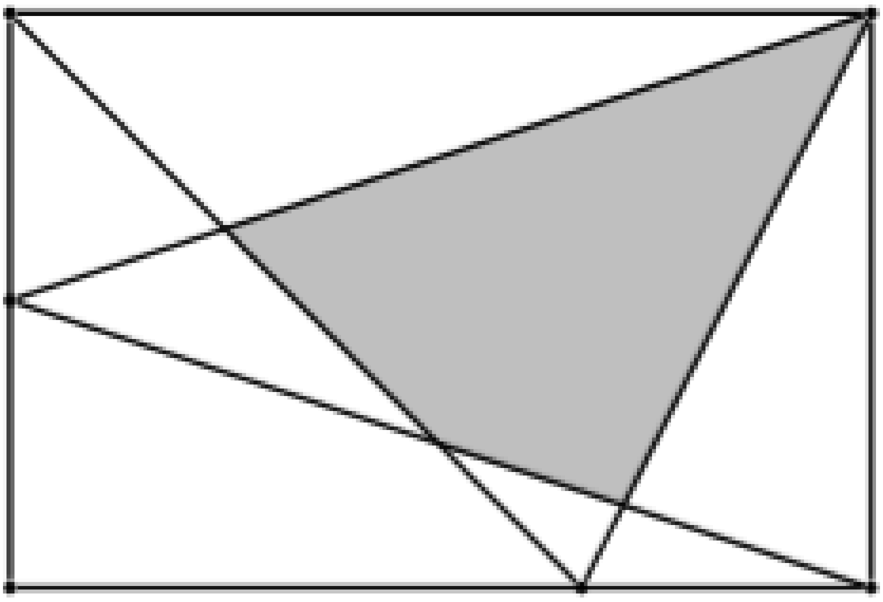
Jahrgang 39 Heft 138 Juni 2019

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JG|U JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.08.2019**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Faszinierende Fakten
Eine astronomische Gleichung
von Hartwig Fuchs

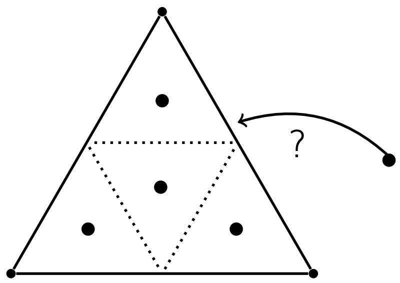
Es ist $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

Die Zahlen links und rechts vom Gleichheitszeichen haben (beide) die Summe 365 – und 365 ist die Anzahl der Tage eines Jahres.

Beweis ohne Worte
von Hartwig Fuchs

Im Innengebiet eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 2 liegen 5 Punkte. Zeige: Zwei dieser Punkte haben einen Abstand, der kleiner als 1 ist.

Beweis ohne Worte (mit Schubfachprinzip):



Wahlsysteme
von Laura Biroth

Eine Gruppe von 55 Schülern soll entscheiden, was es nach dem Abendessen für einen Nachtisch gibt. Zur Auswahl stehen: Vanilleeis, Schokolade, Erdbeeren, Pudding oder Kuchen.

Jeder schreibt die Reihenfolge seiner Vorlieben auf ein Stück Papier. Die Auszählung ergibt: 18 von ihnen hätten am liebsten Kuchen, sonst Vanilleeis, am drittliebsten Erdbeeren, als viertes Schokolade und am wenigsten gerne Pudding. 12 hätten lieber Pudding, sonst Erdbeeren usw.

Wir fassen ihre Präferenzen wie folgt zusammen:

Schüler	1. Wahl	2. Wahl	3. Wahl	4. Wahl	5. Wahl
18	Kuchen	Vanilleeis	Erdbeeren	Schokolade	Pudding
12	Pudding	Erdbeeren	Vanilleeis	Schokolade	Kuchen
10	Schokolade	Pudding	Erdbeeren	Vanilleeis	Kuchen
9	Vanilleeis	Schokolade	Erdbeeren	Pudding	Kuchen
4	Erdbeeren	Pudding	Vanilleeis	Schokolade	Kuchen
2	Erdbeeren	Schokolade	Vanilleeis	Pudding	Kuchen

Was ist jetzt das Ergebnis dieser Wahl?

Die vielleicht einfachste Möglichkeit dies zu entscheiden ist die *(relative) Mehrheitswahl*: Jeder Schüler müsste eigentlich nur seine bevorzugte Nachspeise angeben. Welche Alternative ihm am zweit- oder drittliebsten ist, spielt keine Rolle. Es wird diejenige Alternative gewählt, die so die meisten Stimmen erhält.
In unserem Beispiel sind das 18 Stimmen für Kuchen, 12 für Pudding, 10 für Schokolade, 9 für Vanilleeis und 6 für Erdbeeren. Es wäre also der *Kuchen* gewählt.
In diesem Fall sind aber 37 Schüler, immerhin die absolute Mehrheit, mit dem Ergebnis unzufrieden. Geht das nicht fairer? In vielen Fällen (z.B. bei Bürgermeisterwahlen in vielen Bundesländern) wird deshalb nach dem ersten Wahlgang, falls sich keine absolute Mehrheit für eine Alternative gefunden hat, noch eine *Stichwahl* zwischen den beiden bestplatzierten Kandidaten vorgenommen. Damit ist sichergestellt, dass wenigstens die Hälfte der Wähler den letztendlich ausgewählten Kandidaten dem zweitplatzierten vorziehen.
Bei unserer Schülergruppe kommen Kuchen und Pudding in die Stichwahl und diese gewinnt der *Pudding* mit 37 zu 18 Stimmen.

Aber warum ausgerechnet eine Stichwahl zwischen den letzten zwei und nicht drei oder vier der ursprünglichen Kandidaten? Vielleicht hätten sich ja viele Wähler mit dem drittplatzierten anfreunden können? Dies bringt uns auf die *wiederholte Stichwahl*: Man könnte doch einfach nach dem ersten Wahlgang nur die unbeliebteste Alternative streichen und eine neue Wahl zwischen den verbleibenden Alternativen starten. Gibt jeder gleich seine vollständige Präferenzenliste an, kann man auch nach nur einem einzigen Wahlgang den Sieger ermitteln.
In unserem Beispiel würden nach dem ersten Wahlgang die Erdbeeren mit nur 6 Stimmen ausscheiden. Diese sechs Schüler stimmen im nächsten Wahlgang für ihre zweitplatzierte Alternative. Dies ist in vier Fällen der Pudding (der jetzt auf $12 + 4 = 16$ Stimmen kommt) und in zwei Fällen die Schokolade ($10 + 2 = 12$ Stimmen).

Insgesamt kann man den Verlauf der Wahl so zusammenfassen:

Wahlgang	Kuchen	Pudding	Schokolade	Vanilleeis	Erdbeeren
1	18	12	10	9	6
2	18	16	12	9	-
3	18	16	21	-	-
4	18	-	37	-	-

Der Sieger nach diesem System ist also die *Schokolade*.
Ein weiterer Vorschlag kommt von einem der 37 Schüler, die in der einfachen Mehrheitswahl gegen den Kuchen gestimmt hatten: „Das ist doch viel zu kompliziert. Lasst uns doch einfach Punkte vergeben: 5 Punkte für unsere erste Wahl, 4 Punkte für unsere zweite usw. und einen Punkt für die schlechteste Alternative. Außerdem ist das so viel fairer, weil dann auch berücksichtigt wird, dass wir wirklich keinen Kuchen mögen, und nicht nur etwas anderes lieber hätten."
Dieses Verfahren nennt man *Borda-Wahl* und wird so ähnlich bei Wettbewerben wie dem Eurovision Song Contest oder der Formel 1 verwendet (an Stelle der Schüler/Wähler stehen hier die Ergebnisse der einzelnen Rennen, und statt einem Wahlsieger soll der Gesamtjahressieger festgestellt werden).
Mit diesem Verfahren erhalten die einzelnen Alternativen von unseren Schülern folgende Punktzahlen:

Kuchen:	$18 \cdot 5 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 127$ Punkte
Pudding:	$18 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 156$ Punkte
Schokolade:	$18 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 162$ Punkte
Vanilleeis:	$18 \cdot 4 + 12 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 9 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 191$ Punkte
Erdbeeren:	$18 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 189$ Punkte

Nach diesem System gewinnt also das *Vanilleeis*, und der Kuchen, der anfangs ganz vorn zu liegen schien, erscheint als die schlechteste Alternative.
„Das kann doch nicht sein!" wirft ein anderer Schüler ein. „Jetzt habt ihr schon alles mögliche zum Sieger erklärt, außer den Erdbeeren, und dabei mögen die meisten von uns Erdbeeren lieber als jede andere Alternative!" Und tatsächlich: Wenn man die Alternativen jeweils einzeln vergleicht erhält man folgendes Bild:

Alternative 2 Alternative 1	Kuchen	Pudding	Schokolade	Vanilleeis	Erdbeeren
Kuchen	-	18/37	18/37	18/37	18/37
Pudding	37/18	-	16/39	26/29	22/33
Schokolade	37/18	39/16	-	12/43	19/36
Vanilleeis	37/18	29/26	43/12	-	27/28
Erdbeeren	37/18	33/22	36/19	28/27	-

Die *Erdbeeren* gewinnen jeden 1:1-Vergleich, sie sind also der Sieger nach dem *Condorcet-Kriterium*. Der in der Mehrheitswahl vorne liegende Kuchen ist hier der letzte im Rennen.
Wir haben jetzt fünf verschiedene mehr oder weniger verbreitete Wahlsysteme kennengelernt. Alle liefern bei der hier vorliegenden Stimmenverteilung unterschiedliche Ergebnisse. Und in vier der fünf „Systeme", muss ein Kandidat, der jeden anderen im 1:1-Vergleich schlägt (in unserem Fall die Erdbeeren), nicht zum Sieger erklärt werden. Die bloße Existenz weitere Alternativen verändert also die Positionierung der Erdbeeren relativ zum jeweiligen Wahlsieger.
Ist deshalb also das Condorcet-Kriterium das fairste Wahlsystem? Nun, tatsäch-

lich liefert das Condorcet-Kriterium *gar kein* Wahlsystem, wie man im folgenden einfachen Beispiel sehen kann:
Es gibt nur drei Kandidaten A, B und C. Die 12 Wähler stimmen wie folgt ab:

Wähler	1. Wahl	2. Wahl	3. Wahl
5	A	B	C
4	C	A	B
3	B	C	A

Die drei möglichen 1:1-Vergleiche gehen also wie folgt aus:

A gegen B: 9:3
B gegen C: 8:4
C gegen A: 7:5

Jeweils die Mehrheit der Wähler findet also A besser als B, B besser als C, aber auch C besser als A. Die Vorlieben verlaufen sozusagen zyklisch, oder „im Kreis“. Mit dem Condorcet-Kriterium lässt sich hier also gar kein Wahlsieger feststellen. Warum es so schwer ist ein faires und funktionierendes Wahlsystem zu finden, werden wir im nächsten Heft sehen.

Was uns über den Weg gelaufen ist...

Eine ungewöhnliche Darstellung der Zahl 1

von Hartwig Fuchs

Für jede positive reelle Zahl x und für eine ungerade natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$1 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{x+n-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+n}\right)$$

Trifft diese Darstellung tatsächlich zu?
Für jede ganze Zahl $k \geq 0$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{x+k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+k+1}\right) = \frac{x+k+1}{x+k} \cdot \frac{x+k+1-1}{x+k+1} = 1.$$

Weil das Produkt der ersten und zweiten Klammer, der dritten und vierten Klammer, ..., der $(n-1)$-ten und der n-ten Klammer jeweils 1 ist, hat die Zahl 1 die behauptete Produktdarstellung.

Wo liegt der Fehler?
Eine unendliche Summe
von Hartwig Fuchs

Es sei $S = 1 + 10 + 100 + ...$ eine Summe mit unendlich vielen Summanden. Mit Hilfe des Assoziativgesetzes $a + b + c = a + (b + c)$ und des Distributivgesetzes $ab + ac = a(b + c)$ formen wir die Summe S um:

$$S = 1 + 10 + 100 + ... = 1 + 10 \cdot (1 + 10 + 100 + ...) = 1 + 10S$$

Es ist also $S = 1 + 10S$, woraus $S = -\frac{1}{9}$ folgt. Wie lässt sich dieses unsinnige Ergebnis erklären?
Die arithmetischen Regeln sind nur für reelle Zahlen definiert und auch nur auf diese Zahlen anwendbar.
Wir aber haben sie auf den Term $1 + 10 + 100 + ...$ angewendet, der als Objekt der Arithmetik überhaupt nicht existiert und schon gar nicht eine Zahl ist.
Deshalb dürfen wir uns nicht wundern, wenn sie hier auch nicht funktionieren und zu mathematischem Nonsens führen.

