweder als Summe $p = 6n + 1$ oder als Summe $p = 6n + 5$ darstellbar, denn die Zahlen $p = 6n, 6n + 2, 6n + 3, 6n + 4$ sind nicht prim.

Es sei nun $a = 1$ oder $a = 5$ und $b = 6$ in (2). Wegen $\text{ggT}(a, b) = 1$ kommen nach dem Satz von Dirichlet in jeder der Folgen $\{1, 1 + 6, 1 + 2 \cdot 6, \dots\}$ und $\{5, 5 + 6, 5 + 2 \cdot 6, \dots\}$ jeweils unendlich viele Primzahlen vor.

Nun zum Beweis von (1)

Für $a = 1$ und $b = 10$ ist $\text{ggT}(1, 10) = 1$. Daher gibt es wegen (2) in der arithmetischen Folge $\{1, 1 + 10, 1 + 2 \cdot 10, \dots\} = \{1, 11, 21, \dots\}$ unendlich viele Primzahlen mit der Endziffer 1.

Verallgemeinerung von (1)

- (3) Es sei p eine n -ziffrige Primzahl, $p \neq 2$ und $p \neq 5$ sowie $n \geq 1$. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen, deren letzte n Ziffern die Ziffern von p – in der Reihenfolge wie in p – sind.

Wegen $\text{ggT}(p, 10^n) = 1$ kommen nach (2) in der arithmetischen Folge $\{p, p + 10^n, p + 2 \cdot 10^n, \dots\}$ unendlich viele mit dem Ziffernblock p endende Primzahlen vor. Übrigens gilt das gleiche für jede arithmetische Folge $\{p, p + 10^m, p + 2 \cdot 10^m, \dots\}$ mit $m = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$

Beispiel:

Für die Primzahl $p = 103$ gilt: Die Folge $\{103, 103 + 10^5, 103 + 2 \cdot 10^5, \dots\} = \{103, 100103, 200103, \dots\}$ enthält unendlich viele mit dem Ziffernblock 103 endende Primzahlen.

Mathematische Entdeckungen

Spitze Innenwinkel eines konvexen m -Ecks

Ein m -Eck, $m \geq 3$, heißt konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt und keine drei benachbarten Ecken in einer Seite des m -Ecks liegen. Dann gilt für jeden Innenwinkel $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$, dass $\alpha_i < 180^\circ$ ist und umgekehrt.

Einen Winkel, der $< 90^\circ$ ist, nennt man spitz.

Es gibt Dreiecke mit lauter spitzen Winkeln. Dagegen kann ein konvexes Viereck keine vier spitzen Innenwinkel α_i haben: Wären alle α_i spitz, so wäre $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 4 \cdot 90^\circ$; tatsächlich aber gilt im konvexen Viereck: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ$.

Untersuche daher die Fragen:

- Wie viele spitze Winkel kann ein beliebiges konvexes m -Eck, $m \geq 3$ höchstens haben?
- Gibt es zu jedem m , $m = 3, 4, 5, \dots$ ein konvexes m -Eck an, das die höchst mögliche Anzahl spitzer Winkel besitzt? (H.F)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2018 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 133

In Heft 133 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Eine spezielle Folge

Die Folge (n_i) , $i = 1, 2, 3, \dots$ sei festgelegt durch $n_{i+2} = \frac{c + n_{i+1}}{n_i}$ mit den Startzahlen $n_1 = a$, $n_2 = b$, mit a, b, c reelle Zahlen, die so gewählt sind, dass $n_i \neq 0$ für alle $i \geq 1$.

Suche nach Zahlen p mit der Eigenschaft: Die Folge $n_1, n_2, n_3, \dots$ hat für einen geeigneten c -Wert die Periode p unabhängig davon, wie a und b gewählt sind, abgesehen von $n_i \neq 0$.

