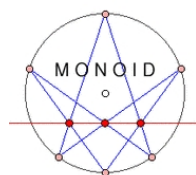
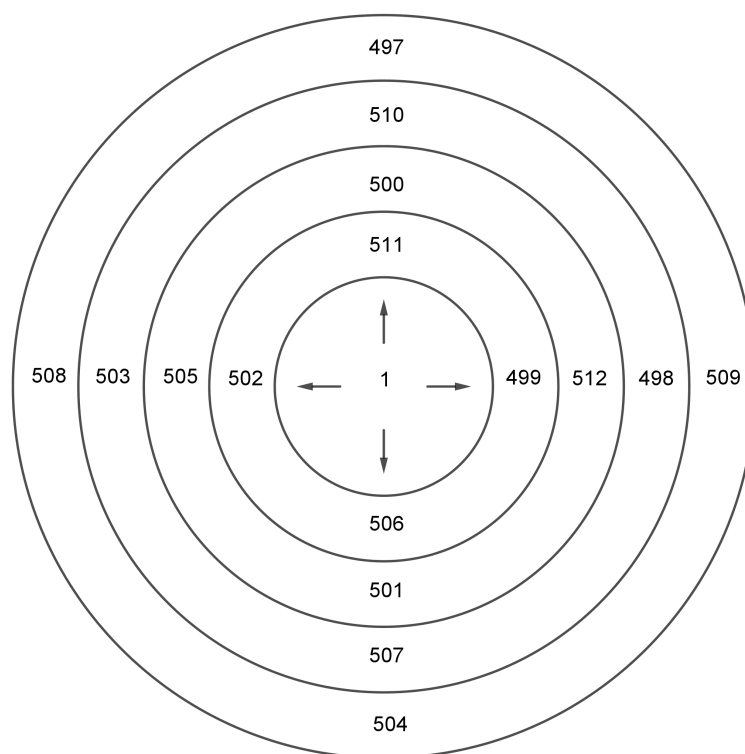


MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der

15.02.2019.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion**

Tel.: 06131/3926107

Fax: 06131/3924389

55099 Mainz

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

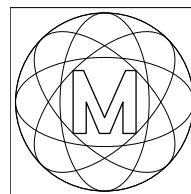
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider oder Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfisch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

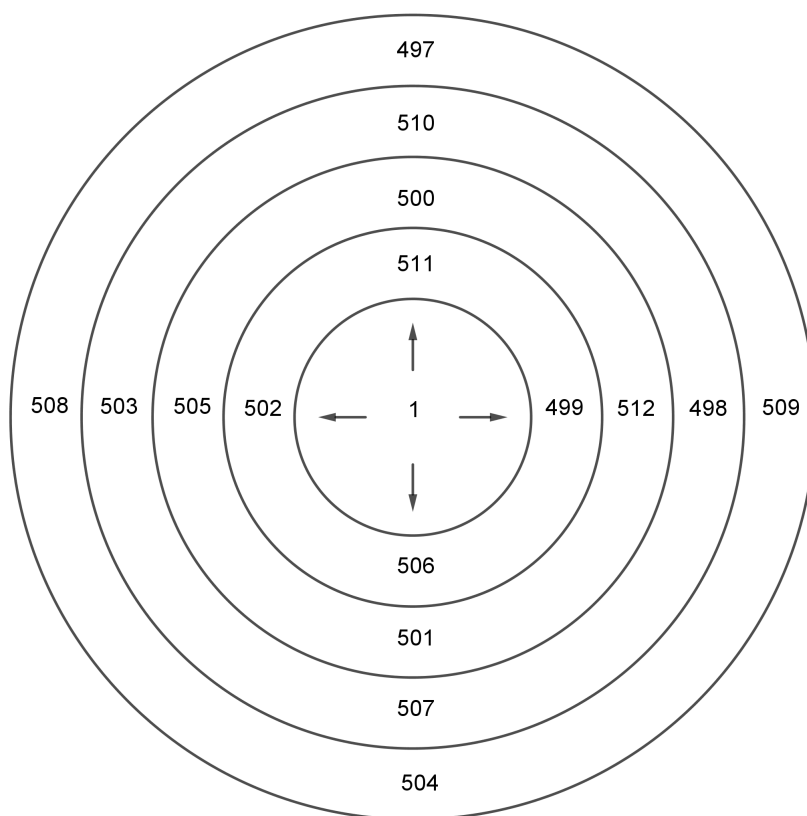
Die Redaktion



Aufgaben zum Neuen Jahr von Hartwig Fuchs

Magische Zielscheibe

Die Figur besitzt drei in diesem Jahr bemerkenswerte Zahlen-Eigenschaften. Finde sie.



Eine Summe zum Jahr 2019

Zeige, dass folgende Gleichung richtig ist:

$$\frac{2019}{2018 \cdot 2020} = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2018 \cdot 2019 \cdot 2020}?$$

Jahreszahl 2019

Es sei $N = abcd$ eine vierziffrige Zahl. Subtrahiere die dreiziffrige Zahl abc von N ; zum Ergebnis addiere man die zweiziffrige Zahl ab und vom Ergebnis subtrahiere man a .

Wie lautet N , wenn das Endergebnis der Rechnung 2019 ist?

Ziffernanzahl

Wie viele Ziffern 1 hat die Zahl $n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots99}_{2019\text{Ziffern}9}$

Teilbarkeiten

Zeige: $2019^{2020} - 2019$ ist ohne Rest nicht nur durch 2019 sondern auch durch 2018 und $2019 \cdot 2020 + 1$ teilbar.

Bemerkung: 2019^{2020} ist eine 6677-ziffrige Zahl!

Jahreszahlen

Es sei $x_0 = 5$ und $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ für $n \geq 1$.

a) Zeige, dass $x_{2019} > 63$ ist.

b) Bestimme ein n , für das $x_n > 2019$ ist.

Hinweis: Finde zunächst eine Ungleichung der Form $x_n^2 > a \cdot n + b$

Wurzelsalat

Welche der Gleichungen ist richtig?

$$\sqrt{2019 + \frac{2019}{2018 \cdot 2020}} = 2019 \sqrt{\frac{2019}{2018 \cdot 2020}} \quad (1)$$

$$\sqrt{2019^2 + \frac{2019^2}{2018}} = 2019 \sqrt{\frac{2019}{2018}} \quad (2)$$

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 36.

Neuronen voll beansprucht

Die Mainzer Mathe-Akademie 2018

von Felix Jung

Vom 29. August bis zum 2. September trafen sich zum neunten Mal 30 Schülerinnen und Schüler zur Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz. Von Mittwochabend bis Sonntagmittag haben wir etwas Uniluft geschnuppert und uns mit mathematischen Themen beschäftigt, die in der Schulmathematik nicht vorkommen. Alljährlich bieten drei Dozenten der Universität bei der MMA Kurse an, bei denen man sich mit Fragestellungen beschäftigt und sie so aufbereitet, dass man sie am Sonntag den anderen Teilnehmern präsentieren kann.

Die diesjährigen Themen waren: „Fraktale Kurven“ (Prof. Dr. Steffen Fröhlich), „Von Neuronen und Neuronenmodellen“ (Prof. Dr. Reinhard Höpfner) und „Die Verteilung der Primzahlen“ (Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni). Außerdem werden die Teilnehmer von studentischen Helfern und zwei Lehrkräften, Herrn Gruner und Herrn Mattheis, betreut. Wir durften uns, nachdem die Dozenten ihre Kurse kurz vorgestellt hatten, am Donnerstag selbst aussuchen, welchen Kurs wir besuchen wollten.

In den Pausen wurden wir gut versorgt und das Mittagessen in der Mensa war sehr lecker. Außerdem haben sich in den Pausen viele Möglichkeiten ergeben, mit Studierenden über das Mathematikstudium aus Sicht eines Studenten zu unterhalten und sich auch mit den anderen Teilnehmer über ihr Zukunftsvorstellungen zu unterhalten.

Daneben wurde uns ein sehr schönes Rahmenprogramm geboten. Wir haben an einem Nachmittag den besten Minigolfspieler unter uns ausgemacht und haben danach noch zusammen Pizza gegessen. Am Abend hat Gregor Angeloni uns in die Grundlagen des Improvisationstheaters eingeführt. Freitag hat Prof. Dr. Tilman Sauer einen mathematisch-historischen Vortrag über historische Lösungsverfahren von Gleichungssystemen gehalten, und wir wurden durch die Stadt geführt. Danach hatten wir noch ein bisschen Freizeit in der Stadt, bevor uns Max und Tianyu nach dem Abendessen eine Einführung in das japanische Strategiespiel Go gegeben und uns einige strategische Kniffe gezeigt haben. Am Samstagabend wurde gemeinsam gegrillt und wir haben unsere Präsentationen für Sonntag vorbereitet. Dabei kommt es darauf an, dass man die Erkenntnisse, die man in seinem jeweiligen Kurs gewonnen hat, so aufzubereiten, dass nach einem 30-Minuten-Vortrag die anderen über die Erkenntnisse des Kurses informiert sind.

Für alle Teilnehmer war die MMA eine tolle Erfahrung, bei der wir Gleichgesinnte kennenlernen und einen guten Einblick in die Mathematik an Universitäten erlangen konnten. Wir möchten uns bei den Mitwirkenden und den beiden Organisatoren, Herrn Gruner und Herrn Mattheis, für die sehr gute Organisation und auch beim Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz für die finanzielle Förderung bedanken. Ohne diesen Einsatz hätten wir nicht die Möglichkeit gehabt, solche tolle Tage in Mainz zu erleben.

Felix Jung ist Schüler der 12. Klasse des Rhein-Wied-Gymnasiums in Neuwied. An der MMA nahm er dieses Jahr zum ersten Mal teil.



MMA-Termin 2019

Vielleicht seid Ihr jetzt neugierig geworden und möchtet auch einmal an der MMA teilnehmen, um Euch vier Tage mit Mathematik zu beschäftigen und andere Mathematik-Begeisterte kennenzulernen? Die nächste findet vom 28. August bis 1. September 2019 statt. Näherer Informationen findet Ihr rechtzeitig in MONOID oder im Internet unter

<https://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie>

Lösung ohne Worte

Konstruktion irrationaler Zahlen

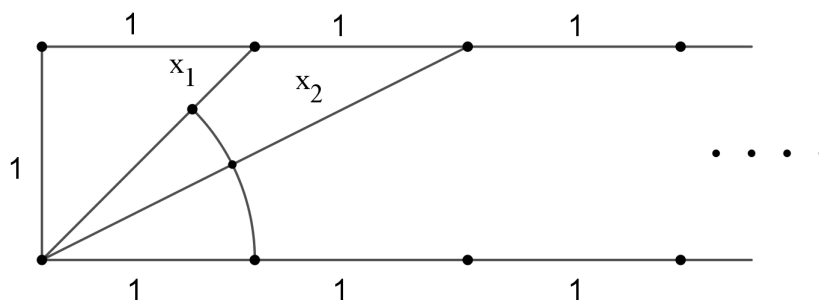
von Hartwig Fuchs

Man konstruiere allein mit Zirkel und Lineal die irrationalen Zahlen

$$x_1 = \sqrt{2} - 1 \text{ und } x_2 = \sqrt{5} - 1$$

und beschreibe, wie man die Zahlen $x_n = \sqrt{n^2 + 1} - 1$, $n \geq 3$ konstruieren kann.

Lösung ohne Worte



Unendlich = unendlich?

von Martin Mattheis

Habt ihr euch eigentlich auch schon irgendwann einmal gefragt, wie viele natürliche Zahlen es gibt? Nun, wer im Grundschulalter schon einmal versucht hat, diese zu zählen, weiß es vielleicht: 1; 2; 3; 4; 5;... 40; 41; 42;... 2017; 2018; 2019;... und immer so weiter. Man kann zählen, solange man will und kommt doch zu keinem Ende, denn es sind unendlich viele. Weil man sie trotzdem theoretisch abzählen könnte, sagt man zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auch sie sei „abzählbar unendlich“.

Was passiert nun, wenn ich zu der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen noch eine weitere Zahl, zum Beispiel die Null, ergänze? Sind es dann $(\infty + 1)$ -viele? Zum leichteren Vergleich schreiben wir die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ in eine Tabelle:

$\mathbb{N}_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Man sieht direkt, dass auch die natürlichen Zahlen mit der Null durch die natürlichen Zahlen abzählbar sind. Trotzdem scheint dies unserem gesunden Menschenverstand – der allerdings in unserem ganzen Leben nur mit endlichen Begebenheiten in Berührung kommt – vollständig zu widersprechen: Die Menge $\mathbb{N}_0$ hat genauso viele Elemente wie die Menge $\mathbb{N}$.

Und was passiert, wenn wir nicht nur eine Zahl, sondern ebenfalls abzählbar unendlich viele Zahlen hinzufügen und damit zu den ganzen Zahlen kommen? Auch diese schreiben wir wieder zusammen mit den natürlichen Zahlen in eine Tabelle:

$\mathbb{Z}$	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	...
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Wir stellen drei Dinge fest: 1) Auch die ganzen Zahlen sind abzählbar unendlich viele; 2) Es gibt genauso viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen und 3) Unser gesunder Menschenverstand fühlt sich noch ein bisschen weniger gesund.