Eine Paradoxie?
Tertium non datur
von Hartwig Fuchs

Die in der Mathematik verwendete Logik heißt *zweiwertig*. Man nennt sie zweiwertig, weil sie auf dem unumstößlichen Grundsatz beruht: Jede Aussage der Logik (und der Mathematik) ist entweder wahr oder sie ist falsch – eine dritte Möglichkeit gibt es nicht („Satz vom ausgeschlossenen Dritten" oder „Tertium non datur").
Wenn also eine Aussage wahr ist, dann muss ihre Verneinung danach zwangsläufig falsch sein.
Was ist aber von den folgenden Aussagen (1) und (2) zu halten?

(1) Dieser Satz besteht aus 6 Wörtern.

(2) Dieser Satz besteht nicht aus 6 Wörtern.

Ist hier nicht die zweite Aussage die Negation (Verneinung) von der ersten Aussage? – und doch sind beide Sätze ohne Zweifel wahr! Nach dem Tertium non datur ist das ausgeschlossen.
Aus jahrtausende langer Erfahrung im Umgang mit zweiwertiger Logik weiß man, dass der Satz vom ausgeschlossenen Drittten bisher immer auf Sätze und ihre Negationen zutraf. Warum scheint dann dieser logische Grundsatz im Fall der Aussagen (1) und (2) zu versagen?

Die Lösung

Man könnte so argumentieren: Die wahre Aussage (2) ist die Negation der wahren Aussage (1). Folglich bilden (1) und (2) zusammen einen Widerspruch zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten – eine logisch paradoxe Situation. Aber dabei wurde eine falsche Annahme gemacht: Die Aussage (2) ist keineswegs die Negation der Aussage (1). Wieso?

Damit die Aussage (2) die Negation von Aussage (1) ist, müssen alle zugleich in (1) und (2) vorkommenden Wörter die gleiche Bedeutung haben. Das aber ist nicht der Fall für die Wörter „Dieser Satz". Zunächst: Die Sätze (1) und (2) sind verschiedene Sätze. In (1) nun bezieht sich „Dieser Satz" auf (1), während sich in (2) „Dieser Satz" auf (2) bezieht. Damit aber hat „Dieser Satz" in (1) eine andere Bedeutung als in (2). Folglich ist (2) nicht die Negation von (1).

Dann aber bilden die Sätze (1) und (2) auch keinen Widerspruch zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten – es gibt hier also gar keine Paradoxie.

Die Heronsche Flächenformel

von Hans-Jürgen Schuh

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b und c und den Winkeln α, β und γ.

Dieses Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, wenn drei der obigen sechs Größen vorgegeben sind, wie man sie den vier Kongruenzsätzen

sss, sws, Ssw und wsw

entnehmen kann. Hierbei steht s für Seite und w für Winkel. Das große s bei Ssw bedeutet, dass der Winkel der größeren Seite gegenüber liegt. Offensichtlich ist der Kongruenzsatz sww überflüssig, da man aus zwei bekannten Winkeln den dritten berechnen kann, und weiter ist genau aus diesem Grund www kein Kongruenz-, sondern nur ein Ähnlichkeitssatz.

Sind zwei Seiten und ein Winkel beziehungsweise eine Seite und zwei Winkel gegeben, so lässt sich die Dreiecksfläche $F = F(\triangle ABC)$ relativ einfach mit Hilfe der Trigonometrie berechnen:

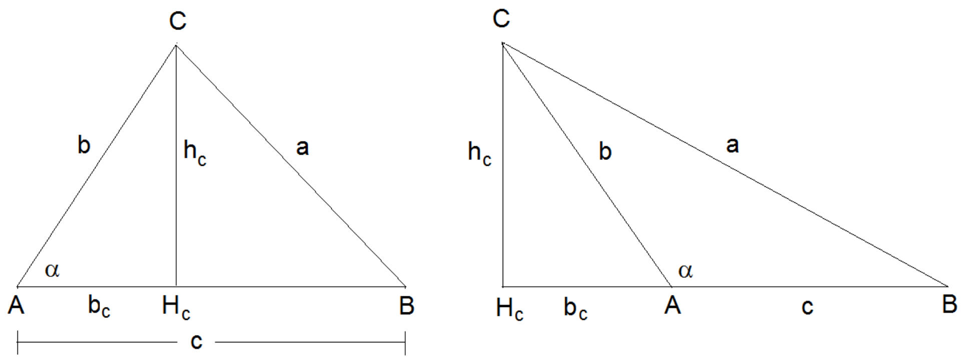
sws: $F = \frac{1}{2}s_1 \cdot s_2 \cdot \sin(w)$,

wsw: $F = \frac{1}{2}s^2 \cdot \frac{\tan(w_1) \cdot \tan(w_2)}{\tan(w_1) + \tan(w_2)}$,

Ssw: $F = \frac{1}{2}\mathrm{s} \cdot \sin(w) \cdot (\mathrm{s} \cdot \cos(w) + \sqrt{\mathrm{S}^2 - \mathrm{s}^2 \sin^2(w)})$.

Um einiges komplizierter ist es, die Fläche F zu berechnen, wenn alle drei Seiten gegeben sind, das heißt der Fall sss vorliegt. Zur Konstruktion des Dreiecks benötigt man noch die Zusatzvoraussetzung, dass jede der drei Seiten kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten ist.

In diesem Falle berechnet sich die Fläche F des Dreiecks mit Hilfe der **Heronschen Flächenformel**: $F(\triangle ABC) = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$, wobei s der halbe Dreiecksumfang ist, das heißt $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.



Figur

Beweis: Wie in obiger Figur sei h_c die Höhe auf die Seite c, H_c der Höhenfußpunkt und b_c die Länge der Strecke zwischen A und H_c .
Zunächst berechnet sich F als

(1) $F = \frac{1}{2}h_c \cdot c$

Wir müssen h_c mit Hilfe der Seiten ausdrücken. Nach dem Satz des Pythagoras gelten:

(2) $h_c^2 = b^2 - b_c^2 = (b+b_c)\cdot(b-b_c)$.

(3) $a^2 = h_c^2 + (c \mp b_c)^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 + b_c^2 \mp 2b_c \cdot c = b^2 + c^2 \mp 2b_c \cdot c$,

wobei $\mp$ dafür steht, dass α ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist (siehe Figur), denn für rechte Winkel alpha gilt $b = hc$ und $bc = 0$.
Daraus folgt:

(4) $\pm b_c = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$; Die Gleichungen (2), (3) und (4) implizieren, dass

(5) $h_c^2 = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2c} = \frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}{4c^2} = \frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4c^2} = \frac{4}{c^2}s(s-a)(s-b)(s-c) = (\frac{2}{c})^2 s(s-a)(s-b)(s-c)$.

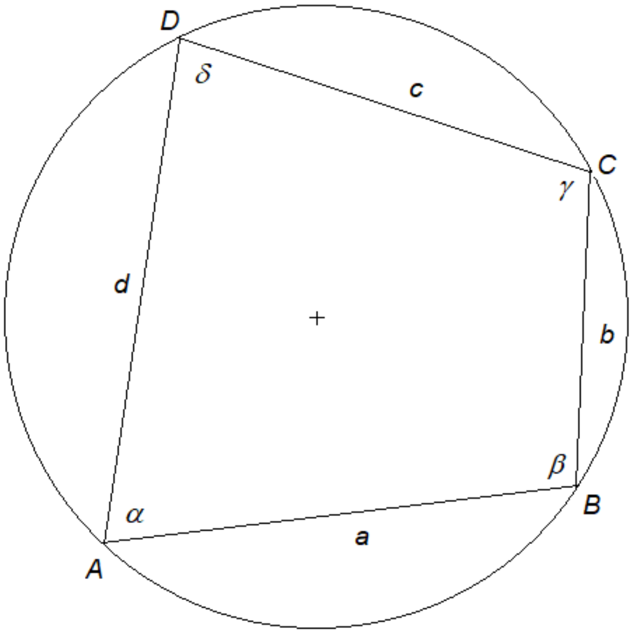
Aus den Gleichungen (1) und (5) folgt $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, q.e.d.

Bemerkung:
Heron von Alexandria (ca. 10 – 70 n. Chr.) war ein griechischer Mathematiker und Ingenieur. Er lehrte am Museion von Alexandria, dessen Bibliothek berühmt war. Der Beweis der nach ihm benannten Flächenformel findet sich in seinem Buch „Metrica“. Die Formel selbst stammt vermutlich schon von *Archimedes*.

Brahmaguptas Flächenformel für Sehnenvierecke

von Hans-Jürgen Schuh

Definition: Unter einem *Sehnenviereck* versteht man ein Viereck $\square ABCD$, das einen Umkreis besitzt, das heißt dessen Seiten a, b, c, d Sehnen eines Kreises sind.



Figur 1

Man überlegt sich leicht, dass ein Viereck $\square ABCD$ genau dann ein *Sehnenviereck* ist, wenn sich *seine gegenüberliegenden Winkel zu* 180° *ergänzen*, das heißt $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$.

Analog zur *Heronschen Flächenformel* für Dreiecke definieren wir den *Semiumfang* des Vierecks $\square ABCD$ als $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

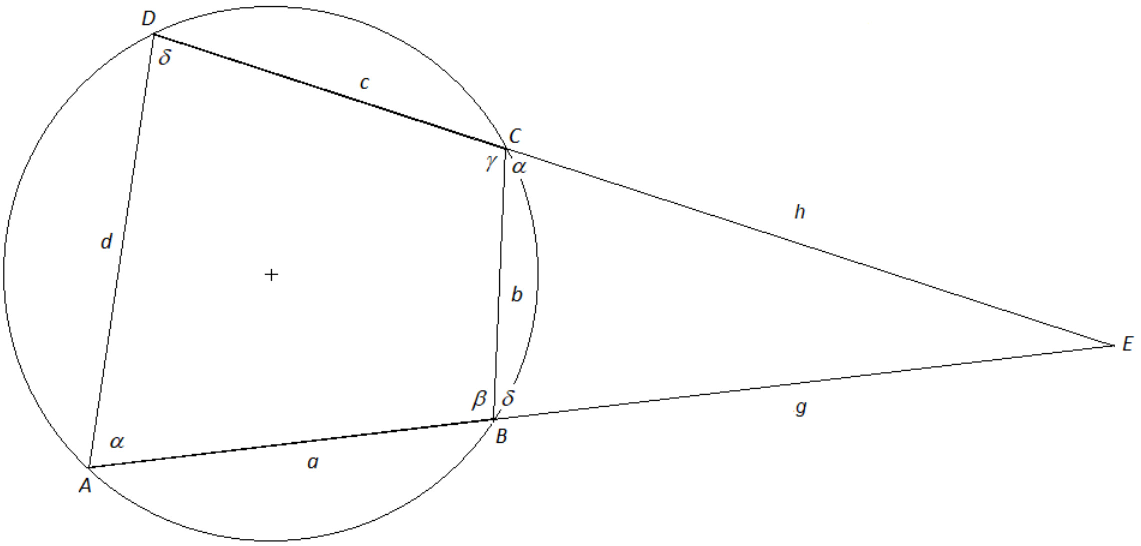
Brahmaguptas Flächenformel für Sehnenvierecke lautet :

$$F(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Formel von Heron. Interpretiert man nämlich ein Dreieck als Sehnenviereck mit Seitenlänge $d = 0$, so erhält man die Formel von Heron.

Beweis von Brahmaguptas Flächenformel: Sind a und c und gleichzeitig b und d parallel, dann liegt ein *Rechteck* vor, und obige Formel ist *evident*.

Andernfalls hat man es (bis auf Umbenennung) mit Figur 1 zu tun. Man verlängert nun die nichtparallelen Seiten a und c über den Umkreis hinaus und erhält Figur 2:



Figur 2

Da im Sehnenviereck *gegenüberliegende Winkel supplementär* sind (das heißt, sich zu 180° ergänzen), sind die Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle CEB$ wegen gleicher Winkel *zueinander ähnlich*, das heißt

(1) $\frac{AD}{CB} = \frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$ oder $\frac{d}{b} = \frac{a+g}{h} = \frac{c+h}{g}$

Folglich ist $F(\triangle AED) = (\frac{d}{b})^2 F(\triangle CEB)$ und deshalb ergibt sich

(2) $F(\Box ABCD) = F(\triangle AED) - F(\triangle CEB) = \frac{d^2-b^2}{b^2} F(\triangle CEB)$

(3) $d \cdot h = b \cdot a + b \cdot g$ und $d \cdot g = b \cdot c + b \cdot h$ wegen (1).