(Ermittle z.B. als erstes die Periode für $c = 1$.) (Prof. Dr. Günter Pickert)

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Maximilian Hauck, Elisabeth Langgässer Gymnasium Alzey Klasse 10, Julian Scheinert, Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasium Schwedt/Oder, Klasse 11. und Yannik Spitzley, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld, Klasse 10.

Julian findet für $c = 1$ die Periode $p = 5$:

$$\begin{aligned} n_1 = a, n_2 = b, n_3 &= \frac{1+b}{a}, n_4 = \frac{1 + \frac{1+b}{a}}{b} = \frac{a+b+1}{ab}, \\ n_5 &= \frac{1 + \frac{a+b+1}{ab}}{\frac{1+b}{a}} = \frac{ab+a+b+1}{b^2+b}, n_6 = \frac{1 + \frac{ab+a+b+1}{b^2+b}}{\frac{a+b+1}{ab}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a(b^2 + b + ab + a + b + 1)}{(a + b + 1)(b + 1)} = \frac{a(b^2 + b + ab + a + b + 1)}{ab + a + b^2 + b + 1} = a,$$

$$n_7 = \frac{1 + a}{\frac{ab + a + b + 1}{b^2 + b}} = \frac{b(1 + a)(1 + b)}{ab + a + b + 1} = \frac{b(ab + a + b + 1)}{ab + a + b + 1}.$$

Yannik findet überdies für $c = 0$ die Periode $p = 6$:

$$n_1 = a, n_2 = b, n_3 = \frac{b}{a}, n_4 = \frac{\frac{b}{a}}{b} = \frac{1}{a}, n_5 = \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{1} = a, n_6 = \frac{a}{b},$$

$$n_7 = \frac{\frac{a}{b}}{a} = \frac{1}{b}, n_8 = \frac{1}{\frac{1}{b}} = b.$$

Maximilian hat mit Hilfe eines Computeralgebrasystems herausgefunden, dass es für $p \leq 13$ keine weiteren Lösungen gibt. Für $p > 13$ sind jedoch die entsprechenden Gleichungen auch mit dem Computer nicht mehr lösbar.

Perfekt ungerade Zahlen oder: Kann man über mathematische Objekte mit unbewiesener Existenz sinnvoll reden?

von Hartwig Fuchs

Ein Himalaya-Reisender behauptet:

(1) Es gibt den Yeti.

Zur „Bekräftigung“ von (1) – wie er meint – behauptet er weiter:

(2) Ein ausgewachsener Yeti ist mindestens 2,50m groß.

Was ist von (1) und von (2) zu halten?

1. Fall: Es gibt hieb- und stichfeste Beweise dafür, dass (1) zutrifft. Dann benötigt man nur noch ein ausgewachsenes Exemplar eines Yeti, um zu entscheiden, ob (2) wahr oder falsch ist.
2. Fall: Man kann mit Sicherheit ausschließen, dass es einen Yeti gibt. Dann ist also (1) falsch, und es gibt kein logisches Argument, mit dem man die Wahrheit oder Falschheit von (2) begründen könnte.
Daher wird der weder wahre noch falsche Satz (2) als logisch sinnlos betrachtet – und das gleiche gilt für jeden Satz, der eine Eigenschaft des Yeti behauptet.

Man kann somit nicht in logisch sinnvoller Weise über den Yeti reden, weil man ihm damit Eigenschaften zu- oder absprechen würde, was ja offensichtlich weder mit der Realität noch mit der Logik in Einklang zu bringen ist.

3. Fall: Es ist vorläufig noch nicht entscheidbar, ob (1) zutrifft oder nicht. Dann stellt (2) keine Tatsachenbehauptung, sondern nur die Meinung des Himalaya-Reisenden dar, die keinerlei Aussagekraft hat. Es ist daher müßig, sich über die Wahrheit oder Falschheit von (2) zu streiten.