Da man innerhalb der ganzen Zahlen nur eine sehr begrenzte Anzahl von Divisionen durchführen kann, wurden diese zu den rationalen Zahlen erweitert. Die Frage, die sich für uns nun direkt anschließt, ist die, ob es trotz dieser Erweiterung in $\mathbb{Q}$ auch wieder nur abzählbar unendlich viele Zahlen gibt. Nach den Erfahrungen, die wir mit $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ gemacht haben, ist diese Frage gleichbedeutend mit der Aufgabe alle rationalen Zahlen so aufzuschreiben, dass wir sie direkt abzählen können.

Der Hallenser Mathematiker Georg Cantor (1845-1918) entwickelte dazu 1874 das folgende nach ihm benannte „*Cantorsche Diagonalverfahren*“. Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur die positiven rationalen Zahlen und schreiben diese wie folgt auf:

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	...
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	...
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	...
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	...
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Geht man beim Zählen diagonal vor, so erhält man auch hier wieder abzählbar unendlich viele positive rationale Zahlen:

$\mathbb{Q}^+$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Wen es stört, dass hier einige Zahlen mehrfach gezählt werden (z.B. $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \dots$), der kann Zahlen, die bereits gezählt wurden auch gerne überspringen:

$\mathbb{Q}^+$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	...
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Entsprechend der Abzählung der ganzen Zahlen kann man nun auch noch die negativen Brüche und die 0 ergänzen und erhält damit in $\mathbb{Q}$ auch nur abzählbar unendlich viele Zahlen.

Und wie sieht es bei der nächsten Zahlbereichserweiterung von den rationalen zu den reellen Zahlen aus? Nach den bisher gemachten Erfahrungen mit der abzählbaren Unendlichkeit der Zahlenmengen erscheint es mehr als plausibel, dass auch die reellen Zahlen irgendwie abgezählt werden könnten. Nehmen wir also an, dass es abzählbar unendlich viele reelle Zahlen gibt. Gehen wir im Folgenden also davon aus, dass wir alle positiven reellen Zahlen in einer zählbaren Reihenfolge aufgeschrieben haben. Um unsere Betrachtungen zu vereinfachen, untersuchen wir zunächst nur alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Wenn es eine Abzählung gibt, dann können wir also auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gemäß dieser Abzählung der Reihe nach aufschreiben:

$\mathbb{N}$	Allgemeine Abzählung	Anfang einer möglichen Abzählung
1	$0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \dots$	0,136136...
2	$0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \dots$	0,955099...
3	$0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \dots$	0,424242...
4	$0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots$	0,123456...
5	$0, e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 \dots$	0,000110...
6	$0, f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 \dots$	0,130267...
...	...	...

Dabei steht z.B. a_1 für die erste Ziffer der ersten reellen Zahl der Auflistung, b_{42} für die zweiundvierzigste Ziffer zweiten reellen Zahl der Auflistung usw.

Nun konstruieren wir mit Hilfe obiger Auflistung eine reelle Zahl $r = 0, r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 \dots$ folgendermaßen:

Wenn $a_1 \neq 1$, dann sei $r_1 = 1$, sonst sei $r_1 = 2$,
wenn $b_2 \neq 1$, dann sei $r_2 = 1$, sonst sei $r_2 = 2$,
wenn $c_3 \neq 1$, dann sei $r_3 = 1$, sonst sei $r_3 = 2, \dots$

In unserer Beispielabzählung würde dies $r = 0, 211121 \dots$ ergeben. Nun überlegen wir uns, ob die Zahl r bereits in der Auflistung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten ist: An der ersten Stelle kann sie nicht stehen, weil $a_1 \neq r_1$, an der

zweiten Stelle ebenfalls nicht, da $b_2 \neq r_2$, an der dritten Stelle nicht, weil $c_3 \neq r_3$ usw. usw. Wir haben also eine neue Zahl r konstruiert, die zwar zwischen 0 und 1 liegt, aber in unserer vollständigen Aufzählung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht enthalten ist.

Wie ist dieser offensichtliche Widerspruch zu erklären? Nun ganz einfach dadurch, dass unsere Annahme, dass es zwischen 0 und 1 nur abzählbar unendlich viele reellen Zahlen gäbe, falsch ist. Wenn schon die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mehr als abzählbar unendlich viele sind, dann gilt dies für alle reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ebenfalls. Aus dieser Erkenntnis folgt direkt, dass es verschiedene Stufen der Unendlichkeit gibt. Die Menge der reellen Zahlen ist *nichtabzählbar* oder *überabzählbar*. Was unser oben mehrfach bemühter „gesunder Menschenverstand“ dazu sagt, wird an dieser Stelle offen gelassen.

Benannt ist das im Jahr 1877 veröffentlichte „Zweite Cantorsche Diagonalverfahren“ ebenfalls nach seinem Autor Georg Cantor. Das dabei verwendete Beweisverfahren „Beweis durch Widerspruch“, bei dem man zunächst das Gegenteil dessen, was man eigentlich beweisen will, annimmt und diese Annahme durch korrekte Schlussfolgerungen zu einem Widerspruch führt, ist nicht nur in der Mathematik, sondern auch vor Gericht sehr beliebt: „Ich werde beschuldigt um 13 Uhr in Mainz ein Mainzelmännchen angerempelt zu haben. Um 12:45 Uhr habe ich allerdings in Kaiserslautern nachweislich einen Zaun gestrichen (Zeuge: Tom Sawyer). Da es unmöglich ist, in 15 Minuten von Kaiserslautern nach Mainz zu kommen, kann ich das Mainzelmännchen nicht angerempelt haben und bin also unschuldig.“

Literatur zum Weiterlesen:

Wer die Frage der mathematischen Unendlichkeiten vertiefen möchte, dem sei zur Lektüre der Klassiker „Was ist Mathematik?“ von Richard Courant und Herbert Robbins empfohlen, der noch jede Menge andere grundlegende Ideen zur Mathematik enthält.

Monoidale Knodelei

von Hartwig Fuchs

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r}
 M \quad M \quad M \\
 O \quad O \quad O \\
 + \quad N \quad N \quad N \\
 \hline
 R \quad S \quad T \quad U
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \begin{array}{r}
 O \quad O \quad O \\
 I \quad I \quad I \\
 + \quad D \quad D \quad D \\
 \hline
 R \quad S \quad T \quad U
 \end{array}
 \end{array}$$

Ersetze in (1) und in (2) verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern, gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, sodass man zwei korrekte Additionen erhält.

Wir bezeichnen die in den drei von links nach rechts nummerierten Spalten S_1, S_2, S_3 von (1) zu bildenden Summen $M + O + N$ mit A .

Zunächst gilt: $6 \leq A \leq 24$ wegen $A \geq 1 + 2 + 3$ und $A \leq 9 + 8 + 7 < 30$.

Es sei $A < 10$. In S_3 ist dann $A = U$ und in S_2 ist $A = T$. Daraus folgt: $U = T$ – ein Widerspruch.

Es sei $A \geq 20$. Dann gilt in S_3 : $A = U + 20$; in S_2 : $A + 2 = T + 20$; in S_1 : $A + 2 = S + 20$. Somit ist $T = S$ – ein Widerspruch.

Es gilt somit $10 \leq A < 20$. Dann ist in S_3 : $A = U + 10$.

Wäre nun in S_2 : $A + 1 = T + 10$, so folgte für S_1 : $A + 1 = S + 10$ und daher wäre $T = S$ – ein Widerspruch.

Es gilt also: $A = U + 10$ und $A + 1 = T + 20$, sodass $U + 10 + 1 = T + 20$ ist. Wegen $U < 10$ und $U = T + 9$ gilt somit $T = 0$, $U = 9$ und folglich $A = 19$.

Damit folgt in S_1 : $A + 2 = 21$; also ist $S = 1$ und $R = 2$.

Somit ist $RSTU = 2109$.

M, O und N müssen nun diese Bedingungen erfüllen: $M + O + N = 19$ und $M, O, N \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wegen $RSTU = 2019$

Wären nun M, O und N sämtlich < 8 , so hätte man $N + O + M \leq 5 + 6 + 7 < 19$ – ein Widerspruch.

Da O sowohl in (1) als auch in (2) vorkommt, muss $O = 8$ sein.

Somit sind für M und N nur noch die Zahlen 4 und 7 sowie 5 und 6 möglich.

Daher hat man – abgesehen von Vertauschungen bei der Zuordnung von Ziffern zu den von O verschiedenen Buchstaben – im Wesentlichen eine Lösung:

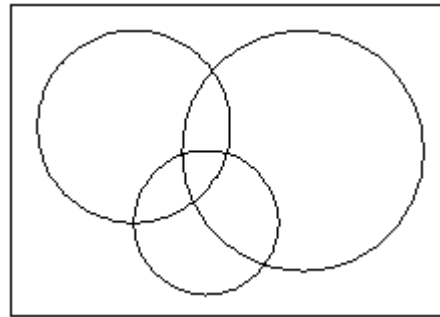
$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 7 & 7 & 7 \\
 & 8 & 8 & 8 \\
 + & 4 & 4 & 4 \\
 \hline
 & 2 & 1 & 0 & 9 \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 (2) & 8 & 8 & 8 \\
 & 6 & 6 & 6 \\
 + & 5 & 5 & 5 \\
 \hline
 & 2 & 1 & 0 & 9 \\
 \end{array}$$

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Endlich hat der berühmte Maler sein neues Bild fertig gestellt. Es besteht aus 20 Kreislinien, wobei jedes Paar von Kreisen genau zwei Schnittpunkte hat, aber niemals drei oder mehr Kreise durch einen gemeinsamen Punkt gehen. (Die Figur zeigt das Werk, als es noch in Entstehung war.)

Jedes Flächenstück in dem Bild wurde von dem Künstler mit einer anderen Farbe ausgefüllt. Es war schwer für ihn, den Überblick zu behalten und keine Farbe doppelt zu verwenden, denn es entstanden sehr viele Flächenstücke.



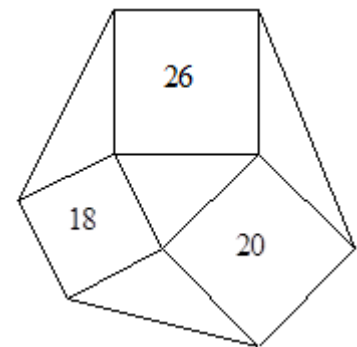
Wie viele Flächenstücke enthält das komplette Gemälde? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2019 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 134

In Heft 134 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

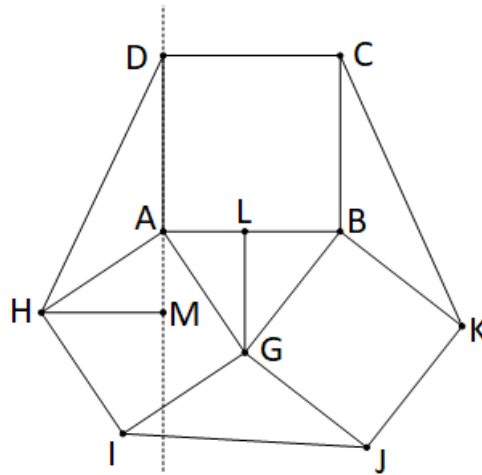
Jules Eltern haben ein sechseckiges Gartengrundstück der abgebildeten Form gepachtet. „Die drei quadratischen Flächen mit den Größen 18m^2 , 20m^2 und 26m^2 wollen wir mit Rasen bepflanzen, die Dreiecke werden zu Obst-, Gemüse- und Blumenbeeten“, sagen die Eltern.



Wie groß ist die gesamte Grundstücksfläche? (Die Lösung ist zu begründen.)

Lösung

Es gibt eine kurze Lösung mit dem Cosinussatz. Wir stellen jedoch eine Lösung vor, bei der nur der Satz des Pythagoras verwendet wird. Dazu benennen wir die Eckpunkte wie in der Figur und zeichnen im mittleren Dreieck AGB die Höhen auf die Seiten. Durch die Höhe von G auf AB entsteht unter anderem das rechtwinklige Dreieck AGL , das wir um A um 90° im Uhrzeigersinn drehen. Wegen der rechten Winkel in den Quadraten geht dabei AG in AH über und der Bildpunkt M von L liegt auf der Geraden DA . Weil HM senkrecht auf DA steht, ist diese Strecke die Höhe im Dreieck ADH . Die Dreiecke AGB und ADH haben also eine gleich lange Seite und eine gleich lange Höhe auf dieser Seite, daher sind sie flächengleich. Entsprechend lässt sich zeigen, dass auch die Dreiecke BKC und GIJ flächengleich zu AGB sind.



Daher muss nur noch der Inhalt einer dieser Dreiecksflächen ermittelt werden. Wir betrachten das innere Dreieck und drücken die Höhe GL mit dem Satz des Pythagoras auf zwei verschiedene Arten aus: $|GL|^2 = |AG|^2 - |AL|^2 = |BG|^2 - |BL|^2 = |BG|^2 - (|AB| - |AL|)^2$. Die letzte Gleichung liefert nach Ausmultiplizieren und Auflösen nach $|AL|$: $|AL| = \frac{|AG|^2 + |AB|^2 - |BG|^2}{2|AB|} = \frac{18+26-20}{2\sqrt{26}} = \frac{12}{\sqrt{26}}$. Für die Höhe GL gilt dann: $|GL| = \sqrt{|AG|^2 - |AL|^2} = \sqrt{18 - \frac{144}{26}} = \frac{18}{\sqrt{26}}$. Damit berechnen wir $A_{AGB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |GL| = \frac{1}{2}\sqrt{26} \cdot \frac{18}{\sqrt{26}} = 9$. Daher beträgt die Gesamtfläche $A_{ges} = 18 + 20 + 26 + 4 \cdot 9 = 100$.