Aus diesen beiden Gleichungen folgt
$d \cdot (g+h) = b \cdot (a+c) + b \cdot (g+h) \Rightarrow g+h = b \cdot \frac{(a+c)}{(d-b)}$ und
$d \cdot (g-h) = b \cdot (-a+c) + b \cdot (-g+h) \Rightarrow g-h = b \cdot \frac{(-a+c)}{(d+b)}$.
Wir berechnen $F(\triangle CEB)$ mit der Heronschen Flächenformel, wobei $s' = \frac{1}{2}(b+g+h)$:

$$
\begin{aligned}
F(\triangle CEB) &= \sqrt{s'(s'-b)(s'-g)(s'-h)} \\
&= \sqrt{\frac{(b+(g+h))}{2}\frac{(-b+(g+h))}{2}\frac{(b+(-g+h))}{2}\frac{(b+(g-h))}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{b(1+\frac{a+c}{d-b})b(-1+\frac{a+c}{d-b})b(1-\frac{-a+c}{d+b})b(1+\frac{-a+c}{d+b})} \\
&= \frac{1}{4}\frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{(d-b+a+c)(-d+b+a+c)} \\
&\qquad\qquad \overline{(d+b+a-c)(d+b-a+c)} \\
&= \frac{1}{4}\frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{2(s-b)2(s-d)2(s-c)2(s-a)} \\
&= \frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}
\end{aligned}
$$

Mit (2) ergibt sich Brahmaguptas Flächenformel.

Bemerkungen

1. *Brahmagupta* (ca. 598 n. Chr. bis ca. 668 n. Chr.) war ein indischer Astronom und Mathematiker des 7. Jhs. und vermutlich der bedeutendste Wissenschaftler seiner Zeit. Er lehrte und forschte in der Zahlentheorie, der Algebra, der Geometrie und der Astronomie. Sein Hauptwerk, das Bramasphutasiddhanta (etwa „Lehre des Brahma") hatte großen Einfluss auf die arabischen Wissenschaftler. Seine Erkenntnisse gelangten durch Übersetzungen aus dem Arabischen später auch ins mittelalterliche Europa. Brahmagupta kann als Entdecker der *Zahl Null* bezeichnet werden (vorher war die Null nur als *Platzhalter* gebräuchlich). Er stellte Regeln für das Rechnen mit der Null, den positiven und den negativen Zahlen auf, die schon weitgehend unserem modernen Verständnis entsprechen. Außerdem hat er die Dezimalbrüche eingeführt und als erster erwähnt, dass „negativ · negativ = positiv" ist.

2. Die Fläche eines *beliebigen Vierecks*, dessen Seiten kürzer als die Summe der jeweils drei anderen Seiten sind, kann man aus seinen Seiten und zwei Gegenwinkeln mit der ***Formel von Bretschneider:***

$$F(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^2}$$

berechnen.
Der Korrekturterm $abcd \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^2$ ist *nicht-negativ* und verschwindet genau dann, wenn $\alpha + \gamma = 180°$, das heißt dass $\square ABCD$ ein *Sehnenviereck* ist. Unter allen Vierecken mit den Seiten a, b, c und d ist deshalb das *Sehnenviereck* dasjenige mit der *größten Fläche*.
Carl Anton Bretschneider (1808–1878) war ein deutscher Mathematiker und Jurist.

„Das Denkerchen"

von Horst Sewerin

Peter und Paul wollen wieder einmal ins Kino gehen. Bekanntlich zahlt der Verlierer ihrer Wette für beide das Eintrittsgeld.
Heute fordert Peter seinen Freund auf, sich zwei natürliche Zahlen zu denken, wobei die größere durch die kleinere der Zahlen teilbar sein muss. Dann soll Paul die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten dieser zwei Zahlen bilden und alle vier Ergebnisse addieren. Peter würde dann aus diesem Resultat die beiden Zahlen bestimmen, die sich Paul gedacht hat. Läge er falsch, hätte Paul die Wette gewonnen.

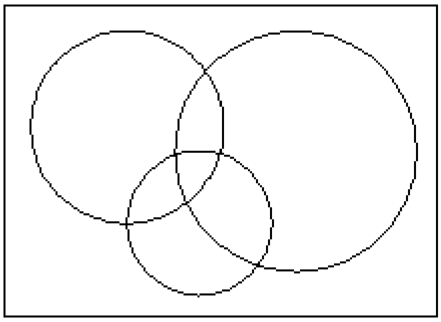
Paul nimmt die Wette an, denkt sich zwei Zahlen, rechnet fleißig, ohne dass Peter ihm über die Schulter schauen kann, und verkündet als Resultat schließlich die Zahl 507.
Kann Peter die Wette gewinnen und die beiden Zahlen bestimmen? (Die Lösung soll auch eine kurze Begründung enthalten.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. August 2019 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 136

In Heft 136 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Endlich hat der berühmte Maler sein neues Bild fertig gestellt. Es besteht aus 20 Kreislinien, wobei jedes Paar von Kreisen genau zwei Schnittpunkte hat, aber niemals drei oder mehr Kreise durch einen gemeinsamen Punkt gehen. (Die Figur zeigt das Werk, als es noch in Entstehung war.)



Jedes Flächenstück in dem Bild wurde von dem Künstler mit einer anderen Farbe ausgefüllt. Es war schwer für ihn, den Überblick zu behalten und keine Farbe doppelt zu verwenden, denn es entstanden sehr viele Flächenstücke.

Wie viele Flächenstücke enthält das komplette Gemälde? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

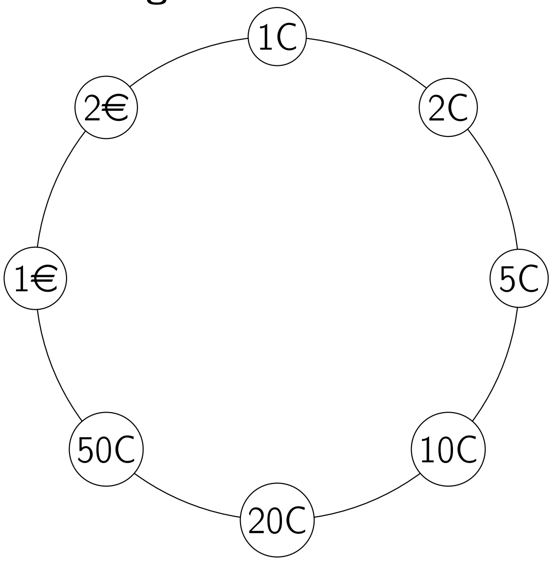
Vor dem ersten Kreis besteht das (leere) Bild aus einem Flächenstück, nach dem Zeichnen der ersten Kreislinie aus zwei Flächenstücken (innerhalb bzw. außerhalb der Kreislinie).
Jede neue Kreislinie schneidet die bereits vorhandenen Kreislinien in jeweils zwei Punkten, die nach Aufgabenstellung alle verschieden sind. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden dieser Schnittpunkte befindet sich ein Bogenstück des neuen Kreises, und jedes dieser Bogenstücke zerlegt eine vorher vorhandene Teilfläche in zwei neue Teilflächen (innerhalb bzw. außerhalb der neuen Kreislinie). So erzeugt etwa der 20. und letzte Kreis 38 neue Flächenstücke.
Daher beträgt die Gesamtzahl der Flächenstücke $2 + 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 38 = 2 + 2(1 + 2 + ... + 19) = 2 + 19 \cdot 20 = 382$.

Für die Lösungsanzahl 381, bei der das äußere Flächenstück nicht berücksichtigt wurde, konnte nicht die volle Punktzahl gegeben werden.
Vollständig richtige Lösungen haben Maximilian Göbel, Philipp Lörcks und Sönke Schneider eingereicht; fast vollständig waren die Lösungen von Paulina Herber, Josefine Kaßner und Clemens Zabel.
Das Bild gehörte zu einer ganzen Serie im Werk des Künstlers. Allerdings hat er die nachfolgenden Kreisbilder „aus technischen Gründen" mit möglichst wenigen Farben gefärbt. Mit wie vielen Farben konnte er dabei auskommen, ohne benachbarte Flächenstücke gleich färben zu müssen? Aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Die besondere Aufgabe
Münzen wenden
von Hartwig Fuchs

Je eine 1-, 2-, 5-, 10-, 20-, 50-Cent-Münze, sowie eine 1€- und eine 2€-Münze seien in der so festgelegten Reihenfolge mit der Wertangabe nach oben in einem Kreis angeordnet.

Die Aufgabe



Man soll fünf aufeinander folgende Münzen umwenden. Kann man durch mehrfach hintereinander ausgeführte Wendungen erreichen, dass danach bei sämtlichen Münzen die Wertangabe unten liegt?
Wenn das möglich ist, wie viele Wendungen benötigt man dazu?

Lösung
Wir beschreiben vier Münzanordnungen, die sich nacheinander bei drei Umwendungen ergeben; bei den mit + versehenen Münzen liegt die Wertangabe oben, bei den mit - bezeichneten liegt sie unten.

	1C	2C	5C	10C	20C	50C	1€	2€
Zustand vor der ersten Umwendung:	+	+	+	+	+	+	+	+
1. Umwendung	↓	↓	↓	↓	↓			
nach der 1. Umwendung	-	-	-	-	-	+	+	+
2. Umwendung				↓	↓	↓	↓	↓
nach der 2. Umwendung	-	-	-	+	+	-	-	-
3. Umwendung	↓	↓				↓	↓	↓
nach der 3. Umwendung	+	+	-	+	+	+	+	+

Das Schema zeigt: Jede Münze, die keine 5-Cent-Münze ist, wird bei den aus dem Schema erkennbaren drei Umwendungen genau zweimal gewendet, sodass sie danach wieder mit der Wertangabe nach oben liegt.
Die 5-Cent-Münze wird jedoch nur einmal gewendet und dann liegt sie mit der Wertangabe nach unten.
Wiederholt man nun – ausgehend von der Reihenfolge 2 Cent, 5 Cent, ..., 1€, 2€, 1 Cent der Münzen – die in unserem Schema oben ausgeführten drei Umwendungen, dann liegt danach neben der 5-Cent-Münze auch die 10-Cent-Münze mit der Wertangabe nach unten.
Wenn man dieses Verfahren aus drei Umwendungen noch sechsmal auf die in einer Reihe angeordneten Münzen mit nacheinander 5 Cent, 10 Cent, ..., 1€, 2€ als erster Münze, so kommen nacheinander die Seiten mit den Wertangaben 20 Cent, 50 Cent, 1€, 2€, 1 Cent, 2 Cent der jeweils zugehörigen Münzen nach unten.
Es ist also möglich, die Münzen so umzuwenden, dass bei allen fünf Münzen die Seite mit der Wertangabe unten liegt. Dazu benötigt man $8 \cdot 3 = 24$ Umwendungen.
Gibt es eine andere Strategie mit weniger Umwendungen?

Mathematische Entdeckungen

Eine sich selbst reproduzierende Zahlenfolge

Im Jahre 1965 gab der Mathematiker W. Kolakoski eine Definition einer Folge $F: f_1, f_2, f_3, \ldots$ von Zahlen, $\{1, 2\}$ an.
Die Folge F ist so festgelegt:

1. Die beiden ersten Elemente der Folge sind $f_1 = 1, f_2 = 2$.
2. In F stehen niemals drei gleihe Zahlen hintereinander.
3. Ersetzt man jedes Paar in F benachbarter gleicher Zahlen durch die Zahl 2 und alle übrigen Zahlen aus F durch 1, so erhält man wieder die Folge F.

Untersuche nun die Folge F im Hinblick auf die folgenden Fragen:

a) Welche Eigenschaften der Folge F fallen dir auf?

b) Welche sind die ersten 12 Elemente der Folge F?

c) Gibt es ein Konstruktionsmuster für die Folge F?

d) Wie häufig sind die Zahlen 1 und 2 in einem Anfangsstück von F der Länge n enthalten, zum Beispiel $n = 1000$ oder $n = 10^6$ (Computer!)?

e) Findest du eine Formel, mit der man f_n für ein gegebenes n berechnen kann?

(H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. August 2019 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 136

In Heft 136 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

1. Mathematische Entdeckungen am Markov-Graphen zur Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

Zeige:

- $(1, 1, 1)$ und $(1, 1, 2)$ sind die einzigen Lösungen der Markovgleichung, bei denen zwei Komponenten gleich sind.
- Es gibt keine Lösung (x, y, z) der Markovgleichung, die unter einer Spiegelung unverändert bleibt.
- Es sei (x, y, z) eine Lösung der Markovgleichung mit paarweise verschiedenen Komponenten x, y und z. Dann sind alle Lösungen (x', y, z), (x, y', z) und (x, y, z'), die durch Spiegelungen entstehen, untereinander und von (x, y, z) verschieden.
- Es gibt keine Ecke des Markovgraphen, die unter Spiegelung in sich übergeht, keine univalente Ecke außer $(1, 1, 1)$ und keine bivalente Ecke außer $(1, 1, 2)$.
- Der Markovgraph ist ein Baum, d.h. er enthält keine geschlossenen Wege.

(M.L.)

Mit dieser Aufgabe hat sich Maximilian Göbel beschäftigt.