In der Mathematik befindet man sich nicht selten in einer ähnlichen Situation wie oben im 3. Fall. Wie sich der Mathematiker dann verhält und wieso er sich so verhält, demonstrieren wir an einem aufschlussreichen komplexen Beispiel – den ungeraden perfekten Zahlen.

Eine natürliche Zahl heißt *perfekt*, wenn sie die Summe ihrer echten Teiler ist

Die drei kleinsten perfekten Zahlen sind 6, 28 und 496, wovon man sich selbst leicht überzeugt.

Euklid beweist im Kapitel IX seines berühmten Buches „Elemente“, dass jede Zahl der Form $2^n(2^{n+1} - 1)$ perfekt ist, wenn $2^{n+1} - 1$ eine Primzahl ist. 2000 Jahre später zeigt Leonhard Euler (1707 - 1783), dass umgekehrt jede gerade perfekte Zahl von der euklidischen Form sein muss. Damit ist das *Problem der geraden perfekten Zahlen vollständig gelöst*, sobald man alle Primzahlen der Form $2^{n+1} - 1$ kennt.

Wie aber steht es mit *ungerade perfekten Zahlen* (hinfert kurz: *up-Zahlen*)?

Vorweg: Trotz Jahrhunderte dauernder Bemühungen und neuerdings auch trotz umfangreichen Computereinsatzes hat noch niemand eine up-Zahl gefunden; man weiß sogar das gilt:

- (3) Unterhalb von 10^{300} gibt es keine up-Zahlen.

Möglicherweise ist (3) ein Indiz dafür, dass es überhaupt keine up-Zahlen gibt! Und dennoch haben Mathematiker sich seit langem intensiv mit ihnen befasst. Das ist jedoch logisch nur zulässig und mathematisch auch nicht sinnlos, wenn man dabei von der Annahme ausgeht

- (4) Es gibt ungerade perfekte Zahlen.

Mit der unbewiesenen Voraussetzung (4) als Arbeitshypothese hat man z.B. herausgefunden:

- Jede up-Zahl hat die Form n^2p , n eine ungerade natürliche Zahl und $p > 2$ eine Primzahl (vermutet von R. Descartes, 1596 - 1650).
- Jede up-Zahl hat die Form $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, wobei $p_1, p_2, \dots, p_r$ Primzahlen von der Form $4n + 1$, a_1 ebenfalls von der Form $4n + 1$ und $a_2, \dots, a_r$ gerade Zahlen sind (bewiesen von L. Euler, 1707 - 1783).

- Jede up-Zahl hat mindestens 9 verschiedene Primfaktoren und der größte von ihnen ist $> 10^8$.
- Jede up-Zahl ist durch eine Primzahlpotenz $> 10^{18}$ teilbar.

Diese Liste von zum Teil kuriosen Eigenschaften von up-Zahlen könnte man noch verlängern – aber genug davon.

Was bezwecken die Mathematiker mit der Herleitung solcher Eigenschaften von up-Zahlen, deren Existenz im Blick auf (3) zumindest fraglich ist?

1. Fall: Wenn es gelingt, die Annahme (4) als gültig und damit die Existenz* von up-Zahlen nachzuweisen, dann sind mit einem Schlag alle bis dahin nur unter der unbewiesenen Voraussetzung (4) hergeleiteten Sätze über up-Zahlen nun uneingeschränkt wahr. Das bedeutet: man kennt jetzt viele Eigenschaften von up-Zahlen und das wird sich bei der vermutlich schwierigen Suche nach konkreten solchen Zahlen sicher als hilfreich erweisen.
2. Fall: Wenn man (4) als falsch nachweisen kann, dann war alle auf das Thema „up-Zahlen“ verwandte Mühe im Wesentlichen umsonst; das Thema ist dann erledigt.
3. Fall: Man findet vorläufig weder eine Bestätigung noch eine Widerlegung von (4). Das hält jedoch die Mathematiker nicht davon ab, sich weiter mit up-Zahlen zu befassen und zwar hauptsächlich aus zwei Gründen:
Es besteht die Möglichkeit, dass (4) eines Tages doch noch bewiesen wird und man wäre dann in der im 1. Fall beschriebenen, günstigen Situation; oder man stößt bei seinen Untersuchungen auf einen Satz, der einer anderen, bereits bewiesenen Aussage widerspricht. Aus diesem Widerspruch folgte, dass (4) falsch und damit das Problem der up-Zahlen erledigt wäre.