Vollständig richtige Lösungen haben Maximilian Hauck und Yannik Spitzley eingereicht.

Hier waren die drei verschiedenen Quadratseiten gegeben. Kann man die Fläche auch dann eindeutig bestimmen, wenn man zum Beispiel die Außenseiten der drei äußeren Dreiecke kennt? Aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Was uns über den Weg gelaufen ist...

...oder von gelben Zitronen und dem Weihnachtsmann

von Hans-Jürgen Schuh

A und B seien zwei Aussagen und $C := A \vee B$ (A oder B). C ist genau dann wahr, wenn A oder B (oder beide) wahr sind.

Wir nehmen nun an, dass $A =$ „Zitronen sind gelb“ und $\bar{A} =$ „Zitronen sind nicht gelb“ (nicht A) gleichzeitig wahr sind, das heißt dass $A \wedge (\bar{A})$ (A und nicht A) gilt. Dann ist offensichtlich $C =$ „Zitronen sind gelb“ oder „den Weihnachtsmann gibt es leibhaftig“ ($= A \vee B$) eine wahre Aussage, da Zitronen wirklich gelb sind.

Wenn nun aber, wie oben gefordert, auch „Zitronen sind nicht gelb“ wahr ist, wir aber bereits wissen, dass C eine wahre Aussage ist, dann muss, da ja nun Zitronen nicht gelb sind, notgedrungen der Weihnachtsmann leibhaftig existieren.

Bemerkung: Dieser „Beweis“ beruht natürlich auf dem offensichtlichen Widerspruch „Zitronen sind gleichzeitig gelb und nicht gelb“. Damit ist demonstriert, dass sich aus einem Widerspruch (das heißt aus $A \wedge (\bar{A})$) bzw. einer falschen Aussage jede beliebige Aussage herleiten lässt, auch wenn sie noch so unsinnig ist.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Merkwürdige Darstellung natürlicher Zahlen

Vor der Aufgabe ein Beispiel zur Erklärung des Titels. $\sqrt{7 + 4 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4 \cdot \sqrt{3}} = 4$, eine merkwürdige Darstellung der natürlichen Zahl 4. Gibt es solche Summen von Wurzelausdrücken für andere natürliche Zahlen ?

Aufgabe: Für welche natürlichen Zahlen N gibt es eine Darstellung der Form $\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = N$ mit natürlichen Zahlen A und B ?

- a) Schreibe ein Computerprogramm, welches dir alle solchen Zahlen N bis zur Grenze $N_{\max} = 69$ berechnet !
- b) Ermittle aus den Ergebnissen von (a) eine Erklärung/Formel, die alle solchen Zahlen N und auch die verschiedenen Möglichkeiten für solche Darstellungen beschreibt! (W.G.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2019 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 134

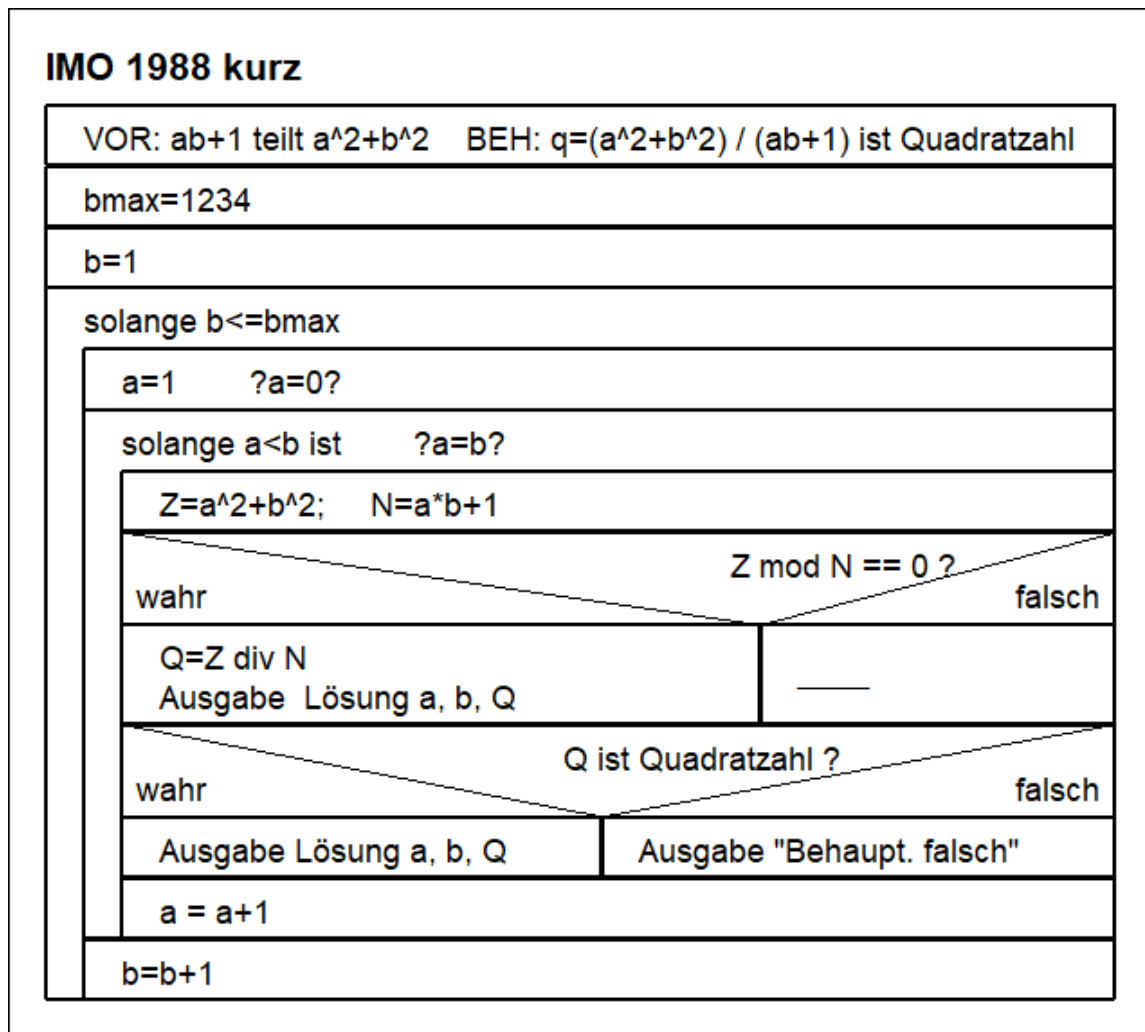
Sind $a, b \in \mathbb{N}_0$, sodass $a^2 + b^2$ durch $ab + 1$ teilbar ist, dann ist $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q$ eine Quadratzahl.

- a) Schreibe ein Programm, welches eine von Dir festgelegte begrenzte Anzahl von Lösungen berechnet.
- b) Erstelle mit Hilfe der Lösungen aus a) eine allgemeine Formel für die Folge aller Lösungen.
- c) Zusatzpunkte, falls Du einen theoretischen Beweis der Folge der Lösungen erstellst.

Ergebnisse

Folgende Schüler haben sich erfolgreich mit der Aufgabe beschäftigt: Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, und Yannik Spitzley vom Kurfürst-Balduin-Gymnasium, Münstermaifeld.

a) Struktogramm eines PYTHON-Programmes



Das Python-Programm untersucht alle Möglichkeiten von (a, b) daraufhin, ob sie eine Lösung der Gleichung für eine ganze Zahl q darstellen. Wegen der Symmetrie des Bruches bezüglich a und b kann man ohne Einschränkung $0 \leq a \leq b$ fordern und b bis zu einer Grenze $b_{\max}$ laufen lassen; als innere Schleife läuft dann a von 0 bis b .

Einschränkungen, ? Fragezeichen im Struktogramm

$a = 0, b \neq 0$ liefert b^2 als Wert des Bruches, eine Quadratzahl. Also sind $(0, b^2)$ unendlich viele Lösungen der einfachsten Form (und ebenso $(a^2, 0)$).
 $a = b$ liefert einen Widerspruch, sodass $0 < a < b$ innerhalb „solange“ genügt.

Python Ergebnisse $\rightarrow Z=\text{Zähler}$ $N=\text{Nenner}$ $q=\frac{Z}{N} = \frac{(a^2+b^2)}{(ab+1)}$

a=1	b=1	q=1	a=1	b=1	q=1	a=1	b=1	q=1
a=2	b=8	q=4	a=2	b=8	q=4	a=2	b=8	q=4
a=3	b=27	q=9	a=3	b=27	q=9	a=3	b=27	q=9
a=8	b=30	q=4	a=8	b=30	q=4	a=8	b=30	q=4
a=4	b=64	q=16	a=4	b=64	q=16	a=4	b=64	q=16
a=30	b=112	q=4	a=30	b=112	q=4	a=30	b=112	q=4
a=5	b=125	q=25	a=5	b=125	q=25	a=5	b=125	q=25
a=6	b=216	q=36	a=6	b=216	q=36	a=6	b=216	q=36
a=27	b=240	q=9	a=27	b=240	q=9	a=27	b=240	q=9
a=7	b=343	q=49	a=7	b=343	q=49	a=7	b=343	q=49
a=112	b=418	q=4	a=112	b=418	q=4	a=112	b=418	q=4
a=8	b=512	q=64	a=8	b=512	q=64	a=8	b=512	q=64
a=9	b=729	q=81	a=9	b=729	q=81	a=9	b=729	q=81
a=10	b=1000	q=100	a=10	b=1000	q=100	a=10	b=1000	q=100
a=64	b=1020	q=16	a=64	b=1020	q=16	a=64	b=1020	q=16
a=11	b=1331	q=121	a=11	b=1331	q=121	a=11	b=1331	q=121
a=418	b=1560	q=4	a=418	b=1560	q=4	a=418	b=1560	q=4
a=12	b=1728	q=144	a=12	b=1728	q=144	a=12	b=1728	q=144
a=240	b=2133	q=9	a=240	b=2133	q=9	a=240	b=2133	q=9
a=13	b=2197	q=169	a=13	b=2197	q=169	a=13	b=2197	q=169
a=14	b=2744	q=196	a=14	b=2744	q=196	a=14	b=2744	q=196
a=125	b=3120	q=25	a=125	b=3120	q=25	a=125	b=3120	q=25
a=15	b=3375	q=225	a=15	b=3375	q=225	a=15	b=3375	q=225
a=16	b=4096	q=256	a=16	b=4096	q=256	a=16	b=4096	q=256
a=17	b=4913	q=289	a=17	b=4913	q=289	a=17	b=4913	q=289
a=1560	b=5822	q=4	a=1560	b=5822	q=4	a=1560	b=5822	q=4
a=18	b=5832	q=324	a=18	b=5832	q=324	a=18	b=5832	q=324
b _{max} = 6666 Zeit = 81 Sek			fett b=a^3			fett q=4		

b) *Erste Spalte*: Die puren Ergebnisse bis $b_{\max} = 6666$; die eine noch unbekannte Formel für $\mathbb{L}$ enthalten, welche?

Zweite Spalte: Interpretation von einzelnen Zeilen liefert für einige Lösungen die Form $(b = a^3)$; andere Lösungen der Gestalt $b = a^n$ ($n \in \mathbb{N}$) kann man theoretisch ausschließen. Es gibt allerdings auch Lösungen mit $b \neq a^3$.

Dritte Spalte: Interpretation von denjenigen Zeilen, die denselben Quotienten q haben. Der Fall $q = 4$ liefert die Lösungen $\frac{0}{2}, \frac{2}{8}, \frac{8}{30}, \frac{30}{112}, \frac{112}{418}, \frac{418}{1560}$. Man erkennt sofort, dass der Nachfolger $\frac{a'}{b'}$ der Lösung $\frac{2}{8}$ die Gestalt $\frac{8}{b'}$ hat; b' muss sich aus $a = 2, b = 8$ und $q = k^2$ (hier $k = 2$) ergeben:

Durch Ausprobieren erhält man $b' = 4 \cdot 8 - 2 = 30$, allgemein $b' = q \cdot b - a$. Diese Formel trifft auch für die folgenden Lösungen und ihre Nachfolger zu. Für die ersten vier Lösungen von $q = 4$ gilt: $a_0 = 0, b_0 = 2; a_1 = b_0 = 2, b_1 = 4 \cdot 2 - 0 = 8; a_2 = b_1 = 8, b_2 = 4 \cdot 8 - 2 = 30; a_3 = 30, b_3 = 4 \cdot 30 - 8 = 112$ etc.

Für $q = 9$ kann man mit den berechneten Lösungen ähnliches zeigen. Vermutlich setzen sich die Lösungen in dieser Weise fort; allgemein also

$$a_0 = 0, b_0 = k = \sqrt{q}, a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = q \cdot b_n - a_n.$$

Das erklärt auch die Glieder $(0, k)$, (k, k^3) der 2-ten Spalte. Mit dem Computer kann dies nur in endlich vielen Fällen stichprobenartig bestätigt werden. Abhilfe kann hier nur ein allgemeiner, theoretischer Beweis schaffen. (F.R.)

c) Theoretischer Beweis erscheint in MONOID137

Mathematische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Mathematik –

Frank Rehm

Jainta, Paul et al.: Mathe ist noch mehr: Aufgaben und Lösungen der Fürther Mathematik-Olympiade 2012-2017

Heute möchte ich euch einen weiteren Mathematikwettbewerb – die „FüMO“ und das neue Buch zur Olympiade vorstellen. FüMO steht für Fürther Mathematik-Olympiade, denn entwickelt wurde die Initiative seit 1990 über mehrere Jahre in den Gymnasien von Fürth.