- (1, 1, 1) und (1, 1, 2) sind die einzigen Lösungen der Markovgleichung, bei denen zwei Komponenten gleich sind.
  Beweis: Angenommen, (x, x, z) löst die Markovgleichung. Dann gilt $2x^2 + z^2 = 3x^2z$ oder $z^2 = x^2(3z - 2)$. Dann ist $3z - 2$ eine Quadratzahl, etwa $3z - 2 = m^2$. Es folgt $z = mx$ und $m^2 = 3mx - 2$. Jeder Primteiler von m muss dann auch 2 teilen, d.h. $m = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Falls $k = 0$, ist $m = x = 1$ und folglich $(x, x, z) = (1, 1, 1)$. Falls $k = 1$, hat man $m = 2$ und $2 = 3x - 1$, also $x = 1$. Das bedeutet $(x, x, z) = (1, 1, 2)$. Falls $k \geq 2$ bekommt man $2^{2k-1} = 3 \cdot 2^{k-1}x - 1$. Die linke Seite ist gerade, die rechte aber ungerade, Widerspruch. Also sind $(1, 1, 1)$ und $(1, 1, 2)$ die einzigen Möglichkeiten. $\square$

- Es gibt keine Lösung (x, y, z) der Markovgleichung, die unter einer Spiegelung unverändert bleibt.
  Beweis: In der ersten Lösung $(1, 1, 1)$ ist keine Komponente durch 3 teilbar. Bei der Konstruktionsvorschrift für neue Lösungen wird x durch $3yz - x$ ersetzt. Dieser Term ist nicht durch 3 teilbar, wenn das ursprüngliche x nicht durch 3 teilbar war. Da sich alle Lösungen durch diese Konstruktion aus $(1, 1, 1)$ ergeben und dort keine Komponente durch 3 teilbar ist, wird sich das auch nicht ändern und somit ist in keine Lösung eine Komponente durch 3 teilbar.
  Würde bei einer Spiegelung eine Lösung gleich bleiben, so wäre $x' = 3yz - x = x$ und somit $3yz = 2x$, womit x durch 3 teilbar wäre. Dies kann also nicht vorkommen.

- Es sei (x, y, z) eine Lösung der Markovgleichung mit paarweise verschiedenen Komponenten x, y und z. Dann sind alle Lösungen (x', y, z), (x, y', z) und (x, y, z'), die durch Spiegelungen entstehen, untereinander und von (x, y, z) verschieden.
  Beweis: Dass die neuen Lösungen von (x, y, z) verschieden sind, war die Aussage des vorigen Punktes. Wenn (x', y, z) und (x, y', z) bis auf Umordnung gleich sind, so muss x im Tripel (x', y, z) vorkommen, und weil $x \neq y, z$ nach Annahme, so bleibt nur die Möglichkeit $x = x'$, die nach dem vorigen Punkt ausgeschlossen ist. $\square$

- Es gibt keine Ecke des Markovgraphen, die unter Spiegelung in sich übergeht, keine univalente Ecke außer (1, 1, 1) und keine bivalente Ecke außer (1, 1, 2).
  Dabei heißt eine Ecke in einem Graphen univalent bzw. bivalent, wenn dort genau eine Kante endet bzw. genau zwei Kanten enden.

- Der Markovgraph ist ein Baum, d.h. er enthält keine geschlossenen Wege. Beweis: Gäbe es einen geschlossen Weg im Markovgraphen, so wäre die Komponentensumme $x+y+z$ für eine Ecke (x,y,z) des Weges maximal. Von dieser Ecke würden gezwungenermaßen zwei Kanten ausgehen, die zu Ecken mit gleicher oder niedrigerer Komponentensumme führten. Dazu müsste es zwei Komponenten, etwa x und y, mit der Eigenschaft, dass $3yz - x \leq x$ und $3xz - y \leq y$ geben. Aus $3yz \leq 2x$ und $3xz \leq 2y$ folgt $3xyz \leq 2x^2$ und $3xyz \leq 2y^2$, was auf den Widerspruch $x^2+y^2+z^2 = 3xyz \leq x^2+y^2$, also $z^2 \leq 0$ führt.

2. Mathematische Entdeckungen an der Gleichung $x^2+y^2 = m(1+xy)$
Erstelle den zugehörigen Markov-Graphen. Gib hiermit (oder anders) einen Beweis für die Computerfan-Aufgabe aus Monoid 134 an, dass m stets eine Quadratzahl ist.
Vorbemerkungen: Der Fall $x, y < 0$ muss nicht betrachtet werden, da er analog zu $x, y > 0$ wäre. $y < 0 < x$ muss ebenfalls nicht betrachtet werden, da $0 < x^2 + y^2 = m(1+xy) \leq 0$, ein Widerspruch ist.
Angenommen (x, y) mit $x, y, \geq 0$ sei für ein festes m die Lösung der Gleichung, bei der $min(x, y)$ am kleinsten ist. OBdA sei $x \geq y$. x ist eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - myx + (y^2 - m) = 0$. Die andere Lösung sei x'. Nach dem Satz von Vieta gilt $x + x' = my$ und $x \cdot x' = y^2 - m$. Aus der ersten Gleichung folgt, dass x' auch ganzzahlig sein muss. Aus der zweiten folgt $x' = \frac{y^2-m}{x} < \frac{y^2}{x} \leq \frac{y^2}{y} = y$, sofern weder x noch y Null sind. (x', y) erfüllt nun auch die Gleichung und es gilt $x' < y = min(x, y)$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also muss doch $y = 0$ sein. Dann gilt aber $x^2 - m = 0$ und somit $m = x^2$. Da m beliebig gewählt war, muss es offensichtlich immer eine Quadratzahl sein.
Beispiel $m = 4$

0 — 2 — 8 — 30 — 112 — 418 Markov-Graph

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 137

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Ein pfiffiger Verkäufer?

Der Inhaber eines Musikladens will einen Stapel von 600 nicht mehr sehr gefragten CDs billig verkaufen. Er beschließt: 300 sollen in Dreierpacken zu je 4 Euro und die restlichen in Fünferpacken zu je 6 Euro verkauft werden. Der Verkäufer jedoch versucht ihn zu überzeugen, dass es vorteilhafter sei, die CDs in Viererpacken zu je 5 Euro zu verkaufen.
Hat der Verkäufer recht? (H.F.)

Lösung:

Wenn der Ladeninhaber 100 Dreierpacken und 60 Fünferpacken verkauft, dann betragen seine Einnahmen $100 \cdot 4$ Euro $+ 60 \cdot 6$ Euro $= 760$ Euro;
nach dem Vorschlag des Verkäufers aber wären sie $150 \cdot 5$ Euro $= 750$ Euro.
Der Verkäufer hat wohl falsch gerechnet.

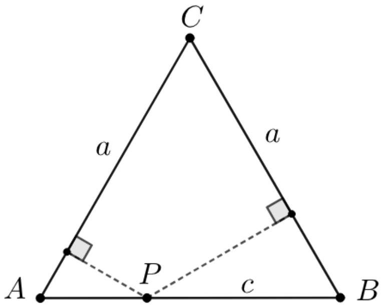
II. Spielerei

Anjas Mathematiklehrerin sagt: „Die Quersumme meines Alters ist ein Drittel meines Alters.“ Wie alt ist die Lehrerin? (WJB)

Lösung:

Das Alter der Lehrerin ist zweistellig, also von der Form $10a + b$ mit Quersumme $a + b$. Daraus folgt $\frac{1}{3}(10a + b) = (a + b)$, beziehungsweise $10a + b = 3a + 3b$, also $7a = 2b$. Also ist $2b$ durch 7 teilbar. Mit einstelliger Zahl b folgt $b = 7$ und dann $a = 2$. Die Lehrerin ist 27 Jahre alt.

III. Eine Abstandsumme im Dreieck



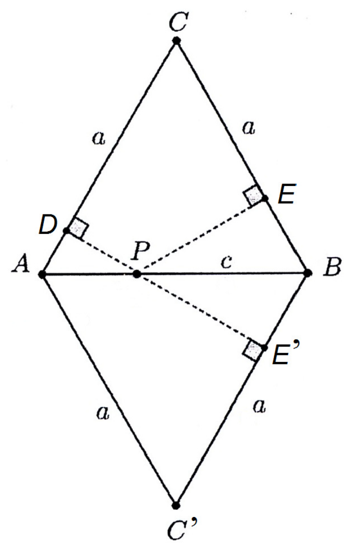
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit den Seitenlängen a und c hat jeder Punkt P der Basis AB die gleiche Summe der Abstände des Punktes P von den Seiten CA und CB. Begründe dies. (H.F.)

Lösung:
Es seien d_1 und d_2 die Abstände eines beliebigen Punktes $P \in AB$ von CA bzw. von CB und es sei $d = d_1 + d_2$. Dann ist $|ABC| = \frac{1}{2}ch_c$ mit der Dreieckshöhe h_c die Fläche des Dreiecks ABC.
Ferner gilt: $|APC| = \frac{1}{2}ad_1$ und $|BCP| = \frac{1}{2}ad_2$. Wegen $|ABC| = |APC| + |BCP|$ folgt daraus:

$$\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ad_1 + \frac{1}{2}ad_2 = \frac{1}{2}ad,$$

so dass $d = \frac{ch_c}{a}$ ist. Weil nun c, h_c und a für ein gegebenes Dreieck feste Zahlen sind, gilt die Behauptung für jeden Punkt $P \in AB$ – auch für $P = A$ oder $P = B$.

Alternative Lösung:
Man spiegele das gleichschenklige Dreieck ABC an seiner Basis AB und erhalte somit die Raute $AC'BC$.
Die Dreiecke APD, PBE und $PE'B$ sind alle einander ähnlich (gleiche Winkel), und deshalb liegen die Strecken DP und PE' auf derselben Geraden.
Da nun $d = |DE'| = |DP| + |PE'| = |DP| + |PE|$ gerade der Abstand der parallelen Seiten CA und BC' ist, und dieser nicht von der Lage von P auf der Basis AB abhängt, ist alles gezeigt.



IV. Kleinstes Vielfaches

Welches ist das kleinste positive Vielfache von 49, dessen Ziffern alle gleich sind?
(H.F.)

Lösung:
Das gesuchte Vielfache ist von der Form $z \cdot 1...1$ mit n Ziffern 1 und $z \leq 9$.
Da 1, 11, 111, 1111 und 11111 keine Vielfache von 7 sind, muss das gesuchte Vielfache mindestens 6-stellig sein.
In der Tat ist 7 ein Teiler von $111111 = 7 \cdot 15873 = 7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, aber 49 ist kein Teiler von 111111.
Folglich ist $7 \cdot 111111 = 777777$ die gesuchte Zahl.

V. Verbindung farbiger Punkte

In der Ebene seien $2n$ Punkte markiert, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen und von denen ungeradzahlig viele blau sowie ungeradzahlig viele rot gefärbt seien. Man verbinde jeden dieser $2n$ Punkte mit genau einem anderen Punkt durch eine Strecke.

Zeige: Ganz gleich wie man jeden dieser Punkte verbindet, es gibt eine Strecke, die einen blauen mit einem roten Punkt verbindet. (H.F.)

Lösung:
Man verbindet so weit wie möglich Punkte gleicher Farbe miteinander. Dann bleiben zunächst ein blauer und ein roter Punkt unverbunden. Diese beiden Punkte sind jedoch nach Voraussetzung ebenfalls zu verbinden – die Behauptung trifft also zu.

VI. Nüsse im Korb

Leon hat Nüsse gesammelt. Er schätzt, dass sich ungefähr 137 Nüsse in seinem Korb befinden. Beim genauen Zählen merkt er, dass er seine Nüsse ohne Rest auf 2 oder 3 oder 5 Kinder verteilen könnte, nicht aber auf 4 Kinder. Wie viele Nüsse hat er tatsächlich gesammelt?

Hinweis: Gehe davon aus, dass die Schätzung wirklich in der Nähe der tatsächlichen Anzahl liegt. (H.F.)

Lösung:
Die gesuchte Anzahl n von Nüssen ist ein Vielfaches der Primzahlen 2, 3 und 5, mithin ein Vielfaches von 30. Die beiden am nächsten bei 137 liegenden Vielfachen von 30 sind 120 und 150. Da $n = 120$ nicht möglich ist, folgt: 150 Nüsse sind im Korb.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

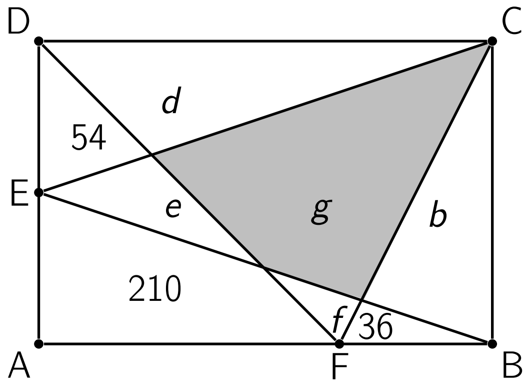
I. Frau Frey und ihre Töchter

Frau Frey ist 32 Jahre alt. Ihre beiden Töchter Jana und Laura sind zusammen halb so alt wie Frau Frey und Laura wurde zwei Jahre nach Jana geboren.
Wie lange dauert es, bis Jana und Laura zusammen genau so alt sind wie ihre Mutter und wie alt sind die drei dann? (MG)

II. Niemals eine Quadratzahl

Es sei $P(n) = 4n^2 + 6n + 4$.
Dann gibt es keine natürliche Zahl n, sodass $P(n)$ eine Quadratzahl ist. Zeige dies. (H.F.)