Diese Überlegungen zeigen, dass es in der Mathematik durchaus seine Berechtigung haben kann, sich den Kopf zu zerbrechen über Objekte, bei denen man sich nicht sicher sein kann, ob es sie überhaupt gibt.

* In der Mathematik gibt es eine Denkrichtung – den sogenannten Intuitionismus – der reine Existenzbeweise ablehnt: für den Intuitionisten existiert ein mathematisches Objekt nicht durch einen Existenzsatz, sondern nur dadurch, dass man es berechnen oder konstruieren oder sonstwie vorzeigen kann. Daraus folgt, dass sich der Intuitionist nicht mit Dingen befasst, deren Existenz nur durch einen Existenzsatz gesichert ist (s.o., 1. Fall) und schon gar nicht beschäftigt er sich mit Dingen, deren Existenz nicht einmal sicher ist (s.o., 3. Fall).

Erratum

In MONOID 132 ist uns leider in den Lösungen der Aufgaben zum neuen Jahr ein Fehler unterlaufen. In der Lösung der Aufgabe 2017²⁰¹⁸ muss es im letzten Teil der Rechnung heißen:

$$\begin{aligned} &= (9 + 8z + H_1) + (72z + 64z^2 + 8zH_4) + H_5 \\ &= 9 + \mathbf{80z} + H_6 \text{ weil } z^2 \text{ ein Vielfaches von 100 ist.} \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt: die letzten beiden Ziffern von 2017²⁰¹⁸ sind **09**.
Vielen Dank an Herrn Roland Schröder für den Hinweis.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 132

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lünig):

Kl. 5: Michel Schultealbert 25, Oskar Su 65, Jan Christian Weber 23;

Kl. 6: Chantal Belz 6, Julia-Michelle Butter 6, Lars Schall 34;

Kl. 7: Linus Kemmeter 11, Nils Koch 14, Arvin Plaumann 7, Oskar Schott 11;

Kl. 8: Lukas Born 46, Lea Daum 39, Paul Schall 12, Jonas Schneider 39, Trevor Schöller 117;

Kl. 10: Torben Bürger 38, Maximilian Hauck 74.

Bad Dürkheim, Werner-Heisenberg-Gymnasium:

Kl. 10: Marc Strufe 23.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Schule:

Kl. 5: Kiara Dallmeier 10, Raphael Hanold 17, Alexander Scherf 6;

Kl. 6: Jannik 5, Kian 1, Benjamin Bartsch 1, Paul Daemm 6, Emilia Minor 1,5, Laurenz Schulze 1;

Kl. 7: Chiara Peiter 21,5, Noah Peiter 21,5.

Bielefeld, Gymnasium am Waldhof: Kl. 8: Roxana Mittelberg 53.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium: Kl. 7: Oliver Bill 7.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider, Frau Haag):

Kl. 8: Noah Böhm 10;

Kl. 9: Luca Keil 14, Alina Chiara Stock 6,5.

Friedberg, Augustinerschule:

Kl. 5: Konstantin Herbst 20;

Kl. 8: Aleksandra Herbst 63,5.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:

Kl. 11: Maximilian Göbel 63, Linda Theten 19.

Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:

Kl. 7: Raphael Schmittner 26,5;

Kl. 8: Jacob Zimmermann 23;

Kl. 9: Marie Bauer 12.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule

Kl. 5: Marvin Traudt 11;

Kl. 6: Lena Wittayer 12;

Kl. 7: Johannes Sabel 12, Alina Wick 12;

Kl. 11: Melanie Schuy 24;

Kl. 12: David Storzer 67.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:

Kl. 10: Dennis Mayle 54.

Linz, Bürgermeister-Castenholz-Grundschule:

Kl. 4: Daniel Waldek 5.

Linz, Martinus Gymnasium:

Kl. 7: Simon Waldek 33,5.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 6: Gregor Salaru 111,5;

Kl. 8: Raphael Mayer 14.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):

Kl. 6: Julia Koehler 18,5, Johannes Konyen 7;

Kl. 7: Eugene Koch 18;

Kl. 8: Almira Orhun 13,5, Ievgeniia Skrypova 20;

Kl. 10: Max Herwig 24;

Kl. 11: Ivan Khomutovski 44, Florian Weinzing 22;

Kl. 12: Marc Hoffmann 21.

Mainz, Theresianum:

Kl. 9: Clemens Zabel 27,5.

Maxdorf, Lise-Meitner-Gymnasium:

Kl. 6: Dominik Göbel 17;

Kl. 9: Gergana Marinova 10;

Kl. 11: Fabian von der Warth 32.

Münstermaifeld, Kurfürst-Balduin-Gymnasium:

Kl. 10: Yannik Spitzley 47.

Nonnenwerth, Franziskus Gymnasium:

Kl. 5: Benedikt Klein 2, Tim Sahler 6.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

Kl. 5: Emilie Borrmann 23, Samuel Seyser 6;

Kl. 6: Jonathan Friedel 13, Miriam Herget 8, Luca Petri 14,
Esther Schmedding 5;

Kl. 8: Kathrin Bormann 54, Paulina Herber 55;

Kl. 9: Annika Borrmann 42, Sönke Schneider 92;

Kl. 11: Jonas Blumenroth 58, Lennard Freud 49, Jonas Glückmann 54, Fabian Rasch 30;

Kl. 12: Friedrich Kiefernagel 7, Namgyu Paul Kim 23, Kristin Teichert 16, Jan Wabnig 46.

Schwedt/Oder, Carl-Friedrich-Gaus-Gymnasium:

Kl. 11: Julian Scheinert 55.

Speyer, Nikolaus-von-Wies-Gymnasium:

Kl. 10: Heiko Hirschfeld 22.

Tangermünde, Diesterweggymnasium:

Kl. 6: Tu Sam Dong 50,5;

Kl. 8: Miriam Büttner 60,5.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:

Kl. 8: Raphael Gaedtke 31,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:

Kl. 7: Mareike Bühler 38.

Worms, Gauß-Gymnasium:

Kl. 7: Fatima Hemood 6,5.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Vera Ruß

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Inhalt

Einladung zur MONOID-Feier 2018	3
H. Fuchs: Beweis ohne Worte: Die binomische Formel	3
H. Fuchs: Jedes Dreieck gehorcht der Zahl $\frac{16}{15}$	4
H. Fuchs: Was uns über den Weg gelaufen ist	6
H. Fuchs: Monoidale Knobelei	6
F. Rehm: Ein mathematischer Zaubertrick mit Zahlen	7
H. Fuchs: Mathematisch überlistet	9
H. Sewerin: Das Denkerchen	9
Die Aufgabe für den Computer-Fan	11
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 134	16
Neue Mathespielereien	19
Neue Aufgaben	21
Gelöste Aufgaben aus MONOID 134	22
H. Fuchs: Anzahl, Häufigkeit und Dichte	26
H. Fuchs: Aus den Archiven der Mathematik	30
H. Fuchs: Die besondere Aufgabe: Primzahlen mit gleichen Endziffern	31
Mathematische Entdeckungen	32
H. Fuchs: Perfekt ungerade Zahlen	34
Erratum	37
Rubrik der Löser und Löserinnen	37
Impressum	40

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>