Seit 1992 können Schüler der Klassen 5 bis 8 daran teilnehmen, beteiligen können sich alle Schulen in Deutschland und darüber hinaus, z.B. in Österreich. Die Olympiade geht zurück auf die Idee, Schüler in Bayern gezielt für den Landeswettbewerb zu trainieren, aber auch auf den Bundeswettbewerb und die Mathematikolympiade vorzubereiten, aber auch bei jüngeren Schülern das Talent für Mathematik zu wecken und zu entwickeln.

In den Aufgaben legen die Verfasser Wert auf kurze, klare Formulierungen, im Geleitwort zum Buch führt Karel Tschacher folgendes Beispiel auf, das zwar nicht der FüMo entstammt, aber genau die Zielrichtung der Problemstellungen demonstriert: „Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, deren Querprodukt 20 000 beträgt?“ Der Vorsitzende des Vereins FüMO e.V., Paul Jainta, hat zusammen mit fünf weiteren Autoren die Aufgaben thematisch in 15 Kapitel gegliedert, sieben für 5.- und 6.-Klässler und acht für 7.- und 8.-Klässler. Es folgt ein Lösungsteil für alle Olympiadaufgaben. Hier noch ein Beispiel für Klassenstufe 7/8, das für die Eleganz so mancher Problemstellung stehen kann: „Schöne Rechtecke: Anna nennt Rechtecke schön, wenn die Maßzahlen der Seiten natürliche Zahlen sind und die Maßzahlen von Umfang und Flächeninhalt übereinstimmen. Bestimme alle schönen Rechtecke.“



Angaben zum Buch:

Paul Jainta et al. Mathe ist noch mehr: Aufgaben und Lösungen der Fürther Mathematik-Olympiade 2012-2017. Springer Spektrum 2018, ISBN 9783662566503, Taschenbuch 171 Seiten.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 135

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Aufgabe, wie sie der 7-jährige Carl Friedrich Gauß vielleicht gelöst hätte

Bestimme die Summe S aller Quersummen der Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots, 100000$. (H.F.)

Lösung:

Die Geschichte ist bekannt, wie der kleine C. F. Gauß die Summe S aller Zahlen $1, 2, 3, \dots, 100$ gefunden hat. Er rechnete so, wie in der folgenden Tabelle beschrieben und er erhielt $S = 101 \cdot 50 = 5050$.

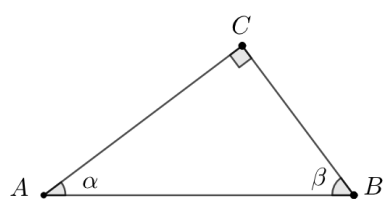
n	1	2	3	...	50
$101-n$	+100	+99	+98	...	+51
	101	101	101	...	101

Ganz ähnlich löst man die Quersumme-Aufgabe: Zuerst berechnet man die Quersumme der Zahlen eines jeden Paares $(n, 99999 - n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 49999$:

n	0	1	2	3	...	49999
$99999-n$	99999	99998	99997	99996	+51...	50000
Quersumme	45	45	45	45	...	45

Da 1 die Quersumme von 100000 ist, ergibt sich aus der Tabelle, dass $S = 50000 \cdot 45 + 1 = 2250001$ die Summe aller Quersummen der Zahlen n , $0 \leq n \leq 100000$ ist.

II. Dreieck und Parallelogramm



Figur 1

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC . Spiegele die Seite AB an AC . Als Bild ergibt sich AB' . Spiegele danach die Seite BA an BC , es entsteht BA' . Die Parallele zu AB durch C schneidet die Gerade BA' in D und AB' in E .

a) Zeige, dass das Viereck $ABDE$ ein Parallelogramm ist!

b) Zeige, dass C in der Mitte der Seite DE liegt!
(WG)

Lösung:

Allgemein gilt in ABC : $\alpha + \beta = 90^\circ$.

a) $\alpha = \alpha'$ bei Spiegelungen, $\alpha = \alpha''$ sind Wechselwinkel an Parallelen. Analoges gilt für β und β' . Daher ist Winkel δ bei B gleich $180^\circ - 2\beta = \alpha + \alpha'$, was beweist, dass $ABDE$ ein Parallelogramm ist.

IV. Rechnung eines Kindes – mathematisiert

	Z	W	E	I
+	Z	W	E	I
+	Z	W	E	I
S	E	C	H	S

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine korrekte Addition entsteht. Dabei sollen gleichen (verschiedenen) Buchstaben gleiche (verschiedene) Ziffern zugeordnet werden. Die erste Ziffer (von links) der Zahlen sei $\neq 0$. Bestimme die kleinste und die größte Lösung der Aufgabe.

(H.F.)

Lösung:

Den Additionsübertrag von der n -ten auf die $(n-1)$ -te Spalte - diese von links nach rechts mit $n = 2, 3, 4, 5$ gezählt - bezeichnen wir mit U_n . Wegen $3 \cdot 9 + 2 < 30$ sind für U_n nur die Werte 0, 1 und 2 möglich. Daher gilt $S = 1$ oder $S = 2$ in Spalte 1.

- *Die kleinste Lösung:* Es sei $S = 1$ und daher $U_2 = 1$. Mit $S = 1$ folgt aus der Spalte 5: $3I = 10U_5 + 1$ so dass $I = 7$ und $U_5 = 2$ ist. Wegen $U_2 = 1$ gilt (Spalte 2): $10 \leq 3Z + U_3 < 20$ und daher $Z \geq 3$ sowie $U_3 = 0$, $U_3 = 1$ oder $U_3 = 2$.

Es sei $Z = 3$. Für $U_3 = 2$ ist $3Z + U_3 = 11$, so dass $S = E$ im Widerspruch zur Voraussetzung $S \neq E$. Aus $U_3 = 1$ folgt $3Z + U_3 = 10$ und daher ist $E = 0$.

In Spalte 4 erhält man dann aus $3E + U_5 = U_4$, dass $H = 2$ und $U_4 = 0$ ist. Mit $U_4 = 0$ und $U_3 = 1$ gilt in Spalte 3, dass $3W = C + 10 < 20$ und $4 \leq W \leq 6$. Es sei $W = 4$. Dann ist $C = 2$ also $C = H$, ein Widerspruch. Nun sei $W = 5$. Dann ist $3W = 15$ und somit $C = 5$ - ebenfalls ein Widerspruch. Es sei $W = 6$. Aus $3W = C + 10$ ergibt sich $C = 8$.

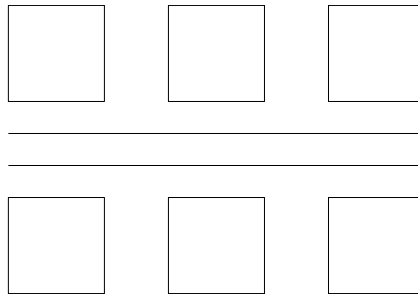
Daher lautet die kleinste Lösung: *ZWEI* entspricht 3607, *SECHS* entspricht 10821.

- *Die größte Lösung:* Es sei $S = 2$ und $U_2 = 2$. Wegen $3I = 2 + 10U_5$ (Spalte 5) ist $I = 4$ und $U_5 = 1$. Aus $S = U_2 = 2$ folgt $20 \leq 3Z + U_3 < 30$ (Spalte 2), so dass $Z \geq 6$ ist. Es sei $Z = 9$. Mit $U_2 = 2$ folgt aus $3Z + U_3 = E + 20$, dass $7 + U_3 = E$ ist. Somit gilt: $E = 8$, $U_3 = 1$. Weiter ist $3E + U_5 = 25$, so dass $H = 5$ und $U_4 = 2$ ist. Wegen $U_3 = 1$ ist $3W + U_4 \geq 10$, so dass $W = 3, 6, 7$ oder 8 ist. Für $W \geq 6$ ist jedoch $U_3 = 2$. Daher gilt $W = 3$ und somit $C = 1$.

Damit lautet die größte Lösung: *ZWEI* entspricht 9384, *SECHS* entspricht 28152.

V. Reihenfolge

Auf einem Campingplatz gibt es sechs verschiedene Bungalows: A, B, C, D, E und F. Diese sind entlang eines Weges wie in der Skizze angeordnet.



Dabei steht A links von E, B gegenüber von F und A gegenüber von C. Außerdem ist C der am weitesten von B entfernte Bungalow sowie B der am weitesten von C entfernte.

- Wie sind die Bungalows angeordnet?
- Gibt es auch eine andere Lösung? Nenne sie!

(Tobit Roth, Klasse 7, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg)

Lösung:

Möglichkeit 1:

C D F
A E B

Möglichkeit 2:

A E B
C D F

Ja! Es gibt mehr als eine Lösung.

VI. Lass' dich nicht in die Irre führen

Wieviele 10-ziffrige Primzahlen gibt es, in denen jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 genau zwei Mal vorkommt? (H.F.)

Lösung:

Es ist zur Lösung der Aufgabe nicht notwendig, als Erstes alle Zahlen zu bestimmen, welche die vorgegebenen Bedingungen erfüllen! Ist nämlich n eine 10-ziffrige Zahl nur mit den erlaubten Ziffern, dann hat n die Quersumme $Q(n) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 30$. Nun gilt für jede natürliche Zahl m :

Ist die Quersumme $Q(m)$ von m ein Vielfaches von 3, so ist auch m ein Vielfaches von 3.

Da nun für jeden Lösungskandidaten n der Aufgabe $Q(n) = 30$ ist, ist n ein Vielfaches von 3. Es gibt also keine Primzahl, welche die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt.

VII. Zahlenfolge

Betrachte die Folge

5, 2, 25, 1, 25, 2, 625, 1, 625, ...

- Berechne fünf weitere Folgenglieder.
- Wie setzt sich die Folge zusammen?

(Tobit Roth, Klasse 7, Gymnasium der Ursulinen Calvarienberg)

Lösung:

1. Weitere Folgenglieder sind:

2, 380 625, 1, 380 625, 2

2. Wir bezeichnen das n -te Folgenglied mit a_n .

Dann sind die geraden Folgenglieder gegeben durch:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ 2 & \text{wenn } n \text{ gerade, aber nicht durch 4 teilbar ist} \end{cases}$$

Die ungeraden Folgenglieder sind gegeben durch $a_1 = 5$ und

$$a_{n+2} = a_n^{a_{n+1}}$$

für alle ungeraden $n \geq 1$.

Man kann sich dies auch so veranschaulichen:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 5 & 2 & 25 & 1 & 25 & 2 & 625 & 1 & 625 & 2 & 380625 & 1 & 380625 \\ 5^2 & =25 & & & 25^2 & =625 & & & 625^2 & =380625 & & & \\ & & 25^1 & =25 & & & 625^1 & =625 & & & 380625^1 & =380625 & \end{array}$$

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

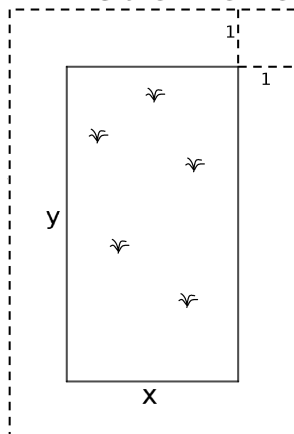
I. Lösung gesucht

Bestimme – falls das möglich ist – die Ziffer y der 7-ziffrigen Zahl $242424y$ so, dass x eine positive ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$(*) \quad (1926 - 3 \cdot x)^2 = 242424y \text{ ist.}$$

(H.F.)

II. Problem eines Gärtners



Ein rechteckiger Rasen soll so angelegt werden, dass er von einem Pfad der Breite $1m$ vollständig umgeben ist, und dass gilt:

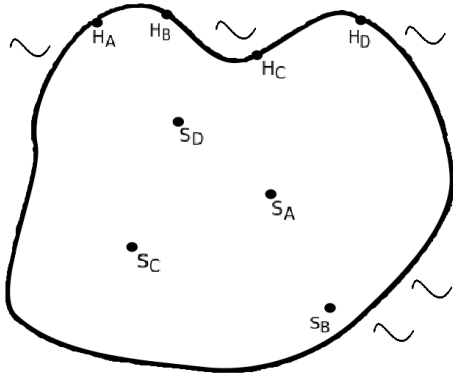
Die Seiten des Rasens haben ganzzahlige Längen x, y und die Flächen des Rasens und des Pfades sind gleich groß.

Wie sind die Abmessungen x und y des Rasens zu wählen?

Hinweis: Zeige zunächst, dass die kürzere Seite des Rasens kürzer als $5m$ ist.

(H.F.)

III. Ein Schulwegproblem



Vier Kinder Anna, Bernd, Cynthia und Dennis – die jeweils in einem der Häuser H_A, H_B, H_C, H_D wohnen – besuchen die Schulen S_A, S_B, S_C, S_D auf derselben Insel. Kann jedes der Kinder zu seiner Schule gelangen, ohne dass sich sein Schulweg mit dem eines anderen Kindes kreuzt? Wenn ja, zeichne eine mögliche Lösung ein.

(H.F.)