III. Flächeninhalt



Im Rechteck $ABCD$ sind vier Transversalen eingezeichnet, die das Rechteck in Dreiecke und Vierecke zerlegen.
Von drei dieser Figuren sind die Flächeninhalte bekannt – sie sind in der nebenstehenden Figur eingetragen.
Bestimme die Fläche des schraffierten Vierecks.

(H.F.)

IV. Zahlenknobelei

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ & E & I & N & S \\ & E & I & N & S \\ + & E_{U_3} & I_{U_2} & N_{U_1} & S \\ \hline & V & I & E & R \end{array}$$

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern, sodass eine korrekte Addition entsteht.
Dabei sind gleichen (verschiedenen) Buchstaben gleiche (verschiedene) Ziffern und E nicht die Null zuzuordnen.
Wir bezeichnen die Additionsüberträge der von rechts nach links gezählten 1., 2. und 3. Spalte in die 2., 3. und 4. Spalte mit U_1, U_2 und U_3. (H.F.)

V. Lauter verschiedene Jahreszahlenziffern

Die Jahreszahl 2019 hat vier verschiedene Ziffern.
Wann war es zuletzt so und wann wird es das nächste Mal so sein, dass die Jahreszahl aus vier verschiedenen Ziffern besteht? (MG)

VI. Eine schwere Gans

Eine Weihnachtsgans wiegt $2\frac{1}{2}$kg und die Hälfte ihres Gewichtes.
Wie schwer ist die Gans? (H.F.)

VII. Unbekannte Ziffer

Bestimme eine positive ganze Zahl x und eine Ziffer y, sodass gilt:

(1) $(423 + 3 \cdot x)^2 = 221y41$

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

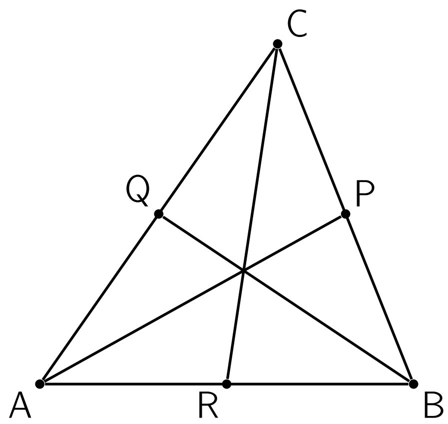
Aufgabe 1239: Welche Zahl entsteht?

Zu jeder der vier Zahlen 10, 11, 28, 30 soll dieselbe natürliche Zahl n addiert werden, damit aus der offensichtlich falschen Gleichung $10 \cdot 30 = 11 \cdot 28$ eine richtige Gleichung wird.
Bestimme die natürliche Zahl n. (WJB)

Aufgabe 1240: Errichtung eines Denkmals

Auf einem quadratischen Platz soll ein würfelförmiges Denkmal errichtet werden. Dabei sollen zur Pflasterung des Bodens und zur Errichtung des Denkmals jeweils gleich viele würfelförmige Steine gleicher Größe verwendet werden. Zudem soll die Seitenlänge des Platzes mindestens 7 mal so lang wie die Kantenlänge des Denkmals sein.
Welches ist die kleinste Möglichkeit, das Bauvorhaben zu realisieren? (H.F.)

Aufgabe 1241: Zerlegung eines Dreiecks



Im beliebigen Dreieck ABC mit der Fläche F seien P, Q, R die Seitenmittelpunkte. Die drei Strecken AP, BQ, CR zerlegen das Dreieck ABC in sechs Teildreiecke. Zeige: Jedes der sechs Teildreiecke hat die Fläche $\frac{1}{6}F$. Zeige dies. (H.F.)

Aufgabe 1242: Handys in der Schule

Am Schultor französischer Schulen werden die Mobiltelefone aller n Schülerinnen und Schüler morgens eingesammelt und nach Schulschluss wieder ausgegeben. Nun ist der erste Schüler bei der Rückgabe unaufmerksam und nimmt sich einfach wahllos eines der Mobiltelefone. Alle nachfolgenden Schülerinnen und Schüler machen dann folgendes: Wenn ihr eigenes Mobiltelefon noch da ist, nehmen sie dieses. Ansonsten nehmen sie wahllos eines der anderen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhält die letzte Schülerin/der letzte Schüler ihr/sein eigenes Mobiltelefon zurück?

a) Untersuche dies zunächst für $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und äußere eine Vermutung.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit p für ein beliebiges n. (Achim Klenke)

Aufgabe 1243: Universelle Teiler

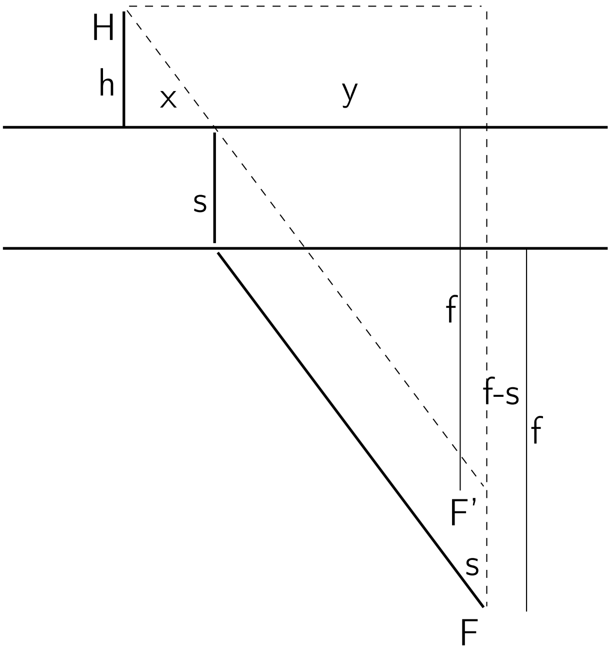
Für zwei natürliche Zahlen m und n mit Zifferndarstellung $m = m_1 \cdots m_k$ und $n = n_1 \cdots n_l$ im Dezimalsystem, bezeichnen wir mit $n \,\&\, m$ die Verkettung der Zahlen n und m, also die Zahl, die entsteht, indem man die Ziffern von m unmittelbar rechts neben die Ziffern von n schreibt. $n \,\&\, m$ hat also die Zifferndarstellung $n_1 \cdots n_l m_1 \cdots m_k$.

Wir nennen eine natürliche Zahl m einen universellen Teiler, wenn sie für jede beliebige Zahl n die Verkettung $n \,\&\, m$ teilt. Zum Beispiel ist $m = 10$ ein universeller Teiler, denn $n \,\&\, 10$ endet auf 10, und 10 teilt jede Zahl, deren letzte Ziffer 0 ist. Finde alle universellen Teiler. (H.F)

Aufgabe 1244: Teilbarkeit

Zeige, dass $n \cdot (n^3 - n)$ für jedes n durch 12 teilbar ist. (WJB)

Aufgabe 1245: Vom Hof zur Scheune



Ein Bauer, dessen Ackerfläche von einem Bach durchschnitten wird, erhält die Genehmigung, über diesen eine Brücke zu bauen. Die Brücke wird $s = 20m$ lang.

Wo muss er die Brücke bauen, um einen möglichst kurzen Gesamtweg von seinem Hof H zu seiner Feldscheune F zu erreichen. Wie lang ist dieser Weg w? (WJB)

h und f sind die Abstände von H und F zum Ufer des Bachs bzw. des Hofs, $x + y$ bezeichnet den horizontalen Abstand zwischen F und H sowie $h + s + f$ den vertikalen Abstand.

Gelöste Aufgaben aus Monoid 137

Klassen 9–13

Aufgabe 1232: Eine besondere Gleichung

Zeige, dass die Gleichung

(1) $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 11x + 30} = 1$

nur die ganzzahligen Lösungen $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ hat.

Hinweis: Es muss aus deiner Lösung erkennbar sein, dass es keine anderen Lösungen gibt.

Lösung:

Aus $a^b = 1$ folgt: $b = 0, a \neq 0$ oder $a = 1$ oder $a = -1$ und b gerade.

a) $x^2 - 11x + 30 = 0$ hat die Lösungen $x = 5$ und $x = 6$ und für diese ist $x^2 - 5x + 5 \neq 0$. Also sind $x = 5$ und $x = 6$ Lösungen von (1).

b) $x^2 - 5x + 5 = 1$, hat die Lösungen $x = 1$ und $x = 4$. Also sind $x = 1$ und $x = 4$ Lösungen von (1).

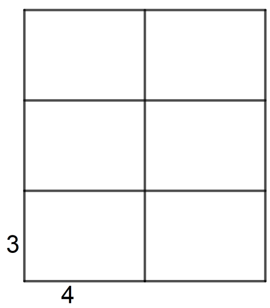
c) Ist $x^2 - 5x + 5 = -1$, also $x = 2$ oder $x = 3$, dann muss $x^2 - 11x + 30$ geradzahlig sein – was der Fall ist. Somit sind auch $x = 2$ und $x = 3$ Lösungen von (1).

Aufgabe 1233: Sieben Punkte im Rechteck

Im Innengebiet eines Rechtecks R mit Seitenlängen 9 und 8 sind sieben Punkte beliebig verteilt. Dann gilt: Mindestens zwei dieser Punkte haben einen Abstand, der geringer als 5 ist. (H.F.)

Hinweis: Zerlege das Rechteck in sechs kongruente Rechtecke

Lösung:



Man zerlege das Rechteck R in sechs kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen 4 und 3. Im Innengebiet eines solchen Rechtecks – es sei R' – haben jede zwei Punkte einen Abstand, der geringer als die Längen einer Diagonalen von R' – also kleiner als $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ – ist. Da 7 Punkte auf die 6 kleinen Rechtecke verteilt sind, müssen sich in einem dieser Rechtecke zwei Punkte befinden. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 1234: Quader mit ungewöhnlichen Raumdiagonalen

a) Gib die Kantenlängen dreier verschiedener Quader mit ganzzahligen Kantenlängen, $1 < a < b < c$ an, deren Raumdiagonale jeweils 1 länger als die längste Kante des Quaders ist.

b) Unter welcher Bedingung für a, b und c gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (c + 1)^2$$

(AK)

Lösung:

a) Wähle für $a = 5, b = 12$ und $c = 84$. Die Raumdiagonale hat die Länge

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$d = \sqrt{25 + 144 + 7056}$$
$$d = \sqrt{7225} = 85$$

Die Bedingung $d = c + 1$ ist erfüllt.

b)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (c+1)^2 = c^2 + 2c + 1 \\ a^2 + b^2 &= 2c + 1 \\ c &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 1) \end{aligned}$$

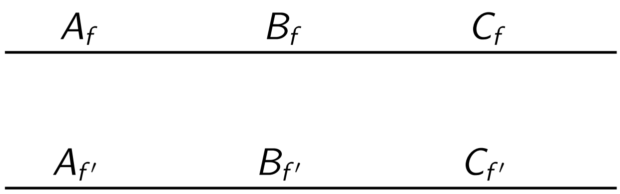
Also gilt für a, b die Bedingung $a < b$ und eine der Zahlen gerade und die andere ungerade.
Für c gilt dann $c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 1)$.

Aufgabe 1235: Bunte Punkte

Alle Punkte einer Geraden seien blau oder rot gefärbt. Dann gibt es stets 3 Punkte P, Q, R gleicher Farbe, für die gilt: $|PQ| = |QR|$. Man zeige dies. (H.F.)

Lösung:

A und B seien zwei Punkte gleicher Farbe f, vom Abstand d. Dann gibt es stets zwei von A und B verschiedene Punkte C und D, für die $|AC| = |AB| = |BD| = d$ ist.



Hat einer der Punkte C oder D die Farbe f, dann können wir diesen Punkt und die Punkte A, B mit P, Q, R geeignet so umbenennen, dass die Behauptung gilt.

Sind jedoch C und D in der von f verschiedenen Farbe f' gefärbt, dann gilt für den Mittelpunkt M der Strecke AB und CD: Wie auch immer M gefärbt ist, stets gibt es 3 Punkte, welche die Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 1236: Zweistellige Zahlen

Zwei Ziffern seien wie folgt gewählt: die erste Ziffer a zufällig aus den Ziffern 1, 2, ..., 9; die zweite Ziffer b zufällig aus den Ziffern $a, a+1, ..., 9$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 1?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht die Zahl 11?
c) Was ist die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 99?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht eine Quadratzahl? (WJB)

Lösung:

a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$
c) $\frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{9}$

d) Die zweistelligen Quadratzahlen, deren zweite Ziffer nicht kleiner ist als die erste sind 16, 25, 36 und 49.
Die Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7}und\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6}$.
Die gesamte Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{9}\ \frac{56+63+72+84}{504}=\frac{275}{4536}\approx 0,061$$

Aufgabe 1237: Letzte Ziffern

Wie heißen die letzten 400 Ziffern von
$2019! = 2019 \cdot 2018 \cdot 2017 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$? (H.F.)