IV. selbstgemachte Kürzungsregel

Hans hat im Unterricht mal wieder geträumt, während der Lehrer das Kürzen erklärt hat. Da er aber ein pfiffiger Schüler ist, hat er kurzerhand eine eigene Regel aufgestellt:

$$\text{z.B.: } \frac{1 \cancel{0}}{\cancel{0}5} = \frac{1}{5} \text{ oder } \frac{1 \cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

„Nicht schlecht“, meint sein Lehrer, „funktioniert aber leider nicht immer. Bis zur nächsten Stunde suchst du noch zwei weitere Brüche, die man auf diese Weise „kürzen“ kann.“

(Christoph Sievert)

V. Buchstabenrätsel

$$\begin{array}{r} \text{ABCDE} \cdot 4 \\ \hline \text{EDCBA} \end{array}$$

Ersetze jeden Buchstaben durch eine Ziffer, so dass eine korrekte Multiplikation entsteht (jedoch sei $A \neq 0$). Gleichen (verschiedenen) Buchstaben sind dabei gleiche (verschiedene) Ziffern zuzuordnen. (H.F.)

VI. Weiß liegt oben

Ein großer Holzwürfel wird von außen weiß angemalt und dann in 64 gleich große Würfel zerlegt. Man wählt – ohne hinzusehen – einen der kleinen Würfel und würfelt einmal damit.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine oben liegende Fläche weiß ist?

Bemerkung: Die innenliegenden Schnittflächen sind holzfarben, also nicht weiß. (H.F.)

VII. Eine Frage der Teilbarkeit

Keine Zahl $n^2 + 1, n = 1, 2, 3, \dots$ ist durch 3 oder durch 4 teilbar. Trifft das zu? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1225: Eine Ungleichung mit dem Logarithmus

Finde die kleinste Zahl c derart, dass $\log(1 + 10^x) \leq x + c$ für alle $x \geq 0$. (WJB)

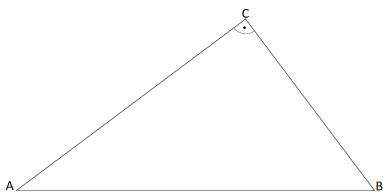
Aufgabe 1226: Pizza gerecht teilen

a) Anton hat einen Austauschschüler, Enrico aus Neapel, zu Gast. Am letzten Tag seines Aufenthaltes backt dieser eine Pizza auf einem quadratischen Blech. Dazu erwartet Anton 10 weitere Gäste.

Wie kann Enrico die Pizza so teilen, dass jeder Anwesende nicht nur ein gleich großes Stück bekommt, sondern auch gleich viel vom Rand?

b) Zeige: Für jedes $n = 3, 4, \dots$ lässt sich ein Quadrat mit Hilfe gerader Linien in n Teile so zerlegen, dass jedes Teil die gleiche Fläche besitzt und den gleichen Anteil des Randes des Quadrats. (WJB)

Aufgabe 1227: Pythagoras denkt auch noch nach...



In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 77 cm lang.

Wie lang sind die beiden anderen Seiten, wenn alle Seitenlängen natürliche Maßzahlen haben?

Hinweis: Es gibt vier Lösungen.

(Christoph Sievert)

Aufgabe 1228: Kantenzahlen eines Polyeders

Ein durch ebene Vielecke begrenzter Körper heißt ein Polyeder. Begründe: Unter den Seitenflächen jedes Polyeders sind zwei mit der gleichen Kantenzahl. (H.F.)

Aufgabe 1229: Wo liegt der Fehler?

Wie heißt die größte der natürlichen Zahlen $n \geq 1$?

Da im Allgemeinen für jede natürliche Zahl n das Quadrat n^2 größer als n ist, muss die größte Zahl N unter den Zahlen n aus logischen Gründen die Eigenschaft haben, dass ihr Quadrat N^2 nicht größer als N sein kann, dass also $N^2 \leq N$ gilt.

Diese Ungleichung trifft nur für $N = 1$ zu.

Mithin ist 1 die größte natürliche Zahl!

Wo liegt der Fehler?

(H.F.)

Aufgabe 1230: Einige Eigenschaft von Primzahl-Zwillingen

Es seien p und q Primzahl-Zwillinge mit $3 < p < q$. Dann gilt: 6 ist Teiler von $q + p$, 12 ist Teiler von $q^2 - p^2$, 18 ist Teiler von $q^3 + p^3$. Zeige dies. (H.F.)

Aufgabe 1231: Teilbarkeitsproblem

- a) Die Zahl $n = 131313\dots131$ mit 2018^{10} Zifferpaaren 13 gefolgt von der Ziffer 1 ist nicht durch 31 teilbar. Zeige dies.
Hinweis: Die Zahl ist $2 \cdot 2018^{10} + 1$ -ziffrig gewählt, damit es kaum möglich ist, die Lösung durch numerische Division $n : 31$ zu suchen.
- b) Könnte man die Aufgabe auch statt mit einem konkreten n auch mit einem $2k$ -ziffrigem n , k beliebig, stellen? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 135

Klassen 9–13

Aufgabe 1218: Größte Zahl

Welches ist die größte ganze n -ziffrige Zahl, die eine n -te Potenz ist? (H.F.)

Lösung:

Es sei $z = a^n$ die gesuchte Zahl, a eine positive ganze Zahl. Nach Voraussetzung gilt: $10^{n-1} \leq a^n < 10^n$. Danach ist $a = 9$ – wäre nämlich $a \geq 10$, so wäre $a^n \geq 10^n$. Aus $10^{n-1} < 9^n$ erhält man mit einem Taschenrechner einen Anhaltspunkt für die Größe von n . Es ist $n \leq 21$, denn $\frac{10^{n-1}}{9^{n-1}} < 9$ gilt für $n-1 = 1, 2, 3, \dots, 20$. Tatsächlich ist $9^{21} \approx 1,1 \cdot 10^{20}$, während $9^{22} \approx 9,8 \cdot 10^{20}$, so dass 9^{22} 21-ziffrig ist. Folglich ist $z = 9^{21}$ die gesuchte Zahl.

Aufgabe 1219: Nullstellen

Wenn ich Dir verrate, dass das Polynom $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 2$ zwei Nullstellen x_1, x_2 hat mit $x_2 = \frac{1}{x_1}$, kannst Du dann alle Nullstellen von f bestimmen? (WJB)

Lösung:

Ist x einer der Werte x_1, x_2 , so gilt nicht nur $f(x) = 0$, sondern auch $f(\frac{1}{x}) = 0$ und deshalb $g(x) = x^4 f(\frac{1}{x}) = 0$, also

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 2 = 0 \text{ und}$$

$$g(x) = -2x^4 + 8x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$$

und deshalb $2f(x) + g(x) = -3x^2 + 12x - 3 = 0$.

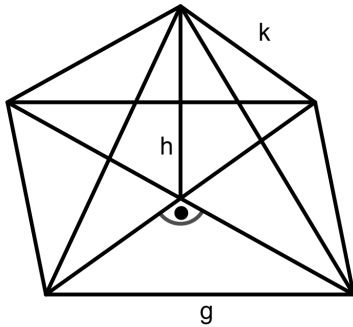
Wir definieren $h(x) = \frac{-2f(x) - g(x)}{3} = x^2 - 4x + 1$. $h(x)$ hat die Nullstellen $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$. Wir bemerken, dass $x_1 \cdot x_2 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$, also tatsächlich $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Ist x keine der Nullstellen x_1, x_2 , so dürfen wir $f(x)$ durch $h(x)$ dividieren:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = (x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 2) : (x^2 - 4x + 1) = x^2 - 2$$

Dies ergibt die beiden weiteren Nullstellen $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$.

Aufgabe 1220: Eine besondere Pyramide

In einer quadratischen senkrechten Pyramide seien g, k und h die Längen der Grundseiten, der Seitenkanten und der Höhe.



- Können in einer solchen Pyramide h, g und k (in dieser Reihenfolge) aufeinander folgende natürliche Zahlen sein? Wenn ja, welches sind diese natürlichen Zahlen?
- Können h, g und k in beliebiger Reihenfolge aufeinander folgende ganze Zahlen sein?

(H.F.)

Lösung:

- Mit den Bezeichnungen der Figur gilt: $k^2 = h^2 + (\text{halbe Diagonale})^2$, $g^2 = 2 \cdot (\text{halbe Diagonale})^2 \implies h^2 + \frac{1}{2}g^2 = k^2$. Wegen $h = g - 1$ und $k = g + 1$ folgt:

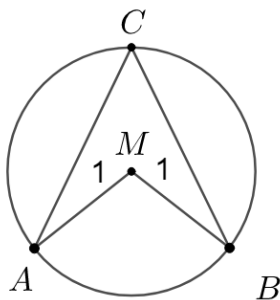
$$(g - 1)^2 + \frac{1}{2}g^2 = (g + 1)^2 \implies g = 8, h = 7, k = 9.$$

- Man betrachte nach obigem Muster die sechs Fälle:

$$g < h < k, g < k < h, h < g < k, h < k < g, k < h < g, k < g < h.$$

Ergebnis: Sie ergeben nur im oben untersuchten Fall $h < g < k$ eine Lösung.

Aufgabe 1221: Ein Keil im Kreis



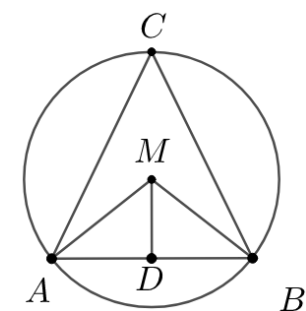
Im Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = 1$ sei der „Keil“ $AMBC$ mit den gleichlangen Seiten AC und BC und einem Winkel von 270° beim Punkt M gegeben. Welchen Flächeninhalt F hat der Keil?

(H.F.)

Lösung:

In die gegebene Figur zeichne man die Hilfslinien AB und MD mit $MD \perp AB$ ein.

$$(1) F = |ABC| - |ABM|.$$



Weiter ist:

$$|ABC| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DM + MC| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und mithin gilt mit (1) $F = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Aufgabe 1222: Beim Familientreffen

Bei einem Familientreffen begrüßt jeder Teilnehmer jeden anderen Teilnehmer mit Handschlag.

Wenn man nun jemanden, der bereits ungeradzahlig vielen Personen die Hand gegeben hat, als eine u -Person, alle anderen Teilnehmer als v -Personen bezeichnet, dann gilt:

(*) Zu jedem Zeitpunkt ist die Anzahl der u -Personen gerade.

Trifft das zu?

(H.F.)

Lösung:

Nach jeder Begrüßung ist aus einer u -Person eine v -Person geworden und umgekehrt. Mit U_i und $|U_i|$ seien die Menge der u -Personen und deren Anzahl zu einem bestimmten Zeitpunkt bezeichnet. Wenn sich dann zwei weitere Personen begrüßen, ändert sich dadurch $|U_i|$ so:

Bei zwei u -Personen wird $|U_i|$ um 2 vermindert und bei zwei v -Personen um 2 vergrößert; im Fall einer u -Person und einer v -Person bleibt $|U_i|$ unverändert. Für die Anzahl $|U_{i+1}|$ von u -Personen in der neuen Menge U_{i+1} gilt daher

(**) $|U_{i+1}| = |U_i| + k$ mit $k = -2$ oder $k = +2$ oder $k = 0$.

Es sei nun $U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \dots$ die Kette der Menschen aus u -Personen, die schrittweise durch die Begrüßung jeweils zweier Personen entsteht. Da die Anzahlen der u -Personen in den Mengen U_i sich nach dem invarianten Muster aus (**) verändern gilt:

Aus $|U_0| = 0$ folgt mit (**) die Behauptung (*).

Aufgabe 1223: Nur Ziffern 1 und 2

Auf wie viele Arten kann man eine natürliche Zahl n als eine Summe aus den Zahlen 1 und/oder 2 schreiben, wenn es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt und $1 = 1$, $2 = 2$ als Summendarstellung für $n = 1$ und $n = 2$ gelten?

(H.F.)

Lösung:

$A(n)$ sei in Abhängigkeit von n die Anzahl der möglichen additiven Zerlegungen von n . Es sei $n = 2p + r$ mit $r = 0$ oder $r = 1$ und einer natürlichen Zahl p . Dann ist $n - r = 2p$ eine gerade Zahl. Wenn man nun $2p$ in Summanden 1 und/oder 2 zerlegt, dann kann die Anzahl der dabei auftretenden Zahlen 2 nur 0, 1, 2, ... oder p sein.

Daher gilt:

$$A(n) = p + 1 = \frac{1}{2}(n - r) + 1$$

mit $r = 1$ für ungerades n und $r = 0$ für gerades n . Setzt man daher $r = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$, so folgt:

$$A(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{2} - \frac{1 - (-1)^n}{2} \right) + \frac{4}{4} = \frac{2n + 3 + (-1)^n}{4}, n \geq 1.$$

Aufgabe 1224: Teiler einer Fakultät

Es sei $n > 1$ eine ganze Zahl, die keine Primzahl ist. Dann gilt für jedes solche n : Die Zahl $(n - 1)!$ ist ohne Rest durch n teilbar. Dabei ist $(n - 1)!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1)$. Stimmt diese Behauptung? (H.F.)

Lösung:

Die Behauptung ist falsch, denn für $n = 4$ ist $(n - 1)! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ nicht durch $n = 4$ teilbar.

Bemerkung: Da n keine Primzahl ist, gibt es zwei ganze Zahlen g und h mit $2 \leq g < n - 1$ und $2 \leq h < n - 1$, so dass $n = g \cdot h$ ist.

Falls $g \neq h$ ist, dann sind wegen $g < n - 1$ und $h < n - 1$ die Zahlen g und h und damit auch $n = g \cdot h$ Teiler von $(n - 1)!$.

Falls $g = h$ und $g > 2$ ist, dann gilt wegen $g^2 > 2g$ für $g > 2$, dass $n = g^2 > 2g$ ist. Daraus folgt: $n - 1 \geq 2g > g$. Mithin sind g und $2g$ und somit auch $n = g \cdot g$ Teiler von $(n - 1)!$.

Falls $g = h = 2$ ist, dann ist $n = 4$ kein Teiler von $(n - 1)! = 3! = 6$.

Die Behauptung trifft also zu für jede nicht prime ganze Zahl ≥ 6 .

Die Formeln von Vieta und die Markovgleichung

von Manfred Lehn

Zwischen den Nullstellen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ und den Koeffizienten a, b bestehen die Relationen $-a = x_1 + x_2$ und $b = x_1 x_2$, wie man an der Identität $x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$ durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich sieht. Traditionell nennt man die Relationen $x_1 + x_2 = -a$

und $x_1 x_2 = b$ die Vietaschen Formeln nach dem französischen Mathematiker François Viète in einer latinisierten Version seines Namens. Daraus ergibt sich aber sofort die Folgerung, dass man zur Bestimmung der zweiten Lösung einer quadratischen Gleichung keine Wurzeln ziehen muss, wenn man schon eine Lösung x_1 kennt. Man rechnet nämlich $x_2 = -a - x_1$ oder $x_2 = b/x_1$ je nachdem, was bequemer ist. Für die zweite Option darf natürlich x_1 nicht verschwinden. Dieses simple Prinzip wollen wir zur Lösung der sogenannten Markovgleichung verwenden. Bei seinen zahlentheoretischen Untersuchungen über Kettenbrüche und sogenannte quadratische Formen in zwei Unbestimmten wurde der russische Mathematiker Andrei Andrejewitsch Markow auf die folgende Gleichung geführt,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (1)$$

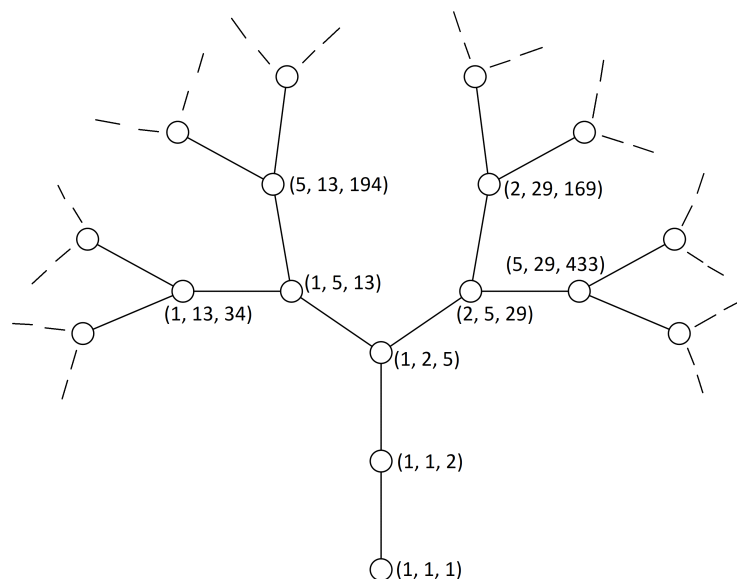
für die wir Lösungen in positiven ganzen Zahlen suchen. Die Arbeit von Markow erschien 1880 auf französisch in der deutschen Zeitschrift *Mathematische Annalen*. Deshalb erscheint der Name des Autors oft in der früher üblichen Transkription Markoff. In der Fachliteratur schreibt man meist wie im Englischen Markov. Seitdem taucht die Markovgleichung immer wieder in ganz unterschiedlichen mathematischen Kontexten auf. Viel bekannter ist Markow aber für seine Arbeiten zur Stochastik. Unter anderem sind sogenannte Markovprozesse und Markovketten nach ihm benannt. Sein Sohn mit identischem Namen war ein sehr bekannter Logiker.

Hier soll es aber nur um die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ gehen. Wir schreiben Lösungen der Markovgleichung als Tripel (x, y, z) . Eine Lösung springt sofort ins Auge, nämlich $(1, 1, 1)$, und nach kurzem Probieren findet man auch $(1, 1, 2)$. Mit einer Lösung (x, y, z) ist natürlich auch jedes Tripel, das durch beliebige Vertauschung der Komponenten entsteht, wieder eine Lösung. Wir wollen solche Lösungen aber nicht als verschieden betrachten. Natürliche Fragen sind: Gibt es andere Lösungen? Wenn ja, wieviele? Und wie kann man sie alle finden? Hier kommen die Vietaschen Formeln ins Spiel.

Nehmen wir an, wir haben eine Lösung $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 3x_1 y_1 z_1$. Offenbar ist x_1 eine Lösung der quadratischen Gleichung $X^2 - 3y_1 z_1 X + (y_1^2 + z_1^2) = 0$ in der Variablen X . Nach den Vietaschen Formeln ist $x_2 = 3y_1 z_1 - x_1$ eine andere Lösung der quadratischen Gleichung, und zwar wieder eine ganzzahlige! Anders gesagt: Ist (x_1, y_1, z_1) eine Lösung der Markovgleichung, so auch $(3y_1 z_1 - x_1, y_1, z_1)$. Dasselbe Argument funktioniert aber auch mit y_1 oder z_1 in der Rolle von x_1 . Demnach sind auch $(x_1, 3x_1 z_1 - y_1, z_1)$ und $(x_1, y_1, 3x_1 y_1 - z_1)$ Lösungen. Startet man zum Beispiel mit der Lösung $(2, 5, 29)$ (nachrechnen!), so findet man auf diese Weise drei neue Lösungen $(433, 5, 29)$, $(2, 169, 29)$ und $(2, 5, 1)$. Die Operation $x_1 \mapsto 3y_1 z_1 - x_1$ verhält sich wie eine Spiegelung: Wendet man sie zweimal hintereinander an, so kommt man zur Ausgangslösung zurück (nachrechnen!). Wir wollen deshalb diesen Prozeß der bequemen Sprechweise halber eine Spiegelung an x_1 nennen.

Wir können jetzt systematisch vorgehen und mit der Basislösung $(1, 1, 1)$ begin-

nend nach und nach iterativ neue Lösungen produzieren. Im folgenden Graphen steht jede Ecke für eine Lösung, und zwei Ecken sind durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Lösungen durch eine Spiegelung im obigen Sinne auseinander hervorgehen.



Bei der Betrachtung dieses Markovgraphen stellen sich sofort eine Reihe von Fragen:

1. Es sieht so aus, als würden in allen Ecken des Graphen außer $(1, 1, 1)$ und $(1, 1, 2)$ drei Kanten zusammenkommen. Solche Ecken nennt man trivalent. Aber stimmt die Beobachtung? Sind alle Ecken außer $(1, 1, 1)$ und $(1, 1, 2)$ trivalent?
2. Es sieht auch so aus, als könne es im Graphen keine geschlossenen Wege geben, also Wege, bei denen man zur Ausgangsecke zurückkommt, aber unterwegs keine Kante zweimal durchläuft. Zusammenhängende Graphen ohne geschlossene Wege nennt man Bäume. Aber ist unser Markovgraph wirklich ein Baum? Oder ist das nur ein falscher Eindruck, weil der gezeichnete Ausschnitt zu klein ist?
3. Und ist der Graph zusammenhängend oder besteht er aus mehreren getrennten Teilgraphen? Anders gesagt: Kommt man durch fortgesetztes Spiegeln ausgehend von einer Lösung der Markovgleichung zu jeder anderen?

Die Antwort auf die dritte Frage lautet jedenfalls: ja! Wir beweisen nämlich den folgenden Satz: Von jeder Lösung kommt man durch wiederholtes Spiegeln in endlich vielen Schritten zur Basislösung $(1, 1, 1)$.

Die grobe Beweisidee ist einfach: Wir geben uns eine Lösung vor, etwa (x, y, z) und nehmen ohne Einschränkung an, dass das Tripel geordnet ist, also $x \geq y \geq z \geq 1$. Wir wenden dann unsere Spiegelung auf den größten Eintrag an, also x , in der

Hoffnung, dass die neue Lösung $(3yz - x, y, z)$ in einem zu präzisierenden Sinne kleiner ist als die alte Lösung (x, y, z) . Machen wir uns an die Ausführung:

Falls $x = y = z$, so reduziert sich die Markovgleichung auf $3x^2 = 3x^3$ mit der eindeutigen Lösung $x = y = z = 1$. In allen anderen Fällen ist $x > z$. Daraus folgt $3x^2 = x^2 + x^2 + x^2 > x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Wir kürzen $3x$ und bekommen die strengere Ungleichung $x > yz$. Nun sind die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $X^2 + y^2 + z^2 = 3Xyz$ durch

$$\frac{3}{2}yz \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}yz\right)^2 - (y^2 + z^2)}$$

gegeben. Diese stimmen mit x und $x' = 3yz - x$ überein, nur dass noch unklar, ist, welches Vorzeichen zu x bzw. zu x' gehört. Wir wollen zeigen, dass $x' < x$. Andernfalls ist $x \leq x'$ und

$$x = \frac{3}{2}yz - \sqrt{\left(\frac{3}{2}yz\right)^2 - (y^2 + z^2)}.$$

Wegen $x > yz$ führt dies auf die Ungleichung

$$\frac{1}{2}yz > \sqrt{\left(\frac{3}{2}yz\right)^2 - (y^2 + z^2)}.$$

Wir quadrieren, multiplizieren aus und sammeln alle Terme auf einer Seite:

$$0 > 2y^2z^2 - y^2 - z^2.$$

Die rechte Seite kann man auch in die Form $y^2(z^2 - 1) + z^2(y^2 - 1)$ bringen. Da y und z positive ganze Zahlen sind, ist dieser Ausdruck sicherlich ≥ 0 . Widerspruch! Die Annahme über x war also falsch, und es gilt umgekehrt

$$x' = \frac{3}{2}yz - \sqrt{\left(\frac{3}{2}yz\right)^2 - (y^2 + z^2)} < \frac{3}{2}yz + \sqrt{\left(\frac{3}{2}yz\right)^2 - (y^2 + z^2)} = x.$$

Die neue Lösung (x', y, z) der Markovgleichung ist in dem Sinne kleiner als die Lösung (x, y, z) , dass $x' + y + z < x + y + z$. Weil $x + y + z$ in jedem Falle eine positive ganze Zahl ist, kann man diesen Schritt nur endlich oft durchführen, bevor der Prozess abbricht, weil man auf die Basislösung gestoßen ist.

Ich möchte zum Schluss auf die Aufgabe für den Computerfan in M134 zurückkommen, die aus den Klausuraufgaben der Internationalen Mathematikolympiade 1988 stammt und als sehr schwer galt:

Können Sie mit einer ähnlichen Strategie wie in unserer Behandlung der Markovgleichung den Beweis führen? Können Sie die obigen Fragen 1 und 2 beantworten?

Mathematische Entdeckungen

1. Mathematische Entdeckungen am Markov-Graphen zur Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Zeige:

- $(1, 1, 1)$ und $(1, 1, 2)$ sind die einzigen Lösungen der Markovgleichung, bei denen zwei Komponenten gleich sind.
- Es gibt keine Lösung (x, y, z) der Markovgleichung, die unter einer Spiegelung unverändert bleibt.
- Es sei (x, y, z) eine Lösung der Markovgleichung mit paarweise verschiedenen Komponenten x , y und z . Dann sind alle Lösungen (x', y, z) , (x, y', z) und (x, y, z') , die durch Spiegelungen entstehen, untereinander und von (x, y, z) verschieden.
- Es gibt keine Ecke des Markovgraphen, die unter Spiegelung in sich übergeht, keine univalente Ecke außer $(1, 1, 1)$ und keine bivalente Ecke außer $(1, 1, 2)$.
- Der Markovgraph ist ein Baum, d.h. er enthält keine geschlossenen Wege.
(M.L.)

2. Mathematische Entdeckungen an der Gleichung $x^2 + y^2 = m(1 + xy)$

Erstelle den zugehörigen Markov-Graphen. Gib hiermit (oder anders) einen Beweis für die Computerfan-Aufgabe aus MONOID134 an.

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2019 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 134

In Heft 134 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Besondere Darstellung der Zahl 2018

Man kann die Zahl 2018 nur mit der Zahl 2 oder nur mit 3 oder nur mit 4, nur mit 5,... oder nur mit 10 sowie den arithmetischen Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\uparrow$ („hoch“) und mit Klammern schreiben.

Beispiel:

$$2018 = (2 \uparrow 2 \cdot 2) \cdot ((2 \uparrow 2 \cdot 2 \cdot 2) : 2 - 2) + 2 \text{ mit } A(2) = 10.$$

$$2018 = (3 - 3 : 3) \cdot ((3 \cdot 3 + 3 : 3) \uparrow 3 + 3 \cdot 3) \text{ mit } A(3) = 10.$$

Dabei bezeichnen $A(2)$, $A(3)$, ... die Anzahl der Zweien, der Dreien, ... in der Darstellung von 2018.

Versuche nun Darstellungen der Zahl mit den Zahlen 2, mit 3,..., mit 10 zu finden, wobei die Anzahlen $A(2)$, $A(3)$, ... möglichst klein sein sollten. (H.F.)

mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt:

Maximilian Göbel, Internatsschule Schloss Hansenberg, Jannik Spitzley, Kurfürst Balduin-Gymnasium Münstermaifeld.