Lösung:

Es gibt 1009 Vielfache von 2 und 403 Vielfache von 5, die allesamt ≤ 2019 sind. Im Produkt 2019! gibt es daher mehr als 400 Teilprodukte der Form (Vielfaches von 2)·(Vielfaches von 5), die jeweils ein Vielfaches von 10 sind. Also sind die letzten 400 Ziffern von 2019! sämtlich die Ziffer 0.

Aufgabe 1238: Geschwindigkeitsbeschränkung

Ein Autofahrer fährt von *A*stadt nach *B*dorf. Auf der Landstraße fährt er $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In Ortsdurchfahrten hält er sich an die Geschwindigkeitsbeschränkung von $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Diese Geschwindigkeitsbeschränkung gilt auch auf einer weiteren Teilstrecke mit enger Straße. Er braucht für die Fahrt zwei Stunden. Würde er die gesamte Strecke mit $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren, so käme er ebenfalls nach zwei Stunden an. Wie lang sind die Abschnitte mit Geschwindigkeitsbeschränkung insgesamt?
Hinweis: Verwende die Formel $s = v \cdot t$ aus der Physik. (WJB)

Lösung:

Seien s bzw. r die Strecken ohne bzw mit Geschwindigkeitsbeschränkung. Dann gilt:

$$s + r = 80km/h \cdot 2h = 160km \tag{1}$$

$$\text{und } t_{mit} + t_{ohne} = \frac{s}{100km/h} + \frac{r}{50km/h} = 2h$$

$$\Rightarrow s + 2r = 200km \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Subtrahieren wir von Gleichung (2) die Gleichung (1), so ergibt sich
$r = (200 - 160)km = 40km$
so mit Gleichung (1) $s = 160km - r = 160km - 40km = 120km$.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Zahnstocherzahlen

In dieser Aufgabe geht es darum, natürliche Zahlen mit Hilfe von Zahnstochern darzustellen. Die einfachste Möglichkeit ist, eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch n Zahnstocher wie in einer Strichliste darzustellen, z. B. $8 =$ ||||||||

Lässt man aber andere Darstellungen zu, kommt man u. U. mit weniger aus.

a) Zusätzlich lassen wir Darstellungen zu, bei denen mit zwei Zahnstochern eine Multiplikations-$\times$ gelegt werden kann: $8 =$ ||||× ||
In diesem Fall benötigt man ebenfalls 8 Zahnstocher. Was ist die kleinste Zahl, für die man auf diese Weise weniger Zahnstocher benötigt?

b) Für Primzahlen nützt die Darstellung mittels Multiplikation natürlich nichts. Aber man kann mittels zweier Zahnstocher auch ein Additions-$+$ legen (wobei die übliche Regel „Multiplikation vor Addition" zu beachten ist): $9 =$ ||||× ||+|
In diesem Fall werden sogar 11 Zahnstocher benötigt. Was ist die kleinste Zahl, für die diese Darstellung besser ist als die vorherige?

c) Als drittes wollen wir auch die Subtraktion zulassen, wobei dafür nur ein Zahnstocher benötigt wird: $7 =$ ||||× ||−|
Was ist die kleinste Zahl, für die diese Darstellung besser ist als die vorherigen?

d) Was sind die jeweils besten Darstellungen für 1111?

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2019 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 136

Vor der Aufgabe ein Beispiel zur Erklärung des Titels. $\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}} = 4$, eine merkwürdige Darstellung der natürlichen Zahl 4. Gibt es solche Summen von Wurzelausdrücken für andere natürliche Zahlen ?

Aufgabe: Für welche natürlichen Zahlen N gibt es eine Darstellung der Form $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}} = N$ mit natürlichen Zahlen A und B?

a) Schreibe ein Computerprogramm, welches dir alle solchen Zahlen N bis zur Grenze $Nmax = 69$ berechnet !

b) Ermittle aus den Ergebnissen von (a) eine Erklärung/Formel, die alle solchen Zahlen N und auch die verschiedenen Möglichkeiten für solche Darstellungen beschreibt! (W.G.)

Ergebnisse

Das Python-Programm und seine Ergebnisse

```
def f(a,b):
    if (a-(b)**0.5)>=0:
        d1=a+b**0.5; d2=a-b**0.5; sum1=d1**0.5;
sum2=d2**0.5;  wert=sum1+sum2
    else:wert=-1
    return wert
Nmax=69;  diffwert=0.00001 #maximale Differenz von wert-werti
A=1; A=int(A)
while A<=Nmax:
    B=1; B=int(B)
    while B<=A*A:
        if ((A-B**0.5)>=0):
            wert=f(A,B)
            werti=int(wert+diffwert)
            if wert-werti<diffwert:
                print("A,B=",A,B,end="  ")
                print("N=",werti)
        B=B+1
    A=A+1
```

Man erkennt, dass für N nur gerade Zahlen auftreten. Sind es alle? Diese Frage kann man einfach beantworten, indem man $B = A^2$ wählt. Es gibt es immer die Lösung$= A + A + 0 = 2A$. Da dies für alle natürlichen A-Werte gilt, erhält man, dass N eine beliebige gerade Zahl sein kann. Damit ist allerdings noch nicht bewiesen, daß N stets gerade sein muß. Beweis: Aus $\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}} = N$ folgt $A + sqrtB + 2\sqrt{A^2 - B} + A - \sqrt{B} = N$ und $2\sqrt{A^2 - B} = N - 2A$, umgeformt dann $\sqrt{A^2 - B} = \frac{N}{2} - A$. Die linke Seite ist ganzzahlig, also $2|N$.
Die Ergebnisse zeigen desweiteren, dass für jedes N verschieden viele Lösungen vorhanden sind, ihre Anzahl ist 1 für $N = 2$, 4 für $N = 4$, 9 für $N = 6$, 16 für $N = 8$ und 25 für $N = 10$. Man hat sich im Stillen schon die Formel $(\frac{N}{2})^2$ zurecht gelegt und ist bei 32 für $N = 12$ doch etwas konsterniert. Sollte es für größeres N_{max} doch noch 36 für $N = 12$ werden? Tatsächlich ist das für $N_{max} = 100$ so und es sieht so aus, dass im Weiteren (N_{max} noch größer als 100) kein $N = 12$ mehr auftaucht. D.h. zu N gehören genau $(\frac{N}{2})^2$ Lösungen, bisher aber unbewiesen.

Weitere Beobchtungen ohne Beweise: Der Abschnitt aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, für den es Lösungen gibt, erstreckt sich von $A = \frac{N^2}{4} + 1$ bis $A = N^2 2$. B läuft dabei von N^2 bis in $(\frac{N^2}{2})^2$ in N^2-Schritten. Ein Beispiel für $N = 10$, Kontrolle PYTHON-Programm.
Aus dem obigen ergibt sich, dass die Anzahl der verschiedenen Lösungen $\frac{N^2}{4}$ ist.
Der Schüler Ivan Khomutovskiy vom Frauenlob-Gymnasium, Mainz (12. Klasse) hat in einem anspruchsvollen Lösungsweg das richtige Ergebnis für den Klartext ermittelt. (W.G.)

Der Logarithmus einer Summe

von Jonas Ehrhard und Torben Siegismund

Anfang März schickte uns ein befreundeter Mathematiker als Scherz die Gleichung

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 = \log (1 + 2 + 3). \tag{1}$$

Das ist auf den ersten Blick erstaunlich, denn der Logarithmus gehorcht eigentlich der Rechenregel $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$, und im Allgemeinen gilt $\log (a + b) \neq \log a + \log b$. Trotzdem berechnen wir mit der Rechenregel

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 = \log (1 \cdot 2 \cdot 3) = \log 6 = \log (1 + 2 + 3),$$

Gleichung (1) stimmt also.Dann drängt sich uns als Mathematiker die Frage auf, ob noch andere natürliche Zahlen a, b und c so funktionieren, also

$$\log a + \log b + \log c = \log (a + b + c)$$

erfüllen. Nutzen wir wie oben die Rechenregel für Logarithmen, ist also die Frage, wann

$$\log (a + b + c) = \log (a \cdot b \cdot c)$$

gilt. Weil der Logarithmus invertierbar ist (die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist seine Umkehrfunktion), suchen wir Zahlen a, b und c mit der Eigenschaft

$$a + b + c = a \cdot b \cdot c. \tag{2}$$

Dazu stellen wir zuerst fest, dass mindestens eine der drei Zahlen eine 1 sein muss. Denn die kleinste Möglichkeit ohne eine 1 wäre $a = b = c = 2$, und damit berechnen sich die beiden Seiten zu

$$2 + 2 + 2 = 6 < 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Das ist also keine mögliche Lösung. Kommen noch größere Zahlen als 2 vor, wächst die Summe auf der linken Seite langsamer als das Produkt auf der Rechten, die Ungleichung wird also niemals eine Gleichheit.
Weil die Reihenfolge der Zahlen egal ist, können wir also $a = 1$ annehmen. Damit ändert sich die Gleichung (2) zu

$$b + c + 1 = b \cdot c, \tag{3}$$

und nach b aufgelöst ergibt das

$$b = \frac{c+1}{c-1}.$$

Demnach ist $c-1$ ein Teiler von $c+1$. Allerdings sind alle echten Teiler einer natürlichen Zahl maximal so groß wie die Hälfte der Zahl, das heißt

$$c - 1 \leq \frac{c+1}{2}.$$

Stellen wir diese Ungleichung nun nach c um, so erhalten wir

$$c \leq 3.$$

Ebenso gilt $b \leq 3$, denn in (2) sind b und c gleichberechtigt, also sind die obigen Überlegungen auch für b gültig. Damit können wir jetzt einfach alle verbleibenden Möglichkeiten aufzählen und lesen aus der Tabelle ab, dass $a = 1, b = 2$ und $c = 3$ die einzige Lösung ist.

a	b	c	$a+b+c$	$a \cdot b \cdot c$
1	1	1	3	1
1	1	2	4	2
1	1	3	5	3
1	2	2	5	4
1	2	3	6	6
1	3	3	7	9

Abschließend soll noch angemerkt werden, dass es unter den reellen Zahlen natürlich viel mehr Lösungen der Gleichung $x + y + z = x \cdot y \cdot z$ gibt. Diese liegen alle auf einer glatten Fläche, die hier abgebildet ist. Die Zacken entstehen durch die Rasterung, eigentlich geht es dort sehr steil weiter.

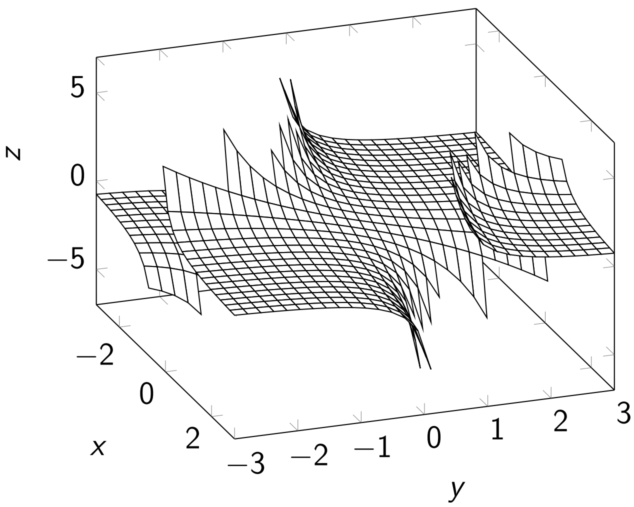


Abbildung 1: Die Fläche der reellen Lösungen von $x + y + z = x \cdot y \cdot z$

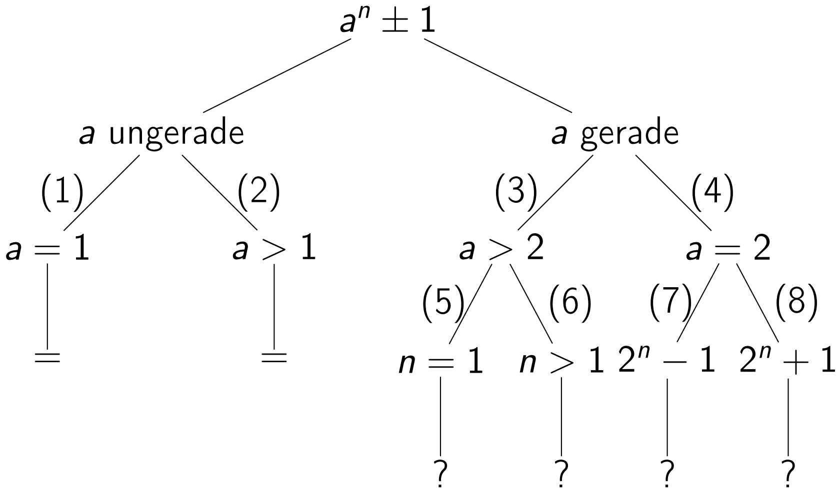
Eine Exkursion in die Welt der Primzahlen

von Hartwig Fuchs

Professor Quaoar plant einen Ausflug mit seinen Studenten in das Reich der Primzahlen. Seine Absicht dabei ist, der Frage nachzugehen:

Welche der Zahlen $a^n - 1$ und $a^n + 1$, $a \geq 1$ und $n \geq 1$, sind prim?