Sie fanden die folgenden Anzahlen:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(n)$	8	10	8	12	13	11	11	12	10

Die zugehörigen Kombinationen:

$$2018 = ((2 + 2)^{(2+2)} - 2 \cdot 2) \cdot 2^2 \cdot 2 + 2$$

$$2018 = \frac{(((3+3)^3 + 3 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 3 - 3)}{3} - 3$$

$$2018 = (4^4 - 4) \cdot (4 + 4) + \frac{(4+4)}{4}$$

$$2018 = \frac{\frac{(5+5)^5}{5}}{(5+5)} + 5 \cdot 5 - 5 - \frac{(5+5)}{5}$$

$$2018 = \frac{((((\frac{(6+6)}{6})^6 - 6) \cdot 6 - 6 - 6) \cdot 6 \cdot 6 + 6 + 6)}{6}$$

$$2018 = \frac{((((7 \cdot 7 - 7) \cdot 7 - 7) \cdot 7 + 7) \cdot 7 + 7 + 7)}{7}$$

$$2018 = \frac{(8 \cdot 8 \cdot 8 - 8) \cdot 8 \cdot 8}{(8+8) + \frac{(8+8)}{8}}$$

$$2018 = (9 + 9 + 9 - \frac{(9+9)}{9}) \cdot 9 \cdot 9 - 9 + \frac{(9+9)}{9}$$

$$2018 = \frac{(((10+10) \cdot 10 \cdot 10 + 10 + 10) \cdot 10 - 10 - 10)}{10}$$

Georg Cantor
Zum hundertsten Todestag
am 6. Januar 2018.
 von Hans-Jürgen Schuh

Die Unendlichkeit hat die Menschen schon immer fasziniert. Stets war der Wunsch nach dem ewigen Leben vorhanden: wenn es hier auf der Erde nicht möglich ist, dann nach einer Wiederauferstehung nach dem Tode.

In der Mathematik hat die Unendlichkeit lange ein Schattendasein geführt. Georg Cantor war der Erste, der die Unendlichkeit quantifizierte und uns gelehrt hat, wie man mit Unendlichkeiten rechnet. Die von ihm geschaffene Mengenlehre ist heute eine selbstverständliche Grundlage der modernen Mathematik. Ohne seine Theorien zur Unendlichkeit ist die Mathematik, wie wir sie heute kennen, unvorstellbar. Georg Cantor ist einer der einflussreichsten Mathematiker des 19. Jahrhunderts.

David Hilbert hat in einem Brief nach Cantors Tod geschrieben:

„...An Originalität und Kühnheit der Gedanken ist er [Georg Cantor] von keinem Mathematiker aller Zeiten – von Euklid bis Einstein – übertroffen worden; er schuf etwas ganz Neues, wovon noch Nichts vorhanden war, die Mengentheorie, deren Begriffsbildungen und Anwendungen in allen Gebieten der Mathematik schon jetzt Gemeingut aller Mathematiker geworden ist, obwohl ich glaube, dass gerade die tiefsten Gedanken seiner Lehre erst noch in den späteren Jahrzehnten zur vollen Auswirkung gelangen werden.“

Georg Cantor wurde am 3. März 1845 in St. Petersburg geboren. Als Junge besuchte er mit seiner Mutter oft den Winterpalast des Zaren, wo zwei seiner Tanten Kammerjungfern gewesen sind. Sein Urgroßvater organisierte am Hofe Tischgesellschaften mit bis zu 3.000 Leuten. Der Großvater Franz Ludwig Böhm war Kapellmeister an der kaiserlichen Oper in St. Petersburg. Er hat dem jungen Nikolai I. das Geigenspiel beigebracht.

Über die Herkunft des Vaters Georg Woldemar Cantor ist nur wenig bekannt. Seine Familie stammte aus Kopenhagen. In den 1840er Jahren war er zunächst einer der ärmsten Makler, wurde dann aber zu einem der reichsten in St. Petersburg. Woldemar Cantor hat einen Artikel über Behandlungsmöglichkeiten bei Tuberkulose in der medizinischen Zeitung St. Petersburgs auf Deutsch veröffentlicht. Es ist nicht bekannt, wo er seine Bildung erhalten hat.

Im Jahre 1856 übersiedelte die Familie nach Deutschland und ließ sich in Frankfurt am Main nieder. Der Vater hatte sich wegen eines Lungenleidens von seinen Geschäften zurückgezogen und lebte mit der Familie von seinem Vermögen. Georg Cantor war damals 11 Jahre alt. Er hat dann die Realschule besucht. Der Vater wollte, dass sein Sohn Ingenieur würde, aber Georgs Berufswunsch war, ein Mathematiker zu werden. Irgendwann hat ihm dann sein Vater erlaubt, Mathematik zu studieren.

Im Herbst 1862 begann Georg Cantor das Studium an der Universität Zürich. Dort ist er kaum mit der modernen mathematischen Forschung in Berührung gekommen. Im Frühsommer 1863 erlag Cantors Vater seinem langjährigen Leiden. Cantor unterbrach sein Studium für ein Semester, ging danach jedoch nicht nach Zürich zurück, sondern setzte seine Studien in Berlin fort, wohin seine Mutter übergesiedelt war. Berlin war damals das Weltzentrum der Mathematik mit den drei Mathematikprofessoren von Weltruf: Ernst Eduard Kummer, Leopold Kronecker und Karl Weierstraß. Nach weiteren vier Jahren hat Georg Cantor 1867 bei Kummer als Erstgutachter und Weierstraß als Zweitgutachter promoviert.

Er hat dann zunächst, aber nur sehr kurz, an einem Gymnasium unterrichtet. Alle möglichen späteren berühmten Mathematiker haben das auch getan. Er hat dann aber eine Lehrerausbildungsinstitution verlassen, weil er eine Möglichkeit sah, sich in Halle an der Saale zu habilitieren und ein Extraordinariat zu bekommen.

So kam der 24jährige Cantor im Jahre 1869 nach Halle, um dort sein wissenschaft-

liches Leben an der Universität Halle zu beginnen. Er blieb über 40 Jahre Mitglied der Universität Halle. Wenn man ein Extraordinarius war, durfte man zwar den Titel eines Professors führen, wurde aber nicht unbedingt bezahlt. Genau das passierte Cantor. Er fühlte sich deshalb zu Recht schlecht behandelt. Nach zwei Jahren hat er seinen Rücktritt eingereicht, worauf ihm ein Gehalt bewilligt wurde. Im Jahr 1874 hat Georg Cantor Wally Guttman, die beste Freundin seiner Schwester Sophie, geheiratet. Im selben Jahr erschien die erste Veröffentlichung zu seiner Mengenlehre.

Nach Cantor ist eine Menge „die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“ Beispiele sind endliche Mengen wie $A = \{1, 3, 5\} (= \{5, 1, 3\} = \{1, 1, 1, 3, 3, 5\})$, $B = \{4\} (\neq 4)$, $C = \{ \} =: \emptyset$ (leere Menge).

Cantor hat den Begriff der unendlichen Menge in die Mengenlehre eingebracht. Eine naheliegende unendliche Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die durch das Weiterzählen entsteht.

Beginnt man das Zählen mit der 0, so schreibt man $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Um Mengen miteinander vergleichen zu können, hat Cantor das Konzept der Eins-zu-Eins-Beziehung eingeführt. Zwei Mengen sind gleich mächtig, wenn ihre Elemente in eine Eins-zu-Eins-Beziehung gesetzt werden können.

Für endliche Mengen bedeutet dies, dass sie gleich viele Elemente besitzen:

$|A| = |\{1, 3, 5\}| = |\{6, 7, 8\}| = 3$; $|B| = 1$; $|\emptyset| = 0$.

Für unendliche Mengen findet man stets eine echte Teilmenge, die zur ursprünglichen Menge gleich mächtig ist. So ist zum Beispiel $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, aber beide Mengen sind gleich mächtig, da zum Beispiel die Zuordnung $1 \leftrightarrow 0, 2 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow 2, \dots$ usw. besteht, das heißt $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0| =: \aleph_0$ (Alef Null).

Jede zu $\mathbb{N}$ gleichmächtige Menge nennt man abzählbar. Eine weitere abzählbare Menge bilden die rationalen Zahlen (gemeine Brüche), was man zunächst nicht erwartet. Cantor konnte die Brüche mit Hilfe eines geschickten Diagonalverfahrens abzählen.

Unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind, heißen überabzählbar. Cantor zeigte, dass man die Elemente des Kontinuums $[0, 1]$, das heißt alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1, nicht abzählen kann, also $|[0, 1]| > \aleph_0$.

Richard Dedekind war ein wichtiger Briefpartner und Freund bei Cantors ersten Arbeiten über die Mengenlehre. Er hat an ihn geschrieben: „...solange du nicht zustimmst, kann ich nur sagen, ich sehe es, aber ich glaube es nicht.“

1879 erhielt Cantor die Stelle eines ordentlichen Professors in Halle.

Sein Traum war es, wieder nach Berlin zu gehen, was leider durch sein falsches Taktieren, besonders aber durch Kroneckers Ablehnung seiner Arbeiten vereitelt wurde.

In den 1880er Jahren ist Cantors Verhältnis zu Kronecker extrem schlecht geworden. Dies thematisierte er auch in einem Brief an den schwedischen Mathematiker

Gösta Mittag-Leffler. Dieser war einer der wenigen, die eindeutig auf Cantors Seite standen. Cantor und Mittag-Leffler kannten sich von ihrem gemeinsamen Studium in Berlin, wo sie beide Weierstraß als Lehrer hatten. Ihre enge Beziehung hielt viele Jahre. Mittag-Leffler war der Begründer und Herausgeber der sehr wichtigen mathematischen Fachzeitschrift „Acta Mathematica“ (ab 1882). Bereits in seiner zweiten Ausgabe 1883 veröffentlichte er 7 Abhandlungen Cantors über die Mengenlehre. Die Veröffentlichungen in der „Acta Mathematica“ halfen Cantor wesentlich dabei, sich einen Namen zu machen.

Im Jahr 1885 legte Cantor eine Arbeit vor, die nach Meinung Mittag-Lefflers für eine mathematische Fachzeitschrift viel zu philosophisch war. Also entschied er sich, diese Arbeit nicht zu veröffentlichen. Er schrieb an Cantor einen sehr freundlichen Brief, dass er befürchte, dass diese Arbeit von der mathematischen Gemeinschaft herabgewürdigt würde. Schließlich bemerkte er, dass diese Arbeit 100 Jahre zu früh käme. Daran zerbrach dann ihre Freundschaft. Cantor hat daraufhin jahrelang nichts mehr in mathematischen Fachzeitschriften veröffentlicht.

Georg Cantors Leben wurde in den letzten Jahrzehnten durch eine psychische Erkrankung überschattet. Das machte sich bereits Ende des 19. Jahrhunderts bemerkbar, und zwar war er manisch depressiv.

Seine nächste große Aktivität war die Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) 1890 in Bremen. Er wollte eine solche Vereinigung gegen jedes „Papsttum“ in der Wissenschaft gründen. Der erste Vorsitzende wurde natürlich Cantor. Die anfängliche Mitgliederzahl war 31, heute hat die DMV etwa 4.500 Mitglieder. Der höchste Preis, der von der DMV vergeben wird, ist die Cantor-Medaille. Mit ihr werden Mathematiker für ihr Lebenswerk geehrt.

Georg Cantor erkannte schon früh die Antinomien, die bei einem naiven Umgang mit der Mengenlehre auftreten. So zum Beispiel, dass alle Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten, nicht zu einer Menge zusammengefasst werden können, weil dies zu Widersprüchen führt. Hierzu sei auf das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel hingewiesen.

Cantors letzte Jahre waren durch seine Krankheit überschattet, die ihn zwang, viel Zeit in der Klinik und nicht bei seiner Familie zu verbringen. Am 6. Januar wurde ein Kranz zu seinem 100. Todestag an seinem Grab in Halle, Friedhof Giebichen, niedergelegt.

Sein schönstes Wort über die Mathematik war: „Das Wesen der Mathematik besteht gerade in ihrer Freiheit.“

Literatur: Georg Cantor, Vita Matematica, Birkhäuser. ISBN 3-7643-1770-1,
Film des MDR: Georg Cantor – Entdecker der Unendlichkeiten.

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 3

Magische Zielscheibe

Die vier Kreisringe enthalten die 16 lückenlos aufeinander folgenden Zahlen von 497 bis 512 mit der Summe $\frac{1}{2} \cdot 2018$. Die Summe der jeweils in Pfeilrichtung zu sehenden Zahlen zusammen mit 1 ist 2019.

Eine Summe zum Jahr 2019

$$\begin{aligned} \frac{1}{2019} + \frac{\frac{2019}{2018 \cdot 2020}}{\frac{1}{2019(2019^2 - 1)}} &= \frac{2019}{2019^2 - 1} \text{ und} \\ &= \frac{1}{2019} \left(1 + \frac{1}{2019^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2019} \cdot \frac{2019^2}{2019^2 - 1} = \frac{2019}{2019^2 - 1} \end{aligned}$$

Die Gleichung ist somit korrekt.

Jahreszahl 2019

Es ist $N = 1000a + 100b + 10c + d$. Durch die ausgeführten Rechnungen erhält man die Gleichung: $(1000a + 100b + 10c + d) - (100a + 10b + c) + (10a + b) - a = 2019$
Es gilt also:

$$N_1 = 909a + 91b + 9c + d = 2019 \Rightarrow a \leq 2, \text{ denn für } a > 2 \text{ wäre } N_1 > 2019.$$

$$\text{Ist } a = 1, \text{ so ist } N_1 \leq 909 + 100 \cdot 9 + 10 \cdot 9 + 9 < 2019.$$

Also ist $a = 2$. Damit erhält man:

$$N_2 = 91b + 9c + d = 2019 - 2 \cdot 909 = 201 \Rightarrow b \leq 2, \text{ denn für } b \geq 3 \text{ wäre } N_2 > 91b \geq 91 \cdot 3 > 201.$$

$$\text{Ist } b \leq 1 \text{ so erhält man } N_2 \leq 91 + 81 + 9 < 201. \text{ Also ist } b = 2 \text{ und dann}$$

$$N_3 = 9c + d = 201 - 91 \cdot 2 = 19 \text{ oder } 9c + d = 2 \cdot 9 + 1, \text{ sodass } c = 2 \text{ und } d = 1 \text{ sind.}$$

Die gesuchte Zahl N ist daher $N = 2221$.

Ziffernanzahl

$$\begin{aligned} \text{Es ist } n &= (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{2019} - 1) \\ &= 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2019} - 2019 \\ &= \underbrace{11\dots11}_{2019 \text{ Ziffern } 1} 0 - 2019 = \underbrace{11\dots11}_{2015 \text{ Ziffern } 1} 09091 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich: n hat 2016 Ziffern 1.

Teilbarkeiten

Setze $2019 = a$.

Dann ist wegen $a = 3 \cdot 673$ und wegen $a(a+1)+1 = a^2+a+1$:

$$\begin{aligned} 2019^{2020} - 2019 &= a(a^{2019} - 1) = a((a^3)^{673} - 1) \\ &= a(a^3 - 1)(a^{3 \cdot 672} + a^{3 \cdot 671} + \dots + 1) \\ &= a(a-1)(a^2 + a + 1)(a^{3 \cdot 672} + \dots + 1) \\ &= 2019 \cdot 2018 \cdot (2019 \cdot 2020 + 1)(a^{3 \cdot 672} + \dots + 1). \end{aligned}$$

Die Behauptung ist also wahr.

Jahreszahlen

Aus $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ folgt: $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} > x_n^2 + 2$

Daraus folgt:

$$x_1^2 > x_0^2 + 2 = 25 + 2$$

$$x_2^2 > x_1^2 + 2 > x_0^2 + 2 \cdot 2$$

$$x_3^2 > x_2^2 + 2 = 25 + 3 \cdot 2$$

...

Vermutung: $x_n^2 > 25 + 2 \cdot n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

Für $n = 1$ gilt die Behauptung. Für $n > 1$ ist $x_n^2 > x_{n-1}^2 + 2 > 25 + 2 \cdot (n-1) + 2$, sodass die Vermutung zutrifft.

$$a) \ x_{2019}^2 > 25 + 2 \cdot 2019 \Rightarrow x_{2019} > 63$$

$$b) \ x_n > 2019 \Rightarrow x_n^2 > 25 + 2 \cdot n \geq 2019^2 \Rightarrow x_n > \sqrt{25 + 2 \cdot n} \geq 2019 \Rightarrow n \geq 2038168$$

Wurzelsalat

Beide Gleichungen sind richtig, wie sich aus den beiden folgenden Identitäten ergibt:

$$\sqrt{x + \frac{x}{x^2-1}} = x \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \text{ und } \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{x-1}} = x \sqrt{\frac{x}{x-1}}, x > 1.$$

Erratum

Erratum zum Text „Was uns über den Weg gelaufen ist“ in MONOID 135

Unser Leser Dietrich Lissautzki (Koblenz) weist darauf hin, dass der Text in der Rubrik „Was uns über den Weg gelaufen ist“ 1. Zeile, nicht wiedergibt, was eigentlich gemeint war. Richtig muss es heißen:

„Wenn man die links und rechts stehenden Ziffern spaltenweise addiert, erhält man die Ziffern zweier 10-stelligen Zahlen. Welche davon ist größer?“

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 134

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 5: Michel Schultealbert 25, Oskar Su 95, Jan Christian Weber 26;

Kl. 6: Chantal Belz 6, Julia-Michelle Butter 6, Lars Schall 40;

Kl. 7: Linus Kemmeter 17, Nils Koch 24, Arvin Plaumann 7, Oskar Schott 11;

Kl. 8: Lukas Born 64, Lea Daum 51, Paul Schall 18, Jonas Schneider 51, Trevor Schöller 17;

Kl. 10: Torben Bürger 49, Maximilian Hauck 98.

Bad Dürkheim, Werner-Heisenberg-Gymnasium:

Kl. 10: Marc Strufe 23.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Schule:

Kl. 5: Kiara Dallmeier 10, Raphael Hanold 31, Alexander Scherf 6;

Kl. 6: Jannik 5, Kian 1, Benjamin Bartsch 1, Paul Daemm 6, Emilia Minor 1,5, Laurenz Schulze 1;

Kl. 7: Chiara Peiter 21,5, Noah Peiter 21,5.

Bielefeld, Gymnasium am Waldhof: Kl. 8: Roxana Mittelberg 71.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:

Kl. 7: Oliver Bill 21.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider, Frau Haag):

Kl. 8: Noah Böhm 10;

Kl. 9: Luca Keil 14, Alina Chiara Stock 6,5.

Friedberg, Augustinerschule:

Kl. 5: Konstantin Herbst 20;

Kl. 8: Aleksandra Herbst 81,5.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:

Kl. 11: Maximilian Göbel 87, Linda Theten 19.

Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:

Kl. 7: Raphael Schmittner 41;

Kl. 8: Jacob Zimmermann 23;

Kl. 9: Marie Bauer 39.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule

Kl. 5: Marvin Traudt 11;

Kl. 6: Lena Wittayer 12;

Kl. 7: Johannes Sabel 12, Alina Wick 12;

Kl. 11: Melanie Schuy 24;

Kl. 12: David Storzer 67.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:

Kl. 10: Dennis Mayle 54.

Linz, Bürgermeister-Castenholz-Grundschule:

Kl. 4: Daniel Waldek 11,5.

Linz, Martinus Gymnasium:

Kl. 7: Simon Waldek 48,5.

Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 6: Gregor Salaru 148,5;

Kl. 8: Raphael Mayer 26.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):

Kl. 5: Sophia Blag 2,5, Victoria Vissmann 1,5, Hannah Wälde 1,5;

Kl. 6: Julia Koehler 18,5, Johannes Konyen 10;

Kl. 7: Eugene Koch 27,5;

Kl. 8: Almira Orhun 13,5, Ievgeniia Skrypova 20;

Kl. 10: Max Herwig 70,5;

Kl. 11: Ivan Khomutovski 91,5, Florian Weinzing 68;

Kl. 12: Marc Hoffmann 21.

Mainz, Theresianum:

Kl. 9: Clemens Zabel 43,5.

Maxdorf, Lise-Meitner-Gymnasium:

Kl. 6: Dominik Göbel 17;

Kl. 9: Gergana Marinova 10;

Kl. 11: Fabian von der Warth 32.

Münstermaifeld, Kurfürst-Balduin-Gymnasium:

Kl. 10: Yannik Spitzley 69.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):

Kl. 5: Luke Saidel 6;

Kl. 6: Sara Ostojic 5,5; **Kl. 7:** Karina Razlaw 3,5; **Kl. 8:** Tobias Ebert 10, Marie Ecker 11, Giannis Hillenbrand 6, Maximilian Höhn 11, Kristian Kaiser 12, Emily Kievskiy 28, Nils Müller 24,5, Isabella Räder 13,5, Jonathan Rasbach 9,5, Noah Schönte 12;

Kl. 9: Dorothee Gilbert 7,5, Gloria Schrepf 9,5;
Kl. 10: Duy Kha Pham 16,5;
Kl. 12: Darleen Baum 15,5;
Kl. 13: Vinh-An Pham 24.

Nonnenwerth, Franziskus Gymnasium:

Kl. 5: Benedikt Klein 2, Tim Sahler 6.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

Kl. 5: Emilie Borrmann 30, Samuel Seyser 6;
Kl. 6: Jonathan Friedel 13, Miriam Herget 8, Luca Petri 14, Esther Schmedding 5;
Kl. 8: Kathrin Bormann 68, Paulina Herber 77,5;
Kl. 9: Annika Borrmann 56, Hannah Schmedding 14, Sönke Schneider 102;
Kl. 11: Jonas Blumenroth 71, Lennard Freud 59, Jonas Glückmann 68, Fabian Rasch 40;
Kl. 12: Friedrich Kiefernagel 7, Namgyu Paul Kim 23, Kristin Teichert 16, Jan Wabnig 46.

Oppenheim, St. Katharinen-Gymnasium:

Kl. 12: Peter Gispert 93.

Schwedt/Oder, Carl-Friedrich-Gaus-Gymnasium:

Kl. 11: Julian Scheinert 79.

Speyer, Nikolaus-von-Wies-Gymnasium:

Kl. 10: Heiko Hirschfeld 22.

Tangermünde, Diesterweggymnasium:

Kl. 6: Tu Sam Dong 69,5;
Kl. 8: Miriam Büttner 76,5.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:

Kl. 8: Raphael Gaedtke 31,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:

Kl. 7: Mareike Bühler 38.

Worms, Gauß-Gymnasium:

Kl. 7: Fatima Hemood 6,5.

Worms, Rudi-Stefan-Gymnasium:

Kl. 9: Felix Lohrer 3,5.

Die MONOID-Preisträger 2018



Das Goldene M: Maximilian Hauck (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey).
MONOID-Fuchs: Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey).



Sonderpreis: Gregor Salaru (Otto-Schott-Gymnasium, Mainz-Gonsenheim), Sönke Schneider (Gymnasium Oberursel), Peter Gispert (Gymnasium St. Katharinen, Oppenheim).

Forscherpreis: Julian Scheinert (Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasium, Schwedt/Oder).

1. Preise: Gregor Salaru, Sönke Schneider, Peter Gispert, Ivan Khomutovski, Maximilian Göbel, Aleksandra Herbst, Julian Scheinert, Paulina Herber, Miriam Büttner.

2. Preise: Jonas Blumenroth, Roxana Mittelberg, Max Herwig, Tu Sam Dong, Yannik Spitzley, Kathrin Borrmann, Jonas Glückmann, Florian Weinzinger, David Storzer, Lukas Born.



3. Preise: Lennard Freud, Annika Borrmann, Dennis Mayle, Lea Daum, Jonas Schneider, Torben Bürger, Simon Waldeck, Jan Wabnig, Clemens Zabel, Raphael Schmittner, Fabian Rasch, Lars Schall, Marie Bauer, Mareike Bühler, Cedric Friedrich.



MONOID-Jahresabonnements 2018: Fabian von der Warth, Raphael Gaedtke, Raphael Hanold, Emilie Borrmann, Emily Kievskiy, Eugene Koch, Jan Christian Weber, Michel Schultealbert, Raphael Mayer, Nils Müller, Melanie Schuy, Vinh-An Pham, Nils Koch, Marc Strufe, Namgyu Paul Kim, Jacob Zimmermann, Heiko Hirschfeld, Chiara Peiter, Noah Peiter, Marc Hoffmann, Oliver Bill, Jonas Ahlfeld, levgeniia Skrypova, Konstantin Herbst.

Die MONOID-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2017/2018 herzlich zu ihren Gewinnen.

Der Forscherpreis wird von Casio gestiftet. Der Preis für den Träger des MONOID-Fuchs von Herrn Mattheis und dem Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Der Preis für den Träger des Goldenen M

wurde gestiftet vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und dem Institut für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Die MONOID-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 10 € für das Kalenderjahr 2019 auf das MONOID-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).

Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

- **Datenschutz:** Wir möchten unsere Abonnenten anlässlich der in Kraft getretenen DSGVO informieren, welche Daten wir von ihnen gespeichert haben:

1. Für den Versand führen wir eine Abonnentenliste mit Namen, Adresse, wenn bekannt E-Mail-Adresse, Zahlungseingang, bestellte Heftnummern. Bei Abbestellung werden diese Daten von uns gelöscht.
2. Auf der Homepage <http://monoid.mathematik.uni-mainz.de/> kann jeder L(o)eser seinen aktuellen Punktestand einsehen.

Wer einverstanden ist, braucht Sie nichts weiter zu veranlassen.

Sonst kontaktieren Sie uns bitte unter monoid@mathematik.uni-mainz.de

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Vera Ruß

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Inhalt

Aufgaben zum Neuen Jahr	3
F. Jung: Bericht zur Mainzer Mathe-Akademie 2017	4
H. Fuchs: Lösung ohne Worte: Konstruktion irrationaler Zahlen	6
M. Mattheis: Unendlich = unendlich?	6
H. Fuchs: Monoidale Knochelei	9
H. Sewerin: Das Denkerchen	10
H.-J. Schuh: Was uns über den Weg gelaufen ist	12
Die Aufgabe für den Computer-Fan	13
F. Rehm: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	16
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 135	17
Neue Mathespielereien	21
Neue Aufgaben	23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 135	24
M. Lehn: Die Formeln von Vieta und die Markovgleichung	27
Mathematische Entdeckungen	31
H.-J. Schuh: Georg Cantor	32
Erratum	37
Rubrik der Löser und Löserinnen	38
Die MONOID-Preisträger 2018	41
Mitteilungen	43
Impressum	44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>