Für den Verlauf der Tour überlegt er sich vorweg ein logisches System von einander ausschließenden Möglichkeiten der Werte von a und von n[*] – und diese sollen dann der Reihe nach untersucht werden.



Die Exkursion

Zunächst führt Quaoars Weg in das Gebiet der Zahlen $a^n \pm 1$, a ungerade.

Die Zahlen $\mathbf{a^n \pm 1}$ mit ungeradem a

(1) Es sei $a = 1$ und ungerade

Dann ist $a^n = 1$ für jedes $n \geq 1$, sodass gilt:
$a^n - 1 = 0$ ist nicht prim für jedes $n \geq 1$;
$a^n + 1 = 2$ ist eine Primzahl für jedes $n \geq 1$.

(2) Es sei $a > 1$ und ungerade

Zunächst ist $a \geq 3$ und $a^n - 1$ sowie $a^n + 1$ sind gerade.
$a^n - 1$ ist daher nur prim, wenn $a^n - 1 = 2$, also $a = 3$ und $n = 1$ gilt.
Für $a = 3$, $n > 1$ und $a > 3$, $n \geq 1$, ist $a^n - 1$ keine Primzahl.
Dagegen ist $a^n + 1$ für jedes $a \geq 3$ und für $n \geq 1$ nicht prim wegen $a^n + 1 \geq 4$.

[*] a und n bezeichnen im Folgenden stets positive ganze Zahlen

Im zweiten Teil der Exkursion gelangt Q. in das Gebiet der Zahlen $a^n \pm 1$, mit geradem a, eine Region voll ungelöster Probleme
Zunächst verzweigt sich der Weg der Ausflügler – vgl (3) und (4) – nach Q.'s Plan.

Die Zahlen $\mathbf{a^n \pm 1}$ mit geradem a

(3) Es sei a gerade und $a \geq 3$.

Hier verzweigt sich Q.'s Weg durch die Welt der Primzahlen erneut.

(5) Es sei $n = 1$ und $a > 2$.

Damit ist eine Stelle erreicht, von der aus man in ein kaum erschlossenes Dickicht aus primen und nicht primen Zahlen blickt.
Zunächst ist $a^n \pm 1 = a \pm 1$, a gerade.
Für $a = 4$ und $a = 6$ sind die Zahlen $a - 1$ und $a + 1$ jeweils prim.
Es sei daher nun $a \geq 8$.
Da jede ungerade Zahl $n \geq 7$ die Form $n = 6m + i$, $i = 1, 3$ oder 5, hat und da $n = 6m + 3$ nicht prim ist, gilt:

(A) Eine ungerade Zahl n kann nur prim sein, wenn sie von der Form $n = 6m+1$ oder $n = 6m + 5$ ist.

Mit (A) ist kein Kriterium zu einer Entscheidung gegeben, ob eine ungerade Zahl $n \neq 6m + 3$ prim ist oder nicht – dazu ein
Beispiel
In (A) sei $n = a - 1$ und danach $n = a + 1$ gesetzt.
Für $a = 26$ sind $a - 1$ und $a + 1$ nicht prim;
Für $a = 28$ ist $a - 1$ nicht prim, jedoch $a + 1$ prim;
Für $a = 30$ sind $a - 1$ und $a + 1$ beide prim.

Die Aussage (A) führt geradewegs zurück zum Urprung der Primzahlen-Theorie der Antike, denn mit ihr stellt sich fast zwangsläufig die Frage, welche ungeraden Zahlen denn nun prim sind – eine Frage, die bereits damals die griechischen Mathematiker zu beantworten suchten, wobei aber nicht nur sie, sondern auch die späteren Mathematiker bis heute weitgehend erfolglos blieben.

(6) Es sei $n > 1$ und $a > 2$.

Dann ist $a^n - 1$ für kein $n \geq 2$ eine Primzahl, wegen

(B) $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$ für a >2.

Auch $a^n + 1$ ist keine Primzahl, falls n ungerade und größer 1 ist, denn es gilt:

(C) $a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + ... - a + 1)$ für $a \geq 3$.

Falls n gerade ist, gilt zunächst: $n = 2^r s$ mit $r \geq 1$ und ungeradem s. Für $s > 1$ ist dann $a^m + 1 = (a^{2^r})^s + 1$ und wegen (C) mit a^{2^r} anstelle von a^n folgt, dass $a^n + 1$ nicht prim ist.

Für $s = 1$ bilden die Zahlen $a^n + 1 = a^{2^r} + 1$ mit $a > 2$ und a gerade ein weithin unbekanntes Gebiet – es gibt einige Primzahlen diesen Typs, etwa $6^{2^1} + 1 = 37$ und $6^{2^2} + 1 = 1297$, doch vermutlich sind sie sehr selten (vgl. unten die äußerst raren Fermat-Zahlen). Zum Abschluss der Exkursion – vgl. (4) im Bild – begibt sich Prof. Q. mit seinen Studenten in das Gebiet der Zahln $a^n \pm 1$ mit $a = 2$, also der Zahlen $2^n \pm 1$, in dem sich bereits Besucher tummeln, von denen viele mit allerlei elektronischem Gerät – Primzahlendetektoren=Computer – unterwegs sind.

(7) Die Zahlen $\mathbf{2^n - 1, n \geq 1}$.

Die Zahlen $2^n - 1$ heißen **Mersenne-Zahlen**, weil Marin Mersenne (1588 - 1648), ein Mönch mit weit gespannten mathematisch-naturwissenschaftlichen Interessen, sich als erster mit ihnen befasst und insbesondere nach Primzahlen unter ihnen gesucht hat.

Für $n = 1$ ist $2^n - 1$ nicht prim.
Desgleichen ist $2^n - 1$ für jeden nicht primen Exponenten $n \geq 4$, also für $n = r \cdot s$ mit $r \geq 2$ und $s \geq 2$ keine Primzahl. Das folgt wegen $2^n - 1 = (2^r)^s - 1$ aus (B).
Es sei daher nun n eine Primzahl.
Dann gibt es unter den Mersenne-Zahlen mit primen Exponenten solche die prim und andere, die nicht prim sind.

Beispiel: Die kleinsten Mersenne-Zahlen mit primen Exponenten

n prim	2	3	5	7	11	13	17	...
$2^n - 1$ prim	3	7	31	127		8191	131071	...
$2^n - 1$ nicht prim					2047			

Da man bis heute keine Regel zur Bestimmung primer Mersenne-Zahlen kennt, und da $2^n - 1$ mit wachsenden n rasch sehr groß wird, haben die eifrigen Sucher großer Mersenne-Primzahlen auch mit den leistungsfähigsten Computern bisher nur wenige – nämlich 51 (Stand Ende 2018) – von ihnen entdeckt; die größte darunter ist $2^{82589931} - 1$ mit über 24862048 Ziffern.

Die Zahlen $\mathbf{2^n + 1}$ mit $\mathbf{n > 0}$

Es sei n ungerade.
Für $n = 1$ ist $2^1 + 1$ eine Primzahl.
Dagegen folgt aus (C), dass $2^n + 1$ nicht prim ist für jedes ungerade $n \geq 3$. Daher sei nun n gerade.
Für $n = 0$ und $n = 2$ sind $2^0 + 1$ und $2^2 + 1$ prim.
Ist $n \geq 4$, dann hat n die Form $n = 2^r \cdot s$, $r \geq 1$ und $s \geq 1$, s ungerade.
Für $s > 1$ gilt: $2^n + 1 = (2^{2^r})^s + 1^{**}$ ist wegen (C) keine Primzahl.

** 2^{2^r} bedeutet $2^{(2^r)}$.

Wenn $s = 1$ ist, dann bezeichnet man die Zahlen $2^{2^r} + 1$, $r = 0, 1, 2, ...$, mit F_r und nennt sie **Fermat-Zahlen** nach dem bedeutenden Zahlentheoretiker Pierre de Fermat (1601 - 1665).

Beispiel: Die fünf kleinsten Fermat-Zahlen.

r	0	1	2	3	4
F_r	$2^{2^0} + 1 = 3$	$2^{2^1} + 1 = 5$	$2^{2^2} + 1 = 17$	$2^{2^3} + 1 = 257$	$2^{2^4} + 1 = 65537$

Fermat kannte die fünf Primzahlen F_r, $0 \leq r \leq 4$. Trotz des geringen Umfangs dieser Zahlenmenge hat sie ihn dennoch verführt, zu behaupten (1637) – was er allerdings nicht beweisen konnte:

Alle Zahlen F_r, $r \geq 0$, sind prim.

Dies ist der einzige Fall, in dem sich das Zahlengenie Fermat irrte.
Es war Leonhard Euler (1707 - 1782), der 1732 herausfand, dass $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$ den Teiler 641 hat.
Heute weiß man, dass alle Fermat-Zahlen F_r, $r = 5, 6, 7, ..., 32$ nicht prim sind – F_{32} ist eine Zahl mit 1,29 Milliarden Stellen.

Da alle Anstrengungen von Mathematikern und Großwildjägern von Primzahlen bisher vergeblich waren, eine prime Fermat-Zahl F_r mit $r \geq 5$ zu finden, vermuten nicht wenige Zahlentheoretiker, dass es außer den 5 primen Zahlen F_r, $r = 0, 1, ..., 4$ keine weiteren gibt.

Damit endete Prof. Q.'s Exkursion, die ihn und seine Studenten in die Regionen (1) und (2) führt, in denen sämtliche Primzahlen identifizierbar sind, aber auch in die Gebiete (5) bis (8) voll ungelöster Primzahl-Probleme, in denen die Frage „Prim oder nicht prim?“ nur in Einzelfällen – falls überhaupt – beantwortet werden kann.

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
Martin Mattheis

Barth, Armin P.: Die Bändigung der Unendlichkeit
Der Untertitel des Buches „Die Bändigung der Unendlichkeit“ lautet „oder wie ich lernte, die Mathematik zu lieben. Entdeckungsreise in eine geheimnisvolle Wissenschaft“. Dieser Untertitel gibt einen guten ersten Eindruck worum es geht: Der Schweizer Mathematiklehrer Armin P. Barth hat in 13 unterhaltsamen Kapiteln Spannendes und Verblüffendes aus und zur Mathematik zusammengetragen.

Im ersten Kapitel wird in vielfältiger Hinsicht zunächst abgewogen, was Mathematik überhaupt und wozu sie „zu gebrauchen“ ist: nützlich „für den Alltag oder eine rein geistige Tätigkeit der Erkenntnisvermehrung“?
Weitere Kapitel beleuchten die verschiedenen Zahlen(mengen), verschiedene Unendlichkeiten, Reihen erklärt durch mathematische Witze, Algorithmen im Alltag, Graphentheorie, Geschichte der Algebra, Kurven (anhand von Geschwindigkeiten), Mathematik in Filmen, mathematisches Beweisen, Formeln und Zusammenhänge (anhand des „kleinen Gauß“) sowie kalkülhafte Logik.
Die Auswahl der von Armin P. Barth gewählten Inhalte gibt einen interessanten Einblick in verschiedene Bereiche der Mathematik. Die Art der Darstellung ist flüssig lesbar und macht Appetit auf mehr. Abgerundet wird jedes Kapitel durch vertiefende aber mit normalen Mathematikkenntnissen lösbare Aufgaben, bei denen man sich selbst ausprobieren und tiefer in die Materie einsteigen kann. Dem Buch beigelegt ist ein Heftchen mit den Lösungen aller Aufgaben und kurzen Erklärungen, wie man jeweils auf die Lösung kommen kann.
Gleichungen und Zeichnungen wurden vom Grafiker Helmut Brade gestaltet. Für den Rezensenten sind sie zwar etwas zu „künstlerisch-krakelig“, aber durch die Größe trotzdem gut lesbar.
Douglas-Adams-Fans wird es zudem ein Schmunzeln entlocken, dass der Preis des Buches genau bei 42,– € liegt.

Fazit:
Ein schönes Buch in dem man gerne lesen wird und das den Leser (beiderlei Geschlechts) durch die Aufgaben zum Selbstlösen mit in die Mathematik hineinnimmt.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Barth, Armin P.: Die Bändigung der Unendlichkeit.
Edition Zeitblende 2018, ISBN 978-3-03800-024-2,
gebunden 202 Seiten

Art des Buches:	Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Mainzer Mathe-Akademie
28. August – 01. September 2019

Bei der Mainzer Mathematik-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathematik-Akademie anzumelden, die vom 28. August – 01. September an der Universität Mainz stattfindet. Ein genauerer Programmplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben oder kann auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Kurse

- **Treffen sich zwei Parallelen im Unendlichen** (Dr. Cynthia Hog-Angeloni)

$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^3) = 0$

Eine *ebene algebraische Kurve* ist die Lösungsmenge einer Polynomgleichung in zwei Variablen x und y. Die Beschäftigung mit algebraischen Kurven beginnt also schon mit der Untersuchung von Geraden $ax + by + c = 0$ und Kegelschnitten $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (Ellipse, Parabel, Hyperbel). Bereits in der Antike wurden aber auch Polynome vom Grad $>= 3$ untersucht; man gab ihnen wohlklingende Namen wie Kissoide (Efeublatt), Konchoide (Muschelkurve), Cardioide (Herzkurve).

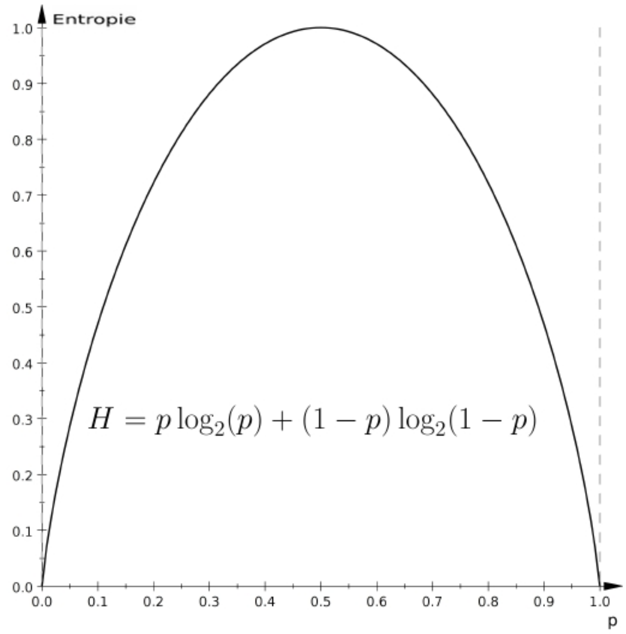
Im Jahr 2019 angekommen, verschaffen wir uns zunächst einmal Platz: Parallelscharen von Geraden erhalten einen gemeinsamen „unendlich fernen“ Punkt; der $\mathbb{R}^2$ wird entsprechend vergrößert, woraufhin schon einmal alle (nicht ausgearteten) Kegelschnitte gleich aussehen, also die Unterscheidung Ellipse, Parabel, Hyperbel sich in Luft auflöst.

Aber auch die (reelle) Projektive Ebene ist uns noch zu klein: schon die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$ $(x, y \in \mathbb{R})$ hat ja eine leere Lösungsmenge, die wir nicht zu den algebraischen Kurven zählen wollen. Durch eine weitere Vergrößerung von den reellen zu den komplexen Zahlen merken wir, dass sich aus der komplexen Adlerperspektive die Lösungsmengen von $x^2 + y^2 = -1$ und $x^2 + y^2 = 1$ nicht mehr nennenswert unterscheiden; die Lösungen der ersten haben sich nur vor dem engen reellen Blick versteckt!

Und wie können zwei ebene algebraische Kurven in der komplexen projektiven Ebene zueinander liegen? Sie können sich etwa tangential berühren, dann zählen wir den gemeinsamen Punkt doppelt (weil bei einer kleinen Verwacklung daraus zwei Schnittpunkte werden). Kursziel ist der *Satz von Bézout*, welcher besagt, dass die Anzahl der Schnittpunkte zweier ebener algebraischer Kurven mit einer geeigneten Definition von Schnittmultiplizität gleich dem Produkt der Grade der definierenden Polynome ist.

- **Information und Codierung** (Prof. Dr. Manfred Lehn)

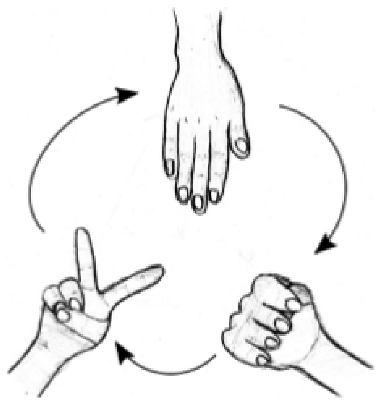
In dieser Arbeitsgruppe wollen wir uns in die Themen Information und Codierung einarbeiten. In der Codierungstheorie geht es im Gegensatz zur Kryptographie nicht darum, wie man die Übertragung von Nachrichten durch Verschlüsselung gegen unbefugtes Mitlesen schützen kann, sondern darum, Nachrichten durch geeignete Verfahren bei der Übertragung durch verrauschte Kanäle robust gegen Übertragungsfehler zu machen.



Nach Vorüberlegungen zur Informationstheorie (Wie kann man Information messen? Wie codiert man optimal von einem Alphabet, etwa mit den Zeichen a, b, c, ... in ein anderes, etwa Binärzahlen 0, 1, oder das Morsealphabet?) beschäftigen wir uns mit Modellen der Informationsübertragung, Kanalkapazitäten und linearen Blockcodes.

- **Spieltheorie** (Prof. Dr. Matthias Schneider)

Gibt es eine Sieges-Formel für „Schnick-Schnack-Schnuck"? Auf jedem Schulhof auf der ganzen Welt ist seit über tausend Jahren klar: Stein schleift Schere, Schere schneidet Papier und Papier umwickelt Stein. Mit einer Gewinnstrategie sichert man sich das letzte Stück Kuchen oder muss nie wieder die Spülmaschine ausräumen.



Im Kurs beschäftigen wir uns mit mathematischer Spieltheorie: In Ein-Personen-Spielen überdecken wir löchrige Schachbretter mit Dominosteinen und in klassischen Zwei-Personen-Spielen vermeiden wir, die letzte Bohne zu nehmen. Wir bestimmen Nash-Gleichgewichte und dominante Strategien von Matrix-Spielen und klären die wichtigste Frage von allen: Was ist mit dem Brunnen?

Unterbringung
Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten
Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung
Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie/`

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 138

Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg:
Kl. 10: Lisa Schäfer 10; **Kl. 11:** Hannah Schmitt 7, Fiete Schopp 7.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Finn Baumann 28, Sarah Braunecker 6, Leon Conrad 22, Anna Lena Drescher 29, Gabriel Faber 29, Mya Fuchs 36, Jonah Fürst 6, Johannes Greis 39, Pauline Groschke 4, Luca Guth 21, Chiara Kreis 8, Anton Krempl 10, Philipp Reis 10, Roberta Tintea 5;
Kl. 6: Oscar Su 145, Kevin Tran 67, Jan Christian Weber 33;
Kl. 7: Lars Schall 24;
Kl. 8: Linus Kemmeter 8, Nils Koch 13;
Kl. 9: Lukas Born 69;
Kl. 11: Torben Bürger 67.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Schule:
Kl. 5: Leyla 2, Liam Genscher 2;
Kl. 6: Carina 2, Kiara Dallmeier 2, Hannah Neele Frank 2, Coleen Genscher 2, Raphael Hanold 1, Max Hauser 1, Karl Hoffmann 16, Sarah Hoffmann 16.

Bielefeld, Gymnasium am Waldhof:
Kl. 9: Roxana Mittelberg 7.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:
Kl. 8: Oliver Bill 30.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 7: Philip Memmer 22;
Kl. 8: Julia El Sayed 25, Elisa Hoch 25, Merit Millsimmer 25, Emilie Schnirch 20;
Kl. 10: Tim Kruse 44.

Friedberg, Augustinerschule: Kl. 6: Nico Brockmeier 47, Konstantin Herbst 48;
Kl. 9: Aleksandra Herbst 68.

Gießen, Landgraf-Ludwigs-Gymnasium:
Kl. 8: Hanna Matter 9, Tom Rieger 11, Maret Schlinkneider 8, Jasmin Schulz 15.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Sönke Schneider 86;
Kl. 12: Maximilian Göbel 85.

Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:
Kl. 5: Kira Gaspar 12;
Kl. 8: Raphael Schmittner 41;
Kl. 9: Jakob Zimmermann 57;
Kl. 10: Marie Bauer 38.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule
Kl. 7: Ali Said 8, Fabienne Schuy 9;
Kl. 8: Theresa Horstkötter 14, Johannes Sabel 6;
Kl. 11: Dominik Horstkötter 42;
Kl. 13: Melanie Schuy 20.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Lia Boyanova 6, Mark Garkuscha 15, Severin Hackl 12, Ema Hovadikova 10, Amelie John 5, Iwais Karimi 11, Nora Koller 4, Sarah Markhof 23, David Mücke 25, Elisa Pape 13, Nam-anh Pham 19, Emma Putzinger 4, Sonja Schischkov 6;
Kl. 6: Linus Peczkowski 6;
Kl. 7: Michale Bauer 13, Stefanie Forchhammer 29, Valerie Schriberna 6.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 11: Dennis Mayle 81.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium:
Kl. 10: Cedric Friedrich 19.

Linz, Martinus Gymnasium:
Kl. 5: Daniel Waldek 20;
Kl. 8: Simon Waldek 49.

Mainz-Gonsenheim, Martinus Schule:
Kl. 2: Johannes Wünstel 18.
Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 7: Gregor Salaru 156;
Kl. 9: Raphael Mayer 46.
Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**

Kl. 11: Max Herwig 88;
Kl. 12: Ivan Khomutovskiy 90, Florian Weinzinger 93,5.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 5: Anna Salaru 10.

Mainz, Theresianum:
Kl. 10: Clemens Zabel 86.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Lia Lugger-Alarcó 8, Rosi Somi 1;
Kl. 6: Samuela Brachtendorf 3, Melina Engel 11, Louisa Krechel 14, Milena Lohmann Gonzales 11, Jona Richartz 25, Julia Weber 11; **Kl. 10:** Marius Ahlfeld 15, Fiona Ruschke 25;

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 6: Jona Richartz 13.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. : Hannah Schmedding 13;
Kl. 5: Jasmin Borrmann 13, Luis Brinkmann 48, Frederick Fink 10, Sophie Kunz 11, Dora Meszaros 34, Jaden Stix 21;
Kl. 6: Emilie Borrmann 40;
Kl. 7: Esther Schmedding 16;
Kl. 8: Elisabeth Budimann 32, Annika Etz 35, Henriette Heibock 6, Natalia Kobeszko 19, Emilia Korfmacher 35, Rebecca Pergament 38, Martin Daniel Schanne 52;
Kl. 9: Kathrin Borrmann 56, Paulina Herber 88, Josefine Kaßner 101;
Kl. 10: Annika Borrmann 40;
Kl. 11: Oliver Storck 21;
Kl. 12: Jonas Blumenroth 87, Jonas Buhrke 45, Lennard Freund 72, Jonas Glückmann 91, Luise Kaßner 46, Friedrich Kievernagel 64, Jannik Matthiesen 40, Fabian Rasch 66, Elisa Windorf 38;
Kl. 13: Kristin Teichert 15, Jan Wabnig 17.

Oppenheim, St. Katharinen-Gymnasium:
Kl. 13: Peter Gispert 45.

Schifferstadt, Paul-von-Denis Gymnasium:
Kl. : Marlene Maager 16.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 5: Mai Linh Dang 6;
Kl. 7: Tu Sam Dang 85;
Kl. 9: Miriam Büttner 89.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 7: Philipp Lörcks 123.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 8: Mareike Bühler 49.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 6: Finn Huber 6, Jan Wickenheiser 12;
Kl. 7: Alexander Haun 29;
Kl. 8: Fatima Hemood 23.

Mitteilungen

- **Datenschutz:** Wir möchten unsere Abonnenten anlässlich der in Kraft getretenen DSGVO informieren, welche Daten wir von ihnen gespeichert haben:
  1. Für den Versand führen wir eine Abonnentenliste mit Namen, Adresse, wenn bekannt E-Mail-Adresse, Zahlungseingang, bestellte Heftnummern. Bei Abbestellung werden diese Daten von uns gelöscht.
  2. Auf der Homepage `http://monoid.Mathe.uni-mainz.de/` und in den gedruckten Heften kann jeder L(o)eser seinen aktuellen Punktestand einsehen. In den Listen werden jeweils Name, Schule, Klassenstufe und Punktzahl des jeweils in der Wertung laufenden Schuljahres genannt.

  Wer einverstanden ist, braucht nichts weiter zu veranlassen.
  Sonst kontaktieren Sie uns bitte unter monoid@Mathe.uni-mainz.de

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Ruß

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 39 Heft 138 Juni 2019

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid