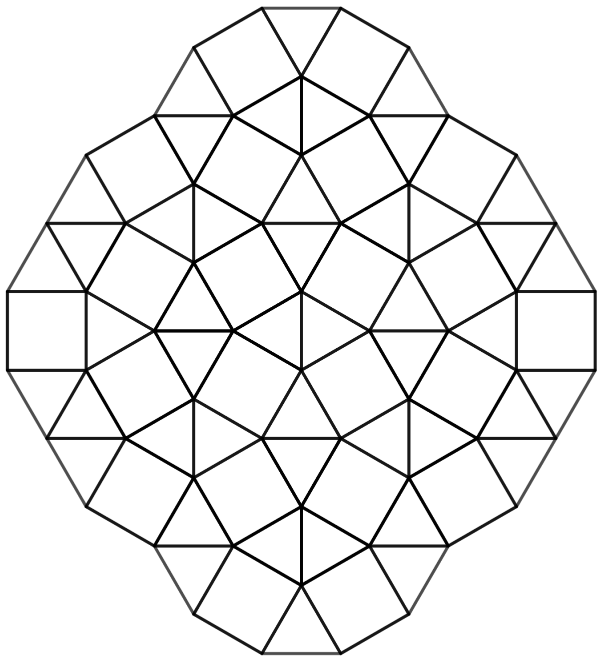
Jahrgang 39 Heft 139 September 2019

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.11.2019.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2019

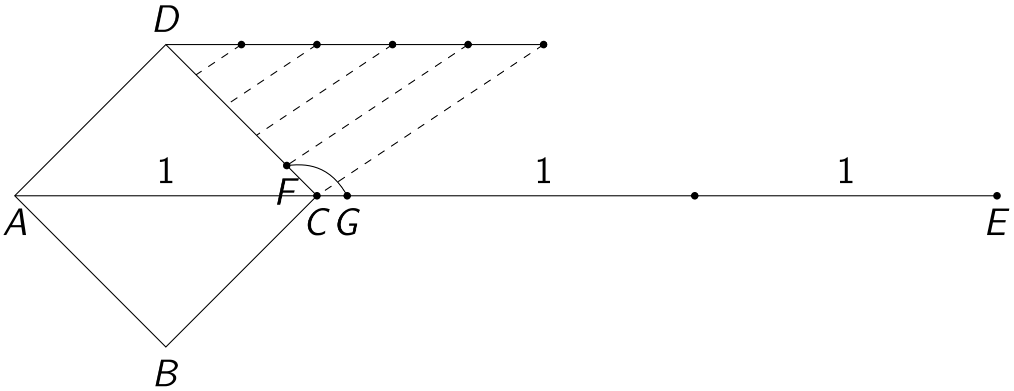
mit der Preisvergabe
an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2017/2018
am Samstag, dem 30. November 2019, Beginn 10 Uhr,
am Gymnasium Oberursel,
Berliner Str. 11, 61440 Oberursel.

Den Festvortrag wird Prof. Brinkmann aus Darmstadt halten; sein Thema:
„Mathematik und Naturwissenschaften:“
Schlüsselqualifikationen für die Welt von Morgen

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.
Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite
`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`.

Beweis ohne Worte
Eine Näherungskonstruktion für π
von Hartwig Fuchs

ABCD ist ein Quadrat mit der Diagonalenlänge 1. Der Punkt *F* sei so konstruiert, dass $|\overline{CF}| = \frac{1}{5}|\overline{CD}|$ist. Dann gilt für die Länge $|\overline{AE}|$ der Strecke $\overline{AE}$: $|\overline{AE}| \approx \pi$



Begründung

Die Seiten des Quadrats *ABCD* haben die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Nach Konstruktion des Punktes $F \in \overline{CD}$ gilt: $|\overline{CF}| = |\overline{CG}| = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Daher ist

$$|\overline{AE}| = |\overline{AC}| + |\overline{CG}| + |\overline{GE}| = 3 + \frac{1}{10}\sqrt{2} \approx 3,1414 \approx 3,1416 \approx \pi.$$

Was uns so über den Weg gelaufen ist...

Palindromisierung durch Multiplikation

von Hartwig Fuchs

Jede der Zahlen Z in der Zahlenfolge mit den ersten Gliedern

$$\begin{array}{rl} 1089 & 9801 \\ 10989 & 98901 \\ 109989 & 989901 \\ 1099989 & 9899901 \\ 10999989 & 98999901 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

werde mit 9 multipliziert.
Dann ist das Produkt $Z^* = Z \cdot 9$ die Spiegelzahl von Z.
Beispiel: $10999989 \cdot 9 = 98999901$.

Nachweis
Wir schreiben $Z = 10 \underbrace{9...9}_{n \text{ Ziffern } 9} 89$ kurz als 109_n89, $n \geq 1$ und zeigen:

$$Z^* = 109_n89 \cdot 9 = 989_n01.$$

Zunächst gilt: $9_n \cdot 9 + 8 = (10^n - 1) \cdot 9 + 8 = 8 \cdot 10^n + 10^n - 1 = 8 \cdot 10^n + 9_n$.
Damit folgt:

$$\begin{aligned} Z \cdot 9 = 109_n89 \cdot 9 &= (10^{n+3} + 9_n \cdot 100 + 89) \cdot 9 \text{ mit } 89 \cdot 9 = 8 \cdot 100 + 1 \\ &= 9 \cdot 10^{n+3} + 8 \cdot 10^{n+2} + 9_n \cdot 10^2 + 1 \\ &= 989_n01. \end{aligned}$$

Monoidale Knobelei

MONOID magisch

von Hartwig Fuchs

16	N	O	13
D	10	11	x_1
x_2	6	7	x_3
I	x_4	x_5	M

In die Kästchen des 4×4-Quadrats sind an Stelle der Buchstaben M, O, N, I, D und der Symbole $x_1, ..., x_5$ die fehlenden der Zahlen 1, 2, ..., 16 so einzutragen, dass ein magisches Quadrat entsteht.
Wie lautet dann die 6-ziffrige Zahl *MONOID*?

Lösung

Die Summe $1+2+...+16$ aller Zahlen im Quadrat beträgt $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 17 = 136$. Da die Summen aller Zeilen, Spalten und Diagonalen gleich sind, ist jede dieser Summen $\frac{1}{4} \cdot 136 = 34$.

Aus der ersten Diagonalen folgt daher $16 + 10 + 7 + M = 34$, sodass $M = 1$ ist; aus der zweiten Diagonalen folgt entsprechend $I = 4$.

Für die vierte Zeile gilt: $4 + x_4 + x_5 + 1 = 34$ und daher $x_4 + x_5 = 29$.

Daraus folgt: $x_4 = 14, x_5 = 15$ oder $x_4 = 15, x_5 = 14$. Wäre $x_4 = 14$, so ergäbe die zweite Spalte $N = 34 - 10 - 6 - 14 = 4$ – ein Widerspruch.

Also ist $x_4 = 15$ und $x_5 = 14$ und aus der zweiten Spalte folgt $N = 3$ und $O = 2$ aus der dritten Spalte.

Zwischenergebnis:

16	3	2	13
D	10	11	x_1
x_2	6	7	x_3
4	15	14	1

An diesem Zwischenergebnis liest man die Gleichungen ab:

(1) $D + x_1 = 34 - 21 = 13$

(2) $D + x_2 = 34 - 20 = 14$

(3) $x_1 + x_3 = 34 - 14 = 20$

(4) $x_2 + x_3 = 34 - 13 = 21$

Weil $D \neq 1, ..., 4, 13, ..., 16$ ist, gilt $5 \leq D \leq 12$. Wäre nun $D \geq 9$, so wäre $x_1 \leq 4$ wegen Gleichung (1) – ein Widerspruch.

Die möglichen D-Werte:

D	5	6	7	8
x_1-Werte nach (1)	8	7	6	5
x_2-Werte nach (2)	9	8	7	6
x_3-Werte nach (3)	12	13		15
		↓	↓	↓
		Widerspruch		

Die einzige Lösung ist

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Das Lösungsquadrat ist das berühmte Dürer-Quadrat aus dem Jahr 1514. Die gesuchte Lösungszahl: $MONOID = 123245$.

Faszinierende Fakten
Ein Unikat
von Hartwig Fuchs und Frank Rehm

4900 ist die einzige Quadratzahl > 1, die eine Summe aus aufeinander folgenden Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, ...$ ist: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 24^2 = 70^2$

Als erstes kann man diese Identität nachweisen: die Summe der ersten n Quadratzahlen beträgt bekanntlich: $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

In der Tat gilt für $n = 24 : \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} = 4 \cdot 25 \cdot 49 = 4900 = 70^2$.

Der Nachweis für die Summenformel kann einerseits mit vollständiger Induktion geführt werden. Er ist aber auch möglich, wenn man den Lösungsausdruck gar nicht kennt: indem man stattdessen die Summe der ersten n Kubikzahlen betrachtet und die Summierungsart ändert. Der nächste Gedanke: wieso ist $n = 24$ die einzige Lösung für $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = m^2$ für eine ganze Zahl m? Eine Überprüfung für $n = 1$ bis 50.000 mit Excel bestätigt diese Vermutung, ein Beweis ist das aber nicht, wir stellen ihn hier zurück.
Interessant ist aber, mit Excel nun ähnliche Fragen zu klären, nämlich nicht die Summe der ersten n Quadratzahlen, sondern eine beliebige Sequenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen daraufhin zu untersuchen, ob sich ebenfalls eine Quadratzahl als Summe ergibt wie oben für 4900.
Sehr schnell findet man das kleinste pythagoreische Tripel: $9 + 16 = 25$, aber hier „findet“ Excel bald eine weitere Sequenz, die mit 9 beginnt:

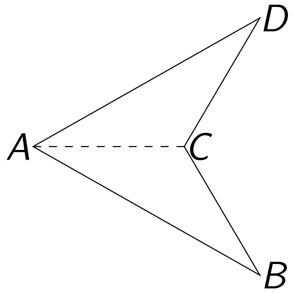
$$9 + 16 + ... + 5802 = 65205625 = 8075^2$$

. Eine Sequenz mit 4 beginnend scheint es nicht zu geben, das können die LeserInnen gern mit einer Teilbarkeitsbetrachtung versuchen zu überprüfen. Auch mit anderen geraden Quadratzahlen zu beginnen, führt zunächst zu keinem Ergebnis, bis man findet: $20^2 + 21^2 + ... + 43^2 = 24964 = 158^2$. Den Vogel scheint die Startzahl $11^2 = 121$ abzuschießen: Die Summe wird erst mit $n = 22908$ quadratisch (mehr als 4 Billionen), nämlich $11^2 + 12^2 + ... + 22908^2 = 4007455470769 = 2001863^2$
Ganz bestimmt findet ihr mit Excel oder auf andere Weise weitere Überraschungen in dieser Zahlenspielerei!
Warum ist diese Untersuchung erneut eine Gleichung 3.Grades, dieses Mal aber mit 3 Variablen? Ganz ähnlich dem Fermatschen Problem $x^n + y^n = z^n$ für positive ganze x, y, z und $n = 2$, für das es eine schöne allgemeine Lösungsformel gibt (siehe Monoid 124 von 2015): $x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$.

Mathematische Entdeckungen

Flächenzerlegung

Man zerlege ein achsensymmetrisches Viereck $ABCD$ wie in der Figur in $n, n = 3, 4, 5, 6, ...$ flächengleiche Dreiecke.



Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2019 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 137

In Heft 137 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Wir nennen eine Zahl n *segmentteilbar*, wenn jede der Zahlen n_i aus den ersten i Ziffern für alle $i = 1, \dots, 9$ durch i teilbar ist und dabei jede der Ziffern 1,2,3,4,5,6,7,8 und 9 genau einmal vorkommt. Insbesondere sind segmentteilbare Zahlen 9-stellig.

Als Beispiel untersuchen wir die Zahl 123456789. Diese ist *keine* solche Zahl, denn drei der Teilbarkeits-Bedingungen sind nicht erfüllt:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	12	123	1234	12345	123456	1234567	12345678	123456789
teilt	ja	ja	ja	nein	ja	ja	nein	nein	ja

Natürlich gibt es nur endlich viele 9-stellige Zahlen, daher ist es möglich, mit Hilfe eines Computers alle zu finden.

1. Ist es auch möglich, durch Vorüberlegungen die Anzahl der zu prüfenden 9-stelligen Zahlen so weit zu reduzieren, dass die Anzahl der segmentteilbaren Zahlen in wenigen Minuten im Kopf berechenbar wird?
2. Wenn man die Anzahl segmentteilbarer Zahlen im Dezimalsystem bestimmt hat, kann man das Problem auch in anderen Zahlensystemen betrachten. Die Frage lautet dann: Wie viele $(m-1)$-stellige Zahlen n (im Zahlensystem zur Basis m) gibt es, in denen jede Ziffer genau einmal vorkommt und die Zahl n_i aus den ersten i Ziffern für alle $i = 1, \dots, m-1$ durch i teilbar ist?

Als Beispiel betrachten wir $m = 2$. Es gibt nur eine 1-stellige Zahl 1 und die erste Ziffer von dieser ist durch 1 teilbar. Also gibt es für $m = 2$ genau eine solche Zahl. Für $m = 3$ gibt es zwei 2-stellige Zahlen, in denen jede Ziffer genau einmal vorkommt. Diese sind $(12)_3 = 5$ und $(21)_3 = 7$, beide sind nicht durch 2 teilbar, also gibt es für $m = 3$ keine solche Zahlen. Für $m = 4$ stellt man fest: Es gibt zwei solche Zahlen, nämlich $(123)_4$ und $(321)_4$.

Wie sieht das mit größeren Zahlensystemen aus? Kannst du diese Frage lösen, etwa für alle Zahlensysteme bis zur Basis 20 oder sogar noch größer?

Wir betrachten eine Zahl n mit Zifferndarstellung $k_1k_2k_3\cdots k_9$. Den Block aus den ersten i Ziffern nennen wir n_i. Es ist also $n_i = k_1\cdots k_i$ (alles im Dezimalsystem). Ist n segmentteilbar, so muss für alle i von 1 bis 9 also gelten:
(A_i) i teilt n_i und
(B) jede der Ziffern 1 bis 9 kommt genau einmal vor.

Wir überlegen nun, welche Informationen wir daraus über die Ziffern $k_1, \dots, k_9$ von N herleiten können:
Zunächst einmal stellen wir fest, dass die Bedingung (A_1) überhaupt keine zusätzliche Information enthält: Schließlich ist jede ganze Zahl durch 1 teilbar.
Die Bedingung (A_9) folgt dagegen automatisch aus (B), denn jede Zahl $n = n_9$, die die Ziffern von 1 bis 9 je genau einmal enthält, hat die Quersumme $1+2+\cdots+9 = 45 = 9\cdot 5$, ist also durch 9 teilbar.
Für jedes gerade i gilt: n_i ist gerade. Da man gerade Zahlen daran erkennt, dass ihre letzte Ziffer gerade ist, folgt daraus: k_i ist gerade für jedes gerade i.
Da wir nur vier gerade Ziffern (2,4,6,8) zu verteilen haben, und die Ziffern k_2, k_4, k_6 und k_8 gerade sein müssen, folgt daraus auch: k_i ist ungerade für jedes ungerade i.
Leicht zu deuten ist auch die Bedingung (A_5): Da $n_5 = k_1k_2k_3k_4k_5$ durch fünf teilbar sein soll, und $k_5 = 0$ nicht in Frage kommt, muss $k_5 = 5$ sein.
Zusammengefasst haben wir jetzt noch folgende Möglichkeiten für die einzelnen Stellen:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	2	1	2	5	2	1	2	1
3	4	3	4		4	3	4	3
7	6	7	6		6	7	6	7
9	8	9	8		8	9	8	9

Als nächstes schauen wir auf die Bedingung (A_4): Die Zahl n_4 soll durch 4 teilbar sein. Teilbarkeit durch 4 erkennt man an den letzten zwei Stellen, d.h.

$$n_4 \text{ ist durch 4 teilbar} \;\Leftrightarrow\; k_3k_4 \text{ ist durch 4 teilbar}$$

Wir wissen bereits, dass k_3 ungerade ist, also $k_3 = 2m+1$ für eine ganze Zahl m. Damit gilt: $k_3k_4 = 10\cdot k_3 + k_4 = 20m + 10 + k_4 = 4\cdot(5m+2) + (k_4+2)$, d.h. n_4 ist gerade dann durch 4 teilbar, wenn k_4 gerade, aber nicht durch 4 teilbar ist. Also ist $k_4 = 2$ oder $k_4 = 6$.
Genauso folgt aus Bedingung (A_8): Die Zahl n_8 ist durch 8, also insbesondere durch 4 teilbar. k_7 ist ungerade, also ist $k_8 = 2$ oder $k_8 = 6$.
Nach dem Ausschlussverfahren, bleiben für die Stellen k_2 und k_6 dann nur noch die Ziffern 4 und 8 übrig, weil 2 und 6 für k_4 bzw. k_8 reserviert sind.

Wir haben jetzt also noch folgende Möglichkeiten:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	4	1	2	5	4	1	2	1
3	8	3	6		8	3	6	3
7		7				7		7
9		9				9		9

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1. $k_4 = 2$
2. $k_4 = 6$

1. Fall: Wir betrachten die Bedingungen (A_3) und (A_6). Aus den beiden Bedingungen folgt, dass sowohl n_3 als auch n_6 durch 3 teilbar sind. Teilbarkeit durch 3 überprüft man mit Hilfe der Quersumme, d.h. es muss gelten

$$3 \text{ teilt } k_1 + k_2 + k_3 \quad \text{und}$$

$$3 \text{ teilt } k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6$$

Daraus folgt: 3 teilt $k_4 + k_5 + k_6$, also $k_6 = 8$.
Nach dem Ausschlussverfahren folgt jetzt: $k_2 = 4$ und $k_8 = 6$.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	4	1	2	5	8	1	6	1
3		3				3		3
7		7				7		7
9		9				9		9

Als nächstes betrachten wir die Bedingung (A_3): n_3 ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme $k_1 + k_2 + k_3 = 4 + k_1 + k_3$ durch 3 teilbar ist. Mit den noch zur Verfügung stehenden Kandidaten gelingt das nur für $k_1 = 1$ und $k_3 = 7$ oder umgekehrt. Nach dem Ausschlussverfahren bleiben folgende Möglichkeiten:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	4	1	2	5	8	3	6	3
7		7				9		9

Jetzt kommen wir noch einmal auf die Bedingung (A_8) zurück: Die Zahl n_8 ist gerade dann durch 8 teilbar, wenn die Zahl aus ihren letzten drei Ziffern $k_6k_7k_8 = 800 + k_7k_8$ durch 8 teilbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass k_7k_8 durch 8 teilbar ist. Also muss $k_7 = 9$ und somit $k_9 = 3$ sein.
Somit bleiben und in diesem Fall zwei Kandidaten für segmentteilbare Zahlen:

1. $n = 147258963$
2. $n = 741258963$

2. Fall: Mit dem gleichen Argument wie im ersten Fall ergibt sich $k_6 = 4$, $k_2 = 8$ und $k_8 = 2$.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	8	1	6	5	4	1	2	1
3		3				3		3
7		7				7		7
9		9				9		9

Leider ist die Bedingung (A_3) hier etwas unübersichtlicher auszuwerten. Deshalb betrachten wir zuerst (A_8). Wie im ersten Fall gilt auch hier: n_8 ist durch 8 teilbar, genau dann wenn k_7k_8 durch 8 teilbar ist. Somit muss k_7 gleich 3 oder 7 sein.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	8	1	6	5	4	3	2	1
3		3				7		3
7		7						7
9		9						9

Bedingung (A_3), die mit Hilfe der Quersumme überprüft werden kann, ist ausschließlich für folgende Kombinationen von k_1 und k_3 erfüllt: $(k_1, k_3) = (1, 3)$, $(1, 9)$, $(3, 1)$, $(3, 7)$, $(7, 3)$, $(7, 9)$, $(9, 1)$ oder $(9, 7)$. Da einer der beiden Kandidaten 3 und 7 für k_7 übrig bleiben muss, fallen die Kombinationen $(k_1, k_3) = (3, 7)$ und $(k_1, k_3) = (7, 3)$ weg. Aus den verbleibenden sechs Kombinationen ergeben sich nach dem Ausschlussprinzip folgende mögliche Kandidaten für segmentteilbare Zahlen:

3. $n = 183654729$
4. $n = 189654327$
5. $n = 189654723$
6. $n = 381654729$
7. $n = 789654321$
8. $n = 981654327$
9. $n = 981654723$
10. $n = 987654321$

Alle zehn hier aufgelisteten Zahlen erfüllen aufgrund unserer Überlegungen bereits die Bedingungen (A_1) bis (A_6), (A_8) und (A_9). Lediglich (A_7) müssen wir durch Probedivision (zum Beispiel mit einem Taschenrechner) in allen zehn Fällen überprüfen. Dabei besteht nur der sechste Kandidat diesen Test. Die einzige segmentteilbare Zahl im Dezimalsystem ist also $n = 381654729$.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Mitteilung: Abwesenheitsbedingt ist in diesem Heft ausnahmsweise keine Rubrik „Computerfan“ enthalten. Im nächsten Heft wird die Computerfan-Aufgabe aus Monoid 137 aufgelöst und eine neue Aufgabe gestellt. Die Redaktion entschuldigt sich für die Verzögerung.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Auf dem Dach der neuen Turnhalle befindet sich seit den Sommerferien ein quadratisches Gitter mit 17 mal 31 Feldern. „Weißt Du, was das soll?“, fragt Paul seinen Freund Peter. „Das ist das Gerüst für eine Solaranlage“, entgegnet Peter. „Die einzelnen Elemente der Anlage sind 3 mal 5 Felder groß und werden horizontal oder vertikal genau auf die Gitterlinien montiert, ohne dass es Überlappungen gibt.“ Paul rechnet kurz und sagt darauf: „17 mal 31 ist 527, 3 mal 5 ist 15, und 15 geht 35-mal in 527. Also müssten 35 solcher Elemente auf das Gitter passen.“ „Dann versuch es doch einmal zu zeichnen. Wenn Du es schaffst, lade ich Dich ins Kino ein; wenn nicht, lädst Du mich ein“, schlägt Peter vor. Paul willigt ein und zieht sich mit einem Block Karopapier zurück. Ist 35 tatsächlich die größte Anzahl von 3×5-Rechtecken, die man wie angegeben in einem 17×31-Gitter unterbringen kann? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. November 2019 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 137

In Heft 137 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Mona ärgert sich maßlos: „Hätte ich bei der letzten Mathearbeit nicht statt eines Pluszeichens eine 4 abgeschrieben, dann hätte ich eine 1 gehabt!“ Ihre ältere Schwester Sandra entgegnet: „Ich habe einmal ein Pluszeichen mit einer 7 verwechselt und deshalb einen Fehler gemacht. Aber ich schlage Dir eine Radikalkur für unsere Schwäche vor. Wir schreiben zuerst sieben Pluszeichen nebeneinander.“ „Gut“, sagt Mona, „und jetzt?“ „Jetzt darfst Du einige, aber nicht alle der Pluszeichen zu einer 4 machen. Aber es muss ein gültiger Term entstehen und die übrig bleibenden Pluszeichen müssen Rechenzeichen sein, nicht aber Vorzeichen.“
„Da gibt es aber einige Möglichkeiten“, entgegnet Mona nach kurzer Zeit. „Ja“, erwidert Sandra, „und Du sollst mir sagen, wie viele verschiedene Werte all die erlaubten Terme haben können, die so entstehen.“ „Das kriege ich heraus“, antwortet Mona, „aber Du musst mir dafür sagen, wie viele Werte die Terme haben können, wenn Du einige, aber nicht alle der Pluszeichen durch eine 4 oder eine 7 ersetzen kannst.“ Sandra schluckt, weil sie ahnt, dass diese Anzahl größer ist als die erste. Aber sie will sich vor ihrer Schwester keine Blöße geben.
Wie groß sind die beiden zu bestimmenden Anzahlen? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Es gibt bei sieben Positionen bis auf Vertauschungen grundsätzlich folgende Möglichkeiten für die Summen:

a)	a	$+$	b	$+$	c	$+$	d	(3 Pluszeichen)
b)	a	$+$	bc	$+$	de			(2 Pluszeichen)
c)	a	$+$	b	$+$	cde			(2 Pluszeichen)
d)	abc	$+$	def					(1 Pluszeichen)
e)	ab	$+$	$cdef$					(1 Pluszeichen)
f)	a	$+$	$bcdef$					(1 Pluszeichen)

Mehr als 3 und weniger als 1 Pluszeichen können laut Aufgabenstellung nicht auftreten. Alle Vertauschungen der Summanden liefern den gleichen Summenwert.
In der Aufgabe für Mona kann jede Ziffer nur durch eine 4 belegt werden; es gibt also 6 verschiedene Möglichkeiten, weil die Terme a) bis f) offensichtlich verschiedene Werte liefern.
In der Aufgabe für Sandra liefert Term a) 5 verschiedene Werte (0 bis 4 Siebener).
In Term b) gibt es 3 Möglichkeiten für die Zehnerziffern b und d (0 bis 2 Siebener), und 4 Möglichkeiten für die Einerziffern a, c, e (0 bis 3 Siebener). Multiplikation liefert hier 12 verschiedene Summenwerte.
In Term c) haben wir jeweils 2 Möglichkeiten für die Hunderterziffer c und für die Zehnerziffer d, sowie 4 Möglichkeiten für die Einerziffern a, b, e. Dies ergibt 16 verschiedene Summenwerte.
In Term d) gibt es jeweils 3 Möglichkeiten für die Hunderter-, Zehner- und Einerziffern und daher 27 verschiedene Summenwerte.
Term e) liefert mit jeweils 2 verschiedenen Möglichkeiten für die Tausender- und die Hunderterziffer sowie jeweils 3 Möglichkeiten für die Zehner- und Einerziffern insgesamt 36 verschiedene Summenwerte.
In Term f) gibt es 3 Möglichkeiten, die Einerziffern a und f zu besetzen, und jeweils 2 Möglichkeiten für die übrigen Ziffern b, c, d, e. Dies führt auf insgesamt 48 verschiedene Summenwerte.
Weil auch hier verschiedene Terme niemals den gleichen Summenwert haben können, beträgt die Gesamtzahl der Möglichkeiten $5 + 12 + 16 + 27 + 36 + 48 = 144$.
Vollständig richtige Lösungen haben Josefine Kaßner, Philipp Lörcks und Oscar Su eingereicht; teilweise richtig waren die Lösungen von Paulina Herber, Friedrich Kievernagel, Sönke Schneider und Clemens Zabel.

Sandra hat 7 Pluszeichen vorgeschlagen; sie hätte auch eine andere Zahl nennen können. Gibt es für die entsprechend zu bestimmenden Anzahlen eine Formel? Aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Wahlen oder Diktatur?

von Laura Biroth

Im letzten Heft haben wir verschiedene Wahlsysteme kennengelernt, die jedoch alle gewisse Schwächen hatten, und in manchen Situationen „unfair“ waren, oder (wie das Condorcet-Kriterium) manchmal gar nicht funktioniert haben. Warum fällt es den Menschen so schwer, sich gute Wahlsysteme auszudenken?

Begriffe und Definitionen

Dazu sollten wir zuerst definieren, was ein *Wahlsystem* ist und was nicht. Wir gehen dazu davon aus, dass es n verschiedene Alternativen $A_1, ..., A_n$ gibt, zwischen denen gewählt werden soll. Dies können zum Beispiel Kandidaten für ein bestimmtes Amt sein. Außerdem gibt es m wahlberechtigte Personen, die jeweils eine Meinung dazu haben, welche Alternative sie vor welcher anderen bevorzugen. Sie bringen diese Alternativen also für sich in eine Reihenfolge. Mit $A_2 >_k A_3 >_k A_1$ notieren wir, dass Wähler k Alternative A_2 am besten, Alternative A_3 am zweitbesten, und Alternative A_1 am schlechtesten findet. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder Wähler die Alternativen für sich in eine eindeutige Reihenfolge bringen kann, es ihm also nicht egal ist, ob z.B. A_1 oder A_2 geschieht. Alles folgende gilt aber auch, wenn man diese Möglichkeit zulässt.

Aufgabe eines Wahlsystems ist es, zu jeder Kombination aus m persönlichen Meinungen $>_1$ bis $>_m$ eine (gesellschaftliche) Gesamtreihenfolge $>$ bzw. $\geq$ zu liefern. Hierbei ist jetzt aber auch zugelassen, Alternativen gleich gut zu bewerten, z.B. wenn die Hälfte der Wähler $A_1 >_1 A_2$ findet und die andere Hälfte $A_2 >_2 A_1$. Mit $\geq$ schreiben wir „besser oder gleich gut wie“ mit $>$ „echt besser als“.

In diesem Sinne ist

- Es gilt immer $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$.

ein Wahlsystem, wenn auch kein besonders sinnvolles, da es die Meinung der Wähler vollständig ignoriert.

Das Condorcet-Kriterium

- Es gilt $A_i \geq A_j$, wenn mindestens die Hälfte der Wähler A_i besser als A_j einstuft, und $A_i > A_j$, wenn eine echte Mehrheit A_i besser als A_j findet.

dagegen nicht, da es nicht immer zu einer Gesamtreihenfolge führt (siehe Beispiel im letzten Heft).

Ein *vernünftiges* Wahlsystem sollte zusätzlich noch zwei Bedingungen erfüllen:

1. Wenn alle Wähler A_i besser als A_j finden (also $A_i >_k A_j$ für alle k), dann ist im Gesamtergebnis $A_i > A_j$.

2. Streicht man eine Alternative, z.B. weil ein Kandidat zurücktritt, soll sich die Reihenfolge der anderen Alternativen im Gesamtergebnis nicht ändern.

Unser erstes Beispiel, in dem unabhängig vom Ergebnis der Wahl immer dieselbe Reihenfolge herauskommt, ist also kein „vernünftiges“ Wahlsystem, da Bedingung 1 verletzt ist. Selbst wenn alle Wähler A_n besser als A_1 finden, beeinflusst dies das Ergebnis nicht.

Alle vier Wahlsysteme, die wir im letzten Heft kennengelernt haben (außer dem Condorcet-Kriterium, dass gar kein Wahlsystem ist), können mehrfach angewandt werden, um nicht nur einen Sieger, sondern eine Gesamtreihenfolge festzulegen. Diese erfüllen dann Bedingung 1, aber keines von ihnen erfüllt Bedingung 2. (Wenn du möchtest, suche Beispiele dafür im letzten Artikel.)

So harmlos wie diese Bedingungen klingen, haben sie tatsächlich starke Konsequenzen. Es gilt nämlich das

Arrow*-Theorem/-Paradoxon

Das einzige vernünftige Wahlsystem (das heißt das einzige Wahlsystem, das die Bedingungen 1 und 2 erfüllt) mit mehr als zwei Alternativen ist eine Diktatur, das heißt die Gesamtreihenfolge $>$ ist immer gleich der persönlichen Reihenfolge $>_k$ einer festen Person k.

Dies wollen wir jetzt beweisen.

Bestimmung des Diktators**

Wir betrachten zunächst einige mögliche Wahlen mit nur zwei Kandidaten A und B. Bei der Wahl 0 finden alle Wähler B besser als A. Bei der Wahl 1 findet der erste Wähler A besser als B, die anderen bevorzugen immer noch B usw. bis zu Wahl m, bei der schließlich alle Wähler B bevorzugen. Bei der Wahl Nummer k finden also die ersten k Wähler die Alternative A toll, die anderen finden sie schrecklich.

	Wähler	1	$\cdots$	$d_{AB}-1$	d_{AB}	$\cdots$	m	Ergebnis
Wahl 0:	1. Alternative	B	B	B	B	B	B	B
	2. Alternative	A	A	A	A	A	A	A

	Wähler	1	$\cdots$	$d_{AB}-1$	d_{AB}	$\cdots$	m	Ergebnis
Wahl $d_{AB}-1$:	1. Alternative	A	A	A	B	B	B	B
	2. Alternative	B	B	B	A	A	A	A

	Wähler	1	$\cdots$	$d_{AB}-1$	d_{AB}	$\cdots$	m	Ergebnis
Wahl d_{AB}:	1. Alternative	A	A	A	A	B	B	A
	2. Alternative	B	B	B	B	A	A	B

	Wähler	1	$\cdots$	$d_{AB}-1$	d_{AB}	$\cdots$	m	Ergebnis
Wahl m:	1. Alternative	A	A	A	A	A	A	A
	2. Alternative	B	B	B	B	B	B	B

* Kenneth Joseph Arrow, 23.8.1921 - 21.2.2017, amerikanischer Ökonom

** Der Titel Diktator hat sich in diesem Zusammenhang eingbürgert. Er bedeutet nicht, dass diese Person etwas unrechtmäßiges tut, sondern nur dass jede Entscheidung genau so gefällt wird, wie sie es sich wünscht. Oder mathematisch gesprochen: d heißt Diktator, wenn aus $A <_d B$ automatisch folgt, dass auch insgesamt $A < B$ ist.

Bei Wahl 0 finden alle Wähler B besser als A, also muss A nach Bedingung 1 auch im Gesamtergebnis ganz hinten liegen. Bei der letzten Wahl finden alle Wähler A besser als B, also muss A nach Bedingung 1 auch im Gesamtergebnis auf dem ersten Platz liegen.
Wir zählen jetzt, bei welcher Wahl A zum ersten Mal im Gesamtergebnis auf den ersten Platz kommt (das muss ja spätestens bei der letzten Wahl geschehen) und bezeichnen die Nummer dieser Wahl mit d_{AB}. Die Zahl d_{AB} könnte theoretisch von den Kandidaten A und B abhängen, deshalb schreiben wir diese beiden Kandidaten in den Index, wir werden aber am Ende sehen, dass dies nicht der Fall ist.

Beweis: $\mathbf{d_{AB}}$ ist ein „Diktator für A"
Jetzt wollen wir zeigen, dass Wähler d_{AB} die folgende – etwas merkwürdige – Eigenschaft hat: Wenn d_{AB} eine Alternative C schlechter als A findet, und $C \neq B$ ist, dann ist auch im Gesamtergebnis C schlechter als A.
In Kurzschreibweise: $C \neq B$ und $C <_{d_{AB}} A \Rightarrow C < A$ $(*)$
Dazu starten wir mit einem beliebigen Wahlergebnis, in der Wähler d_{AB} A vor C bevorzugt.

Ausgangswahl:

Wähler	1	$\cdots$	d_{AB}	$\cdots$	m
1. Alternative			A		
$\vdots$	A/C	A/C	$\vdots$	A/C	A/C
n. Alternative			C		

Jetzt nehmen wir an, dass zusätzlich Kandidat B antritt, und die Wähler 1 bis $d_{AB}-1$ halten B für schlechter als A und C, die Wähler $d_{AB}+1$ bis m für besser als A und C und Person d_{AB} B zwischen A und C einordnet.

Hilfswahl 1:

Wähler	1	$\cdots$	d_{AB}	$\cdots$	m
1. Alternative	A/C	A/C	A	B	B
$\vdots$			B	A/C	A/C
n. Alternative	B	B	C		

Auch das Ergebnis dieser Wahl kann man noch nicht direkt erkennen. Deshalb betrachten wir noch eine zweite einfachere Hilfswahl nur mit den drei Kandidaten A, B und C und wickeln dann das Feld sozusagen von hinten auf. Den Ausgang dieser Wahl seht ihr hier:

Hilfswahl 2:

Wähler	1	$\cdots$	$d_{AB}-1$	d_{AB}	$\cdots$	m	Ergebnis
1. Alternative	A	A	A	B	B	B	B
2. Alternative	C	C	C	A	A	A	A
3. Alternative	B	B	B	C	C	C	C

Das Ergebnis dieser Wahl kann man leicht erkennen: Ausnahmslos alle Wähler fanden A besser als C. Also muss auch im Ergebnis A vor C platziert sein (Bedingung 1). Tritt hingegen Kandidat C zurück, so erhalten wir die Wahl $d_{AB}-1$

aus dem Abschnitt „Bestimmung des Diktators“ mit deren Hilfe wir den Wähler d_{AB} identifiziert haben. In dieser Wahl hat Kandidat B Kandidat A geschlagen, also muss (Bedingung 2) auch in unserer Wahl hier B im Ergebnis vor A liegen. Das Ergebnis dieser Wahl lautet also $B > A > C$.

Gehen wir jetzt zurück zur Hilfswahl 1. Hier kennen wir die Abstimmungsergebnisse weniger genau, dennoch können wir mit fast dem gleichen Argument wie eben zeigen, dass $A > B$ sein muss (denn wenn C zurücktritt, erhalten wir die Wahl d_{AB}). Tritt nun bei beiden Hilfswahlen der Kandidat A zurück, sieht das Abstimmungsergebnis genau gleich aus, deshalb muss auch die Reihenfolge der Kandidaten B und C bei beiden Wahlen übereinstimmen (Bedingung 2). Bei Hilfswahl 2 haben wir bereits begründet, dass $B > C$ ist, deshalb muss auch bei Hilfswahl 1 gelten, dass $B > C$. Die Gesamtreihenfolge ist hier also $A > B > C$.

Unsere ursprüngliche Wahl unterscheidet sich aber nicht mehr von Hilfswahl 1, wenn alle Kandidaten außer A und C zurücktreten. Also muss auch hier gelten $A > C$.
Dies zeigt die Aussage $(*)$.

Es gibt nur einen Diktator

Die Eigenschaft des Wählers d_{AB}, die wir eben bewiesen haben, ist ziemlich seltsam, und allein dafür verdient er noch nicht den Titel „Diktator“. Wir können aber zeigen, dass es tatsächlich nur einen Diktator gibt, da alle kleinen Diktatoren d_{AB}, d_{AC}, d_{BC} etc. identisch und unabhängig von den Alternativen A, B, C sind. Dazu zeigen wir zunächst:

$$d_{AC} \leq d_{AB} \leq d_{CA} \text{ für alle Alternativen } A, B \text{ und } C$$

Dazu nehmen wir an, das Gegenteil wäre wahr, also (1) $d_{AC} > d_{AB}$ oder (2) $d_{AB} > d_{CA}$ und zeigen, warum dies zu einem Widerspruch führt.
(1) Angenommen es wäre $d_{AC} > d_{AB}$. Wir betrachten die folgende Wahl zwischen den Alternativen A und C:

Wähler	1	$\cdots$	d_{AB}	$\cdots$	d_{AC}	$\cdots$	m
1. Alternative	A	A	A	A	C	C	C
2. Alternative	C	C	C	C	A	A	A

Alle Wähler vor d_{AC} (also insbesondere auch Wähler d_{AB}) finden A besser als C, d_{AB} und alle darauffolgenden Wähler bevorzugen C vor A.

Was können wir über das Ergebnis dieser Wahl sagen? Nach der Definition von d_{AC} (betrachte den ersten Abschnitt und ersetze überall den Buchstaben B durch C) müsste $C > A$ gelten. Allerdings ist d_{AB} „Diktator für A“ und findet A besser als C. Als müsste $A > C$ gelten. Widerspruch.
(2) Angenommen es wäre $d_{AB} > d_{CA}$. Wir betrachten die folgende Wahl zwischen den Alternativen A und C:

Wähler	1	$\cdots$	d_{CA}	$\cdots$	d_{AB}	$\cdots$	m
1. Alternative	C	C	C	A	A	A	A
2. Alternative	A	A	A	C	C	C	C

Alle Wähler bis einschließlich d_{CA} finden C besser als A, alle Wähler nach d_{CA} (also insbesondere auch Wähler d_{AB}) bevorzugen A vor C.
Was müsste hier herauskommen? Nach der Definition von d_{CA} müsste $C > A$ gelten. Allerdings ist d_{AB} „Diktator für A" und findet A besser als C. Als müsste $A > C$ gelten. Widerspruch.
Umgekehrt können wir aber auch (indem wir im obigen Argument A und C vertauschen) zeigen, dass $d_{CA} \leq d_{AC}$ ist. Zusammen folgt daraus:

$$d_{AC} = d_{AB} = d_{CA} \text{ für beliebige Alternativen } A, B \text{ und } C$$

Betrachten wir nun vier beliebige Alternativen A, B, C und D, so gilt nach dem soeben Gezeigten:

$$d := d_{AB} = d_{AC} = d_{CA} = d_{CD}$$

Der Diktator d_{AB} ist also völlig unabhängig von der Wahl der Alternativen A und B. Wir nennen ihn daher einfach d, und d ist der ultimative Diktator und bestimmt das Wahlergebnis ganz alleine.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 138

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Frau Frey und ihre Töchter

Frau Frey ist 32 Jahre alt. Ihre beiden Töchter Jana und Laura sind zusammen halb so alt wie Frau Frey und Laura wurde zwei Jahre nach Jana geboren.
Wie lange dauert es, bis Jana und Laura zusammen genau so alt sind wie ihre Mutter und wie alt sind die drei dann? (MG)

Lösung:

Derzeit sind Jana und Laura zusammen $32 : 2 = 16$ Jahre alt. Da sich ihre Alter um zwei Jahre unterscheiden, ist Jana 9 Jahre und Laura 7 Jahre alt.
In n Jahren seien Jana und Laura zusammen genau so alt wie ihre Mutter. Es gilt dann also

$$32 + n = 9 + n + 7 + n = 16 + 2n,$$

also ist $n = 16$.
Also sind Jana und Laura in 16 Jahren zusammen genau so alt wie ihre Mutter. Dann ist Jana 25 Jahre, Laura 23 Jahre und Frau Frey 48 Jahre alt.

II. Niemals eine Quadratzahl

Es sei $P(n) = 4n^2 + 6n + 4$.

Dann gibt es keine natürliche Zahl n, sodass $P(n)$ eine Quadratzahl ist. Zeige dies. (H.F.)

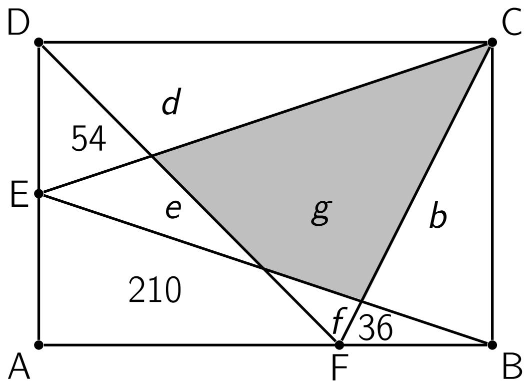
Lösung:

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 6n + 4 < 4n^2 + 8n + 4 = (2n+2)^2$$

Folglich liegt $P(n)$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen und kann daher keine Quadratzahl sein.

III. Flächeninhalt



Im Rechteck $ABCD$ sind vier Transversalen eingezeichnet, die das Rechteck in Dreiecke und Vierecke zerlegen.

Von drei dieser Figuren sind die Flächeninhalte bekannt – sie sind in der nebenstehenden Figur eingetragen.

Bestimme die Fläche des schraffierten Vierecks.

(H.F.)

Lösung:

(1) $|BCE| = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AB| = \frac{1}{2}|ABCD|$

Aus (1) folgt:

(2) $|ABE| + |CDE| = \frac{1}{2}|ABCD|$

Ferner ist

(3) $|CDF| = \frac{1}{2}|CD| \cdot |AD| = \frac{1}{2}|ABCD|$

und daher

(4) $|BCF| + |AFD| = \frac{1}{2}|ABCD|$

Mit den Bezeichnungen der Figur und (1)-(4) gilt dann

$b + g + e = (210 + f + 36) + (54 + d) = g + d + f = (54 + e + 210) + (36 + b)$

Insbesondere gilt:

$b + g + e = (54 + e + 210) + (36 + b)$ und daher $g = 54 + 210 + 36 = 300$.

IV. Zahlenknobelei

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ & E & I & N & S \\ & E & I & N & S \\ + & E_{U_3} & I_{U_2} & N_{U_1} & S \\ \hline & V & I & E & R \end{array}$$

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern, sodass eine korrekte Addition entsteht.
Dabei sind gleichen (verschiedenen) Buchstaben gleiche (verschiedene) Ziffern und E nicht die Null zuzuordnen.
Wir bezeichnen die Additionsüberträge der von rechts nach links gezählten $1., 2.$ und $3.$ Spalte in die $2., 3.$ und $4.$ Spalte mit U_1, U_2 und U_3. (H.F.)

Lösung:
Vorweg: Für die Additionsüberträge gilt: $0 \leq U_1, U_2, U_3 \leq 3$.
Aus Spalte 4 folgt: $4E + U_3 < 10$. Also ist $E = 1$ oder $E = 2$.
Sei $E = 2$. Dann ist $U_3 = 1$. U_3 könnte auch 0 sein, zum Beispiel wenn $I = 0$ ist, aber dann muss $N = 3$ sein und somit $I = 1$ – Widerspruch.
Für die 3. Spalte gilt: $4I + U_2 = U_3 \cdot 10 + I$ und daher

(1) $3I + U_2 = U_3 \cdot 10$

Daraus folgt mit $U_3 = 1$, dass $3I + U_2 = 10$ ist und somit $I = 3$, $U_2 = 1$ ist.
Nun gilt (Spalte 2): Es gibt kein N, sodass $4N + U_1 = U_2 \cdot 10 + E = 12$ zutrifft.
Aus $4N + U_1 = 12$ folgt $N \leq 3$. Da $U_1 \leq 3$, folgt $N = 3$, aber dies ist nicht möglich da bereits $I = 3$ ist – ein Widerspruch.
Folglich ist $E = 1$

Aus (1) und $U_2 \leq 3$ folgt, dass $I = 0, I = 3, I = 6$ oder $I = 9$ ist.

(2) Für die 2. Spalte gilt: $4N + U_1 = U_2 \cdot 10 + 1$

Für $I = 0$ ist $U_2 = 0$ wegen (1) und daher $N = 0$ wegen (2), sodass also $N = I$ – ein Widerspruch.
Für $I = 6$ ist $U_3 = 2$ wegen (1), mithin $V = 4 \cdot E + U_3 = 6$ – ein Widerspruch.
Für $I = 9$ ist $U_3 = 3$ wegen (1) und daher $V = 7$.
Aus (1) ergibt sich nun für $I = 9$, dass $U_2 = 3$ ist. Damit erhält man aus (2): $4N + U_1 = 31$, wonach $N = 7$ ist – im Widerspruch zu $V = 7$.
Da man so $I = 0, I = 6$ und $I = 9$ ausschließen kann, ist $I = 3$.
Für $I = 3$ erhält man aus (1), dass $U_3 = U_2 = 1$ ist. Für $U_3 = 1$ ist $V = 5$; für $U_2 = 1$ lautet (2): $4N + U_1 = 11$. Also ist $N = 2$ und $U_1 = 3$.
Wegen $U_1 = 3$ gilt: $4S = U_1 \cdot 10 + R = 30 + R$, sodass $S = 8$ oder $S = 9$ ist.
Für $S = 8$ ist $R = 2$ und daher $R = N$ – ein Widerspruch. Also ist $S = 9$ und $R = 6$.

Die Lösung heißt also: $EINS = 1329$ und $VIER = 5316$.

V. Lauter verschiedene Jahreszahlenziffern

Die Jahreszahl 2019 hat vier verschiedene Ziffern.
Wann war es zuletzt so und wann wird es das nächste Mal so sein, dass die Jahreszahl aus vier verschiedenen Ziffern besteht? (MG)

Lösung:
Zuletzt war es letztes Jahr, also 2018, so und das nächste Mal wird es 2031 so sein.

VI. Eine schwere Gans

Eine Weihnachtsgans wiegt $2\frac{1}{2}$kg und die Hälfte ihres Gewichtes.
Wie schwer ist die Gans? (H.F.)

Lösung:
Die Gans wiegt keineswegs $2\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = 3\frac{1}{4}$kg.
Ist nämlich ihr Gewicht $x$kg, so gilt: $x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$, sodass $x = 5$ ist.
Alternative Argumentation:
Wiegt die Gans $2\frac{1}{2}$kg und die Hälfte ihres Gewichtes, so muss die andere Hälfte die angegebenen $2\frac{1}{2}$kg sein. Somit wiegt sie $2\frac{1}{2}$kg+$2\frac{1}{2}$kg= 5kg.

VII. Unbekannte Ziffer

Bestimme eine positive ganze Zahl x und eine Ziffer y, sodass gilt:
$(423 + 3 \cdot x)^2 = 221y41$

Lösung:
Wegen $423 = 3 \cdot 141$ ist $(423 + 3x)^2 = 9 \cdot (141 + x)^2$. Somit ist $221y41$ ein Vielfaches von 9, deren Quersumme $2 + 2 + 1 + y + 4 + 1 = 10 + y$ ebenfalls ein Vielfaches von 9 ist. Also ist $y = 8$.
Nun gilt: $221841 = 9 \cdot 157^2$. Damit folgt aus (1):
$(141 + x)^2 = 157^2$. Daher ist $x = 16$. (H.F.)

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Claudia kauft ein

Claudia macht eine Einkaufstour. Zunächst kauft sie Getränke für 10% ihres Geldes. Danach gibt sie in der Metzgerei 20% des ihr noch verbliebenen Betrags aus. Dann kauft sie für 30% des Rests Lebensmittel. Zum Schluss leistet sie sich für die noch verbliebenen 252 € ein Paar Wanderschuhe.

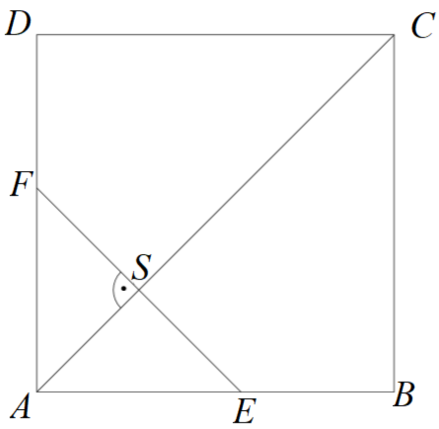
a) Wie viel Geld hatte Claudia anfangs?
b) Was haben die einzelnen Einkäufe gekostet? (WJB)

II. Altersbestimmung

Mathis bemerkt, dass die Telefon-Nummern 264969, 458440 und 661983 seiner drei Freunde bei der Division durch sein Alter (in ganzen Jahren) stets den gleichen Rest ergeben und dass dieser Rest das ganzzahlige Alter seiner Enkelin ist. Wie alt sind Mathis und seine Enkelin? (H.F.)

III. Länge einer Diagonalen

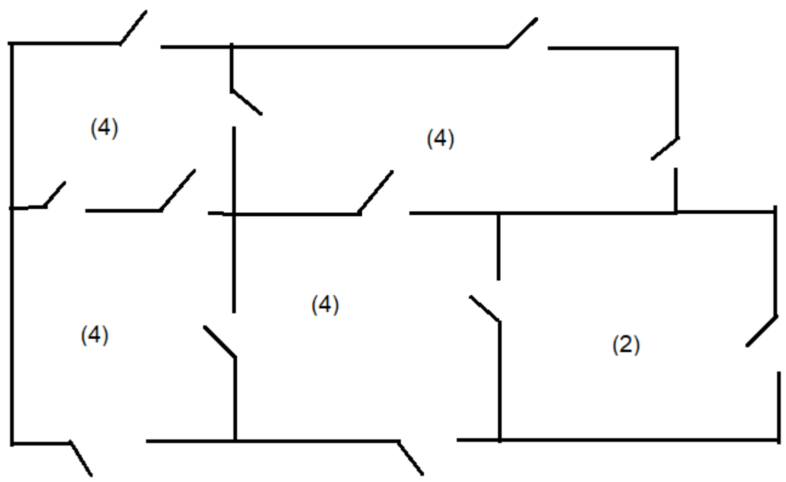
Im Quadrat $ABCD$ seien der Punkt E auf der Seite AB und der Punkt F auf der Seite AD so gewählt, dass gilt:



Die Strecke EF ist orthogonal zur Diagnoale AC und wenn S der Schnittpunkt von EF und AC ist, dann sei $|SC| = |EF| = 12$.
Wie lang ist dann die Diagonale AC? (H.F.)

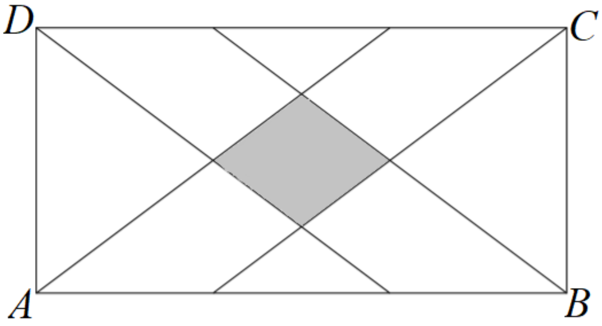
IV. Frische Luft

In einem Gebäude sind manche Räume durch Türen miteinander verbunden. Außerdem gibt es Türen ins Freie.
Zeige: Gibt es (wie im skizzierten Beispiel) in jedem Raum eine gerade Anzahl von Türen, so ist auch die Anzahl der Türen ins Freie gerade. (WJB)



V. Flächenverhältnis im Rechteck

In einem Rechteck werden die Seiten in drei gleiche Teile geteilt. Die Teilungspunkte werden jeweils mit der weiter entfernten Ecke verbunden.



a) Zeige, dass das Verhältnis der Fläche des gefärbten Rechtecks zur Fläche des Rechtecks unabhängig von den Seitenlängen des Rechtecks ist und bestimme dieses Verhältnis.

b) Gilt diese Aussage auch für beliebige Parallelogramme $ABCD$? (WJB)

VI. Addition ohne Übertrag

Wie viele Paare von ganzen Zahlen ≥ 0 gibt es, die beide höchstens zehnstellig sind und bei deren Addition kein Übertrag stattfindet? (H.F.)

VII. Verpackung von Früchten

In einer Obstplantage wurden an einem Tag 21600 Apfelsinen, 18000 Mandarinen und 4500 Pampelmusen geerntet.

Diese Früchte sollen in Kisten verpackt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:

1) alle Kisten enthalten die gleiche Anzahl von Früchten;
2) in jeder Kiste sind nur Früchte der gleichen Sorte;
3) die Anzahl der Früchte in den Kisten ist möglichst groß.

Wie viele Früchte sind in jeder Kiste und wie viele Kisten werden gefüllt? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1246: Wahr oder falsch?

Es gibt zwei natürlichen Zahlen n und m derart, dass $m = \sqrt{15n + 12}$ ist. Begründe dies. (WJB)

Aufgabe 1247: Zahlen gesucht

Zwei Zahlen x und y addieren sich zu 20. Multipliziere ihre Differenz mit ihrem Produkt. Für welche Werte x und y ist das Ergebnis maximal,

a) wenn wir für x und y nur ganze Zahlen zulassen?

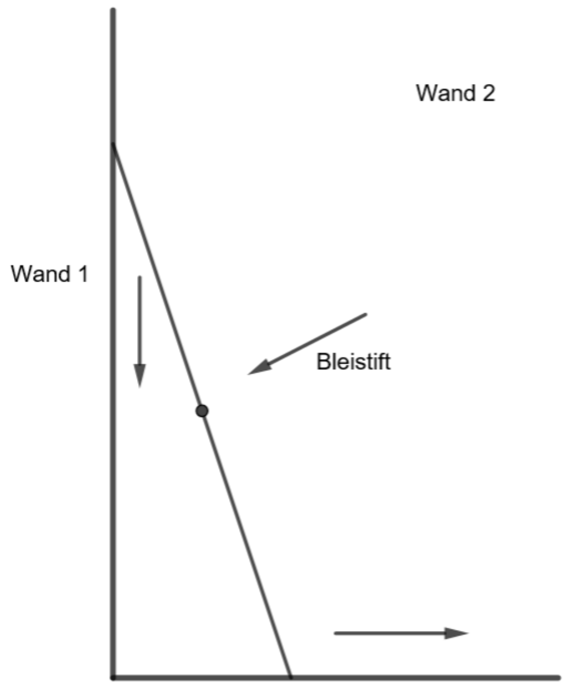
b) ohne diese Einschränkung? (WJB)

Aufgabe 1248: Umfang und Fläche eines Trapezes

Im Trapez $ABCD$ mit $AB||CD$ und $|AD| = |BC| = 30$ haben die Diagonalen AC und BD die Länge 40 und sie sind orthogonal zu den Trapezseiten CB und DA. Berechne den Umfang U und die Fläche F des Trapezes. (H.F.)

Aufgabe 1249: Rutschende Leiter

In der Ecke eines Raumes lehnt eine Leiter an Wand 1. In der Mitte dieser Leiter ist ein Bleistift befestigt. Die Spitze dieses Bleistiftes berührt Wand 2. Rutscht die Leiter nun weg, hinterlässt der Stift eine Spur an Wand 2.



a) Gib in einer Skizze an, welchen Weg die Bleistiftspitze zurücklegen wird.

b) Wie lautet die Funktionsgleichung der Bleistiftlinie?

(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 1250: Spiele

a) Anfangs liegen 100 Stäbchen auf dem Tisch. Sophia spielt mit ihrer Freundin Annette folgendes Spiel: Abwechselnd nimmt jede von ihnen ein oder zwei Stäbchen weg. Wer das letzte Stäbchen nimmt, verliert das Spiel. Wenn Annette als erste zieht, dann kann Sophia sicher sein zu gewinnen. Wie muss sie dazu spielen?

b) Sophia und Annette ändern die Spielregeln. Zuerst liegen wieder 100 Stäbchen auf einem Haufen. Wer beginnt, teilt diesen Haufen in zwei Teile, wobei jeder Teil mindestens aus einem Stäbchen besteht. Danach teilt jede von ihnen im Wechsel eines der jeweils vorhandenen Teile wieder in zwei Teile, solange bis alle Teile aus nur einem Stäbchen bestehen. Jetzt gilt: Wer beginnt, gewinnt. Warum? (WJB)

Aufgabe 1251: Zufällige drei Punkte

Wähle auf einem Kreis drei Punkte A, B und C zufällig und unabhängig von einander. Bestimme den Erwartungswert des Winkels γ bei C im Dreieck ABC!(WJB)

Aufgabe 1252: Vielfache von 19

Es seien x und y ganze Zahlen, für die $2x + 3y$ ein Vielfaches von 19 ist.
Dann gilt: $11x + 7y$ ist ein Vielfaches von 19.
Beispiel: für $x = 10$ und $y = 6$ ist $2x + 3y = 2 \cdot 19$ und $11x + 7y = 152 = 8 \cdot 19$. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 138

Klassen 9–13

Aufgabe 1239: Welche Zahl entsteht?

Zu jeder der vier Zahlen 10, 11, 28, 30 soll dieselbe natürliche Zahl n addiert werden, damit aus der offensichtlich falschen Gleichung $10 \cdot 30 = 11 \cdot 28$ eine richtige Gleichung wird.
Bestimme die natürliche Zahl n. (WJB)

Lösung:
Wir bestimmen n aus $(10 + n)(30 + n) = (11 + n)(28 + n)$, das heißt $300 + 40n + n^2 = 308 + 39n + n^2$, also $n = 8$.
Tatsächlich gilt $18 \cdot 38 = 19 \cdot 36$.

Aufgabe 1240: Errichtung eines Denkmals

Auf einem quadratischen Platz soll ein würfelförmiges Denkmal errichtet werden. Dabei sollen zur Pflasterung des Bodens und zur Errichtung des Denkmals jeweils gleich viele würfelförmige Steine gleicher Größe verwendet werden. Zudem soll die Seitenlänge des Platzes mindestens 7 mal so lang wie die Kantenlänge des Denkmals sein.
Welches ist die kleinste Möglichkeit, das Bauvorhaben zu realisieren? (H.F.)

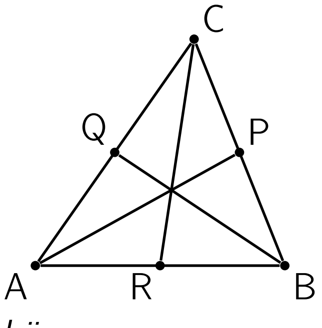
Lösung:
Die Kantenlänge des Platzes betrage P Steine, die des Denkmals D Steine.
Dann ist die kleinste Lösung der Gleichung $D^3 = P^2$ mit der Nebenbedingung $7D \leq P$ gesucht.
Wir testen einige kleine D-Werte der Gleichung, ob die zugehörigen P-Werte ganzzahlig sind oder nicht.

D	1	2	3	4	$\cdots$	9	$\cdots$	16	$\cdots$	25	$\cdots$	49	$\cdots$
D^3	1	8	27	64	$\cdots$	729	$\cdots$	4096	$\cdots$	15625	$\cdots$	117649	$\cdots$
P	1	$\sqrt{8}$	$\sqrt{27}$	8	$\cdots$	27	$\cdots$	64	$\cdots$	125	$\cdots$	343	$\cdots$

$D = 49, P = 343$ ist die kleinste ganzzahlige Lösung von $D^3 = P^2$ mit $7D \leq P$.
Bemerkung: Jedes Paar $D = n^2, P = n^3, n = 1, 2, 3, \ldots$ ist eine Lösung der Gleichung $D^3 = P^2$ wegen $(n^2)^3 = (n^3)^2$.

Aus $P^2 = D^3$ folgt $P = \sqrt{D^3} = D\sqrt{D}$. Damit P ganzzahlig ist, muss D eine Quadratzahl sein. Aus $7D \leq P = D\sqrt{D}$ folgt $7 \leq \sqrt{D}$ und damit $D \geq 49$.
Also ist $D = 49$, $P = 343$ die kleinste ganzzahlige Lösung von $P^2 = D^3$ mit $7D \leq P$.

Aufgabe 1241: Zerlegung eines Dreiecks



Im beliebigen Dreieck ABC mit der Fläche F seien P, Q, R die Seitenmittelpunkte. Die drei Strecken AP, BQ, CR zerlegen das Dreieck ABC in sechs Teildreiecke. Zeige: Jedes der sechs Teildreiecke hat die Fläche $\frac{1}{6}F$. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:
Die Teildreiecke und ihre Flächen seien mit $F_1, F_2, \ldots, F_6$ bezeichnet. In den Dreiecken F_1 und F_2 haben die Grundseiten die gleiche Länge. Die Höhen sind ebenfalls gleich. Es gilt also:

(1) $F_1 = F_2$.

Ganz analog begründet man

(2) $F_3 = F_4$ und $F_5 = F_6$.

Die Dreiecke BQA und BCQ haben Grundseiten gleicher Länge und die gleiche Höhe, also auch die gleiche Fläche, so dass $F_1 + F_2 + F_6 = F_3 + F_4 + F_5$ ist. Mit (1) und (2) folgt $2F_1 + F_6 = 2F_3 + F_6$ und somit ist

(3) $F_1 = F_3$.

Auch die Dreiecke ABP und APC haben die gleiche Fläche. Also ist $F_1+F_2+F_3 = F_4 + F_5 + F_6$, woraus mit (1),(2) $2F_1 + F_3 = F_3 + 2F_5$ folgt. Damit ist

(4) $F_1 = F_5$.

Insgesamt gilt also: $F_1 = F_2 = ... = F_6$ und wegen $F_1 + F_2 + ... + F_6 = F$ folgt daraus $F_1 = \frac{1}{6}F$; also ist $F_2 = \frac{1}{6}F, F_3 = \frac{1}{6}F, \dots, F_6 = \frac{1}{6}F$.

Aufgabe 1242: Handys in der Schule

Am Schultor französischer Schulen werden die Mobiltelefone aller n Schülerinnen und Schüler morgens eingesammelt und nach Schulschluss wieder ausgegeben. Nun ist der erste Schüler bei der Rückgabe unaufmerksam und nimmt sich einfach wahllos eines der Mobiltelefone. Alle nachfolgenden Schülerinnen und Schüler machen dann folgendes: Wenn ihr eigenes Mobiltelefon noch da ist, nehmen sie dieses. Ansonsten nehmen sie wahllos eines der anderen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhält die letzte Schülerin/der letzte Schüler ihr/sein eigenes Mobiltelefon zurück?

a) Untersuche dies zunächst für $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und äußere eine Vermutung.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit p für ein beliebiges n.

(Achim Klenke, Uni Mainz)

Lösung:

a) Mit Baumdiagramm und Pfadregeln ergibt sich für $n = 2, n = 3$ und $n = 4$ jeweils $p = \frac{1}{2}$.

b) Die Schülerinnen und Schüler werden durchnummeriert nach der Reihenfolge ihres Erscheinens. Jeder Schüler/jede Schülerin k wählt nun mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine von $n + 1 - k$ Karten: Eine der Karten ist rot, eine schwarz und die anderen tragen die Nummer $k + 1, k + 2, ..., n - 1$. Sei N_k das zuällige Ergebnis auf der Karte.

- „Rot" entspricht dabei dem Ereignis, dass der Schüler, die Schülerin das eigene Mobiltelefon wählen würde $(k = 1)$ bzw. das eine, das fälschlicherweise im Topf liegt, wenn Schüler/Schülerin k an der Reihe ist.
  Mit anderen Worten, finden in diesem Fall alle nachfolgenden SchülerInnen ihr eigenes Mobiltelefon.

- $N_k = j$ heißt, dass der Schüler/die Schülerin das Mobiltelefon des Schülers/der Schülerin j wählen würde, wenn ihr/sein eigenes nicht mehr da ist.

- „Schwarz" entspricht $N_k = n$

Zieht die/der erste SchülerIn die Karte j, so erhalten die SchülerInnen $2, 3, ..., j-1$ ihr eigenes Mobiltelefon und SchülerIn j zieht eine Karte. Ist $N_j = l$, so bekommen die SchülerInnen $j+1, j+2, ...l-1$ ihr eigenes Mobiltelefon und SchülerIn l zieht eine Karte. Dies geht so lange, bis ein Schüler/eine Schülerin eine schwarze oder eine rote Karte zieht. Ist die Karte rot, so bekommen alle weiteren SchülerInnen ihr eigenes Mobiltelefon zurück. Ist die Karte schwarz, so bekommen alle bis auf die/den letzte/n Schüler/in ihr/sein Mobiltelefon zurück. Die/der letzte Schüler/in erhält ein fremdes Mobiltelefon. Da die Situation offenbar symmetrisch ist, ist $p = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 1243: Universelle Teiler

Für zwei natürliche Zahlen m und n mit Zifferndarstellung $m = m_1 \cdots m_k$ und $n = n_1 \cdots n_l$ im Dezimalsystem, bezeichnen wir mit n & m die Verkettung der Zahlen n und m, also die Zahl, die entsteht, indem man die Ziffern von m unmittelbar rechts neben die Ziffern von n schreibt. n & m hat also die Zifferndarstellung $n_1 \cdots n_l m_1 \cdots m_k$.

Wir nennen eine natürliche Zahl m einen universellen Teiler, wenn sie für jede beliebige Zahl n die Verkettung n & m teilt. Zum Beispiel ist $m = 10$ ein universeller Teiler, denn n & 10 endet auf 10, und 10 teilt jede Zahl, deren letzte Ziffer 0 ist. Finde alle universellen Teiler. (H.F)

Lösung:

Es sei m eine k-ziffrige Zahl, $k = 1, 2, 3, ...$ und n eine beliebige natürliche Zahl. Wenn man nun die Ziffern vom m rechts neben die letzte Ziffer von n schreibt, so erhält man die Zahl $z = 10^k \cdot n + m$. Dann teilt m jede Zahl z genau dann, wenn m jede Zahl $10^k \cdot n$ und daher auch jede Zahl 10^k teilt. Daraus folgt: Die universellen Teiler sind $1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, 250, ...$

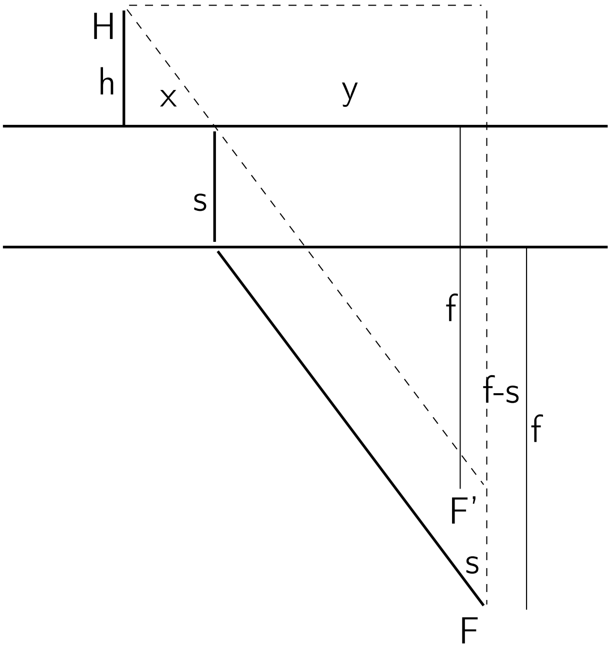
Aufgabe 1244: Teilbarkeit

Zeige, dass $n \cdot (n^3 - n)$ für jedes n durch 12 teilbar ist. (WJB)

Lösung:

Es gilt $n \cdot (n^3 - n) = n^2 \cdot (n^2 - 1) = n^2 \cdot (n-1) \cdot (n+1)$. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$, n, $n+1$ ist eine durch 3 teilbar. Ist n gerade, so ist n^2 durch 4 teilbar, sonst sind $n-1$ und $n+1$ gerade, das Produkt also teilbar durch 4.

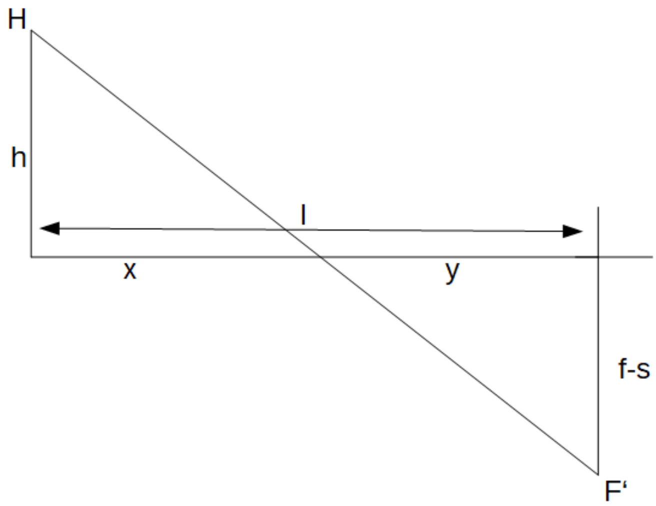
Aufgabe 1245: Vom Hof zur Scheune



Ein Bauer, dessen Ackerfläche von einem Bach durchschnitten wird, erhält die Genehmigung, über diesen eine Brücke zu bauen. Die Brücke wird $s = 20m$ lang.
Wo muss er die Brücke bauen, um einen möglichst kurzen Gesamtweg von seinem Hof H zu seiner Feldscheune F zu erreichen. Wie lang ist dieser Weg w? (WJB)

h und f sind die Abstände von H und F zum Ufer des Bachs bzw. des Hofs, $x + y$ bezeichnet den horizontalen Abstand zwischen F und H sowie $h + s + f$ den vertikalen Abstand.

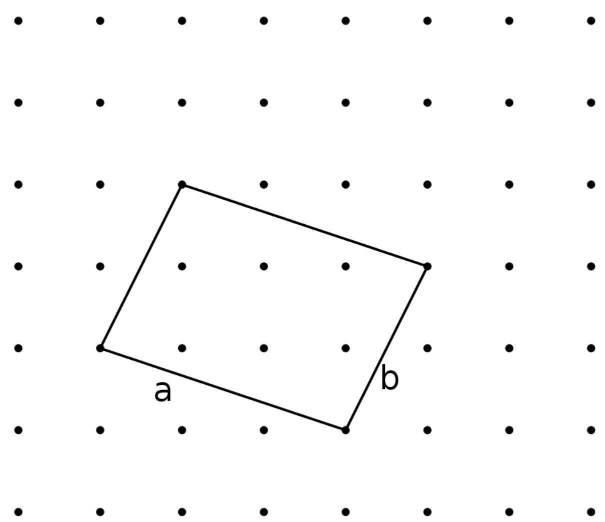
Lösung:
Denken wir uns die beiden Ufer zusammengesetzt, so ist der kürzeste Weg die Strecke $HF' + s$



Es gilt also $\frac{x}{l-x} = \frac{h}{f}$, also $x \cdot f = h \cdot l - h \cdot x$. Daraus folgt $x \cdot (h + f) = h \cdot l$ und somit $x = \frac{h \cdot l}{h+f}$
Für w ergibt sich somit $w = \sqrt{l^2 + (h + f)^2} + s$.

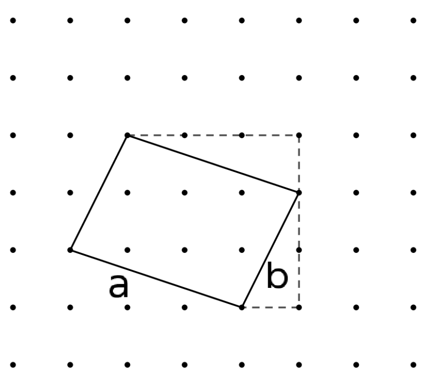
Wo liegt der Fehler?
Flächeninhaltsberechnung
von Christoph Sievert

In das Punkteraster – der Abstand nebeneinanderliegender Punkte beträgt 1 cm – ist ein Rechteck eingezeichnet.



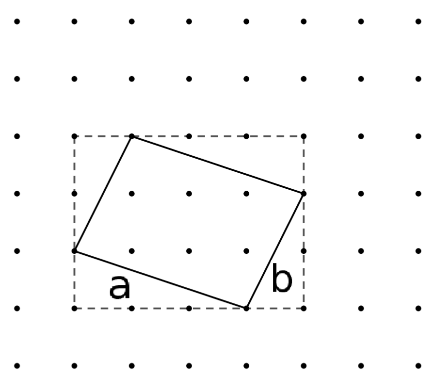
Der Flächeninhalt des Rechtecks lässt sich auf zwei verschiedene Arten berechnen:

a) Bestimmung der Seitenlänge mit Pythagoras



$a = \sqrt{10} \qquad b = \sqrt{5}$
$A = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{50} \approx 7,07 cm^2$

b) direkte Flächenberechnungen



gesamte Fläche $(3 \cdot 4)$ – überstehende Fläche
$A = 12cm^2 - 2 \cdot 1,5cm^2 - 2 \cdot 1cm^2$
$A = 7cm^2$.

Wo liegt der Fehler?

Lösung

Wie hier links etwas deutlicher zu sehen ist, handelt es sich nicht um ein Rechteck, sondern um ein Parallelogramm.

Man darf also nicht die Rechtecksformel $a \cdot b$ anwenden, Lösung b) ist korrekt.

Das kleine eingezeichnete Viereck rechts hat – wie leicht am Raster abgelesen werden kann – vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel, ist also ein Quadrat mit $\alpha = 90°$, der Winkel im Parallelogramm muss also größer sein.

Mit Hilfe der Trigonometrie lässt sich der Winkel im Parallelogramm leicht berechnen: 98,13°.

Die harmonische Reihe I

von Valentin Blomer

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgende Summe

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Wenn n immer größer wird, wird dann S_n beliebig groß, oder strebt es einem endlichen Wert zu? Anhand von Zahlenbeispielen ist das nicht so leicht zu entscheiden. Zum Beispiel ist

$$S_{10} \approx 2,93, \quad S_{100} \approx 5,19, \quad S_{1000} \approx 7,49, \quad S_{1000000} \approx 14,39.$$

Eine Million Summanden führen also nur zu einem Wert von etwas über 14. Im Universum gibt es etwa 10^{80} Atome. Wenn wir so viele Summanden betrachten, wie es Atome im Universum gibt, kommen wir immer noch nicht über 200:

$$S_{10^{80}} \approx 184,78.$$

Die Folge (S_n) zeigt also schon ein gewisses Wachstum, aber das ist unglaublich langsam.* Gibt es zum Beispiel eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $S_n > 1000000$? Ein solches n, wenn es überhaupt existiert, müsste wesentlich größer sein, als es Atome

* Wie berechnet man eigentlich $S_{10^{80}}$? Mein alter Computer schafft es in weniger als einem Wimpernschlag (ich kann das sogar beinahe im Kopf ausrechnen), aber selbst alle Computer der Welt zusammen können nicht 10^{80} Summanden addieren. Es muss also einen clevereren Weg geben, die Summe zu berechnen. Lest weiter, im zweiten Teil dieser Folge im nächsten Heft werdet ihr sehen, wie das geht.

im Universum gibt. Spätestens hier sollten wir die Zahlenbeispiele verlassen und sehen, ob wir mit Mathematik der Sache auf die Spur kommen.

Es ist relativ leicht zu sehen, dass S_n tatsächlich beliebig groß werden kann. Ist $n = 2^k$ eine Zweierpotenz, können wir folgendermaßen nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \Big(\underbrace{\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}}_{4 \text{ Terme}}\Big) + \dots + \Big(\underbrace{\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1} \text{ Terme}}\Big) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}, \end{aligned}$$

und das wird natürlich beliebig groß, wenn k genügend groß ist. Man sieht an dieser Abschätzung bereits, dass S_n mindestens logarithmisch in n wächst, und wir werden das später noch genauer untersuchen. Auf jeden Fall wächst S_n unglaublich langsam, schließlich aber doch über jede Schranke, und diese erstaunliche Tatsache wollen wir an zwei scheinbar unglaublichen Beispielen verdeutlichen.

Die Schnecke auf dem Gummiband

Am Anfang eines Gummibandes von einem Meter Länge sitzt eine Schnecke, am Ende des Gummibandes ist ein leckeres Salatblatt. Die Schnecke kriecht einen Zentimeter pro Minute. Für die 100 Zentimeter des Gummibandes braucht sie also knapp 2 Stunden. Das wäre für die Schnecke kein Problem. Allerdings steht am Ende des Gummibandes ein fieser Wüstling, der das Gummiband jede Minute um einen Meter verlängert. Das ganze spielt sich so ab: Nach einer Minute ist die Schnecke an Zentimeter 1 von 100. Just in diesem Moment wird das Gummiband gleichmäßig um einen Meter verlängert. Es ist jetzt also 2m lang, allerdings sitzt die Schnecke auch bereits an Zentimeter 2, denn das Gummiband kann nur gleichmäßig gedehnt werden. Das ist schlimm für die Schnecke, denn jetzt hat sie nicht 99cm vor sich, sondern plötzlich 198cm. Unverdrossen kriecht sie weiter und ist nach der zweiten Minute an Zentimeter 3 angekommen. Wieder verlängert der Wüstling das Gummiband um einen Meter, also um die Hälfte seiner momentanen Länge. Das Gummiband ist jetzt 3m lang, und die Schnecke sitzt an Zentimeter 4,5. Das Salatblatt ist jetzt 295,5 cm entfernt. Die Schnecke seufzt und kriecht tapfer weiter. Nach einer weiteren Minute ist sie an Zentimeter 5,5 angekommen und wieder tut der Wüstling sein Werk. So geht es weiter, Minute um Minute, Stunde um Stunde, Tag für Tag. Kommt die Schnecke jemals am Salatblatt an? Dumme Frage, keine Chance, im Gegenteil, das Salatblatt rückt mit jeder Minute weiter weg.

Denkste! Wenn die Schnecke nicht aufgibt, wird sie belohnt (zumindest in der Theorie). Und das wollen wir jetzt ausrechnen. Nach n Minuten (aber bevor der Wüstling das Gummiband zum n-ten Mal verlängert hat) ist das Gummiband n Meter $= 100n$ Zentimeter lang. In dieser Zeit hat die Schnecke aus eigener Kraft n Zentimeter zurückgelegt. Der vorletzte Zentimeter bringt ihr allerdings durch das Verlängern des Bandes von $n-1$ auf n Meter in Wahrheit $\frac{n}{n-1}$ cm ein, der vorvorletzte war sogar zweimal einer homogenen Verlängerung ausgesetzt, nämlich von $n-2$ auf $n-1$ und von $n-1$ auf n, bringt also eine Strecke von $\frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-2}$. Der drittletzte Zentimeter ist mit demselben Argument also eine Strecke von $\frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-3}$ wert und so fort. Der erste Zentimeter hat sich durch die fortgestetze Verlängerung des Bandes zu einer Strecke von $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} = n = \frac{n}{1}$ erweitert. Insgesamt hat die Schnecke nach n Minuten also

$$\frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-3} + ... + \frac{n}{1} = n\left(\frac{1}{n-1} + ... + 1\right) = nS_{n-1}$$

Zentimeter hinter sich. Wann kommt sie am Salatblatt an? Wenn

$$nS_{n-1} = 100n \quad \Longleftrightarrow \quad S_{n-1} = 100$$

gilt. Das passiert aber irgendwann, denn S_n wird ja beliebig groß! Es dauert aber lange, sehr lange, nämlich mehr als 10^{37} Jahre (wie man das berechnet, sehen wir in der nächsten Folge). Zum Vergleich, unser Universum ist etwa 10^{10} Jahre alt, die Schnecke braucht also etwa 10^{27}-mal die Lebensdauer unseres Universums. Das übersteigt das menschliche Vorstellungsvermögen bei weitem. Nebenbei übersteigt auch die Länge des Bandes am Ende der Reise unser Vorstellungsvermögen. Vermutlich hat die Schnecke auch irgendwann das Interesse an dem Salatblatt verloren. Es bleibt aber unglaublich, dass zumindest theoretisch die Schnecke ankommen wird, und das liegt an der Divergenz der harmonischen Reihe! Die anfängliche Länge des Gummibandes spielt dabei übrigens keine Rolle, die Schnecke würde auch ankommen, wenn das Gummiband zu Beginn ein Kilometer lang wäre und jede Minute um einen Kilometer verlängert wird.

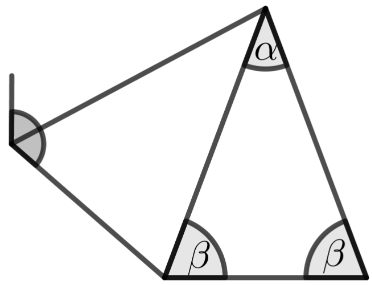
Das zweite Beispiel gibt es im nächsten Heft.

Mosaike
arithmetisch gefunden

von Hartwig Fuchs

Ein regelmäßiges n-Eck, $n \geq 3$, besitzt gleich lange Seiten und gleich große Innenwinkel. Solche Polygone bezeichnen wir als *Fliesen* vom Typ F_n – kurz: Fliesen F_n – und ihre Innenwinkel als $\angle F_n$.

Die Innenwinkel einer Fliese



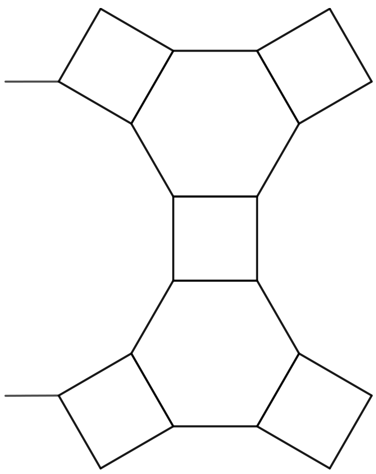
Figur 1

Eine Fliese F_n sei in n kongruente Dreiecke – vergleiche Figur 1 – zerlegt. Der Winkel an der Spitze eines solchen Dreiecks sei α und die Winkel an seiner Basis seien β, β. Dann ist $\alpha = \frac{360°}{n}$ und $\angle F_n = 2\beta = 180° - \alpha = 180° - \frac{360°}{n}$. Folglich:

(1) Jeder Innenwinkel einer Fliese F_n ist $\angle F_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$.

Zerlegung einer Ebene in ein Mosaik

Eine Ebene soll vollständig in Fliesen zerlegt werden und zwar so, dass jede zwei benachbarte Fliesen gemeinsam eine Kante – und damit auch deren beide Endpunkte – besitzen.



Figur 2

Die dabei entstehenden geometrischen Gebilde aus einer Ecke und sämtlicheen in ihr zusammenstoßenden Fliesen $F_g, G_n, F_i, \cdots$ bezeichnen wir als eine *Eckfigur* $(g, h, i, \cdots$ – vergleiche Figur 2.
Wenn dann alle Eckfiguren einer Zerlegung kongruent (deckungsgleich) sind, so nennen wir die Gesamtheit dieser Eckfiguren das *Mosaik*$(g, h, i, \cdots)$ – vergleiche Figur 4 unten.

Mosaike mit Eckfiguren aus k Fliesen – alle Fliesen vom gleichen Typ $\mathbf{F_g}$

Q_1: Für welche $g, g \geq 3$, sind solche Mosaike $(g, g, g, ...)$ möglich?

In jeder Ecke einer Eckfigur $(g, g, g, ...)$ aus k Fliesen F_g gilt wegen (1):

(2) $k \cdot \angle F_g = k \cdot \frac{g-2}{g} \cdot 180° = 360°$, woraus $g = \frac{2k}{k-2}$ folgt. Somit gilt: Ein Mosaik $(g, g, g, ...)$ aus k Fliesen ist nur möglich, falls $g = \frac{2k}{k-2}$ ist.

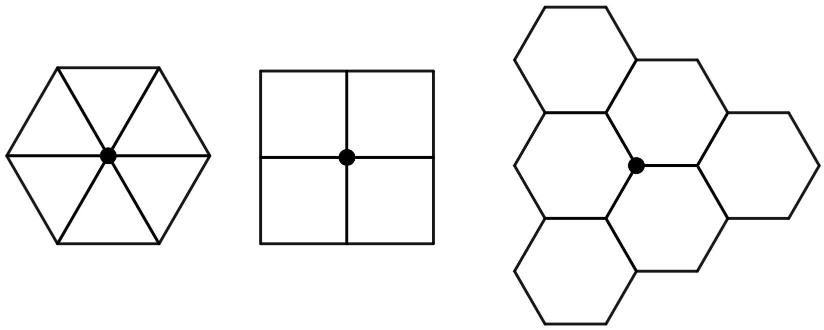
Mit (2) ist die geometrische Frage Q_1 in die arithmetische Frage transformiert: Welche ganzzahligen Lösungen besitzt die Gleichung (2)?
Wir bestimmen die Lösungen von (2), indem wir zunächst $g = \frac{2(k-2)+4}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2}$ schreiben und dann der Reihe nach $k = 2, 3, 4, ...$ setzen.
Ergebnis: $k = 2$ ist auszuschließen; für $k = 5$ und für $k \geq 7$ ist n nicht ganzzahlig.

Für die übrigen k-Werte erhält man folgende Lösungen von (2):

k	3	4	6
g	6	4	3

Geometrische Deutung der Lösungen von (2)

(3) Es gibt – abgesehen von der Größe der Fliesen – genau drei Mosaike mit Eckfiguren aus Fliesen nur eines Typs – vgl. Figur 3: Das Mosaik (666) aus drei regelmäßigen Sechsecken; das Mosaik (4444) aus vier Quadraten; das Mosaik (333333) aus sechs gleichseitigen Dreiecken.



Figur 3

Mosaike aus Eckfiguren mit kFliesen – alle Fliesen von verschiedenem Typ

Es seien $F_g, F_h, F_i, \dots$ die k Typen der k Fliesen.

Q_2: Für welche Zahlen $g, h, i, \dots$ sind solche Mosaike möglich?

Es ist $k \neq 2$

Für $k = 2$ seien F_g, F_h die Fliesen die eine Eckfigur bilden. Dann gilt bei der F_g und F_h gemeinsamen Ecke:

$\angle F_g + \angle F_h = 360^\circ$ – ein Widerspruch wegen $\angle F_g < 180^\circ$ und $\angle F_h < 180^\circ$.

Es sei $k \geq 4$

Bereits für vier Fliesen F_g, F_h, F_i, F_j gilt bei ihrer gemeinsamen Ecke:

$\angle F_g + \angle F_h + \angle F_i + \angle F_j \geq \angle F_3 + \angle F_4 + \angle F_5 + \angle F_6 = 60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ > 360^\circ$ – ein Widerspruch.

Es sei also $k = 3$. Wenn F_g, F_h, F_i eine Eckfigur bilden, dann gilt bei ihrer gemeinsamen Ecke wegen (1):

$\angle F_g + \angle F_h + \angle F_i = \frac{g-2}{g} \cdot 180^\circ + \frac{h-2}{h} \cdot 180^\circ + \frac{i-2}{i} \cdot 180^\circ = 360^\circ$, woraus folgt

(4) $\frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} = \frac{1}{2}$

Aus den ganzzahligen Lösungen der Gleichung (4) ergibt sich eine Antwort auf die Frage Q_2.

Da (4) symmetrisch in g, h und i ist, dürfen wir $g < h < i$ voraussetzen. Da es keine Fliesen F_2 gibt, ist $g \geq 3$.
Wäre nun $g \geq 6$, dann folgt aus (4): $\frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{146}{336} < \frac{1}{2}$. Es gilt daher: $3 \leq g \leq 5$.

Es sei $g = 3$.
Wegen (4) gilt dann: $\frac{1}{h} + \frac{1}{i} = \frac{1}{6}$.
Wäre nun $h \geq 12$, so hätte man $\frac{1}{h} + \frac{1}{i} \leq \frac{1}{12} + \frac{1}{13} < \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ und für $h = 11$ ist $i = \frac{66}{5}$ und somit nicht ganzzahlig. Also ist $h \leq 10$. Für $h \leq 6$ ist $\frac{1}{h} + \frac{1}{i} > \frac{1}{6}$.
Also ist $7 \leq h \leq 10$.
Für $h = 7, 8, 9, 10$ sind die zugehörigen i-Werte – und damit die Lösungen von (4) für $g = 3$ – in der Tabelle (5) angegeben.

Es sei $g = 4$.
Dann ist $h \geq 5$ und nach (4) gilt: $\frac{1}{h} + \frac{1}{i} = \frac{1}{4}$.
Für $h = 7$ ist $i = \frac{28}{3}$ und für $h \geq 8$ hat man $\frac{1}{h} + \frac{1}{i} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
Also gilt: $5 \leq h \leq 6$.
Damit erhält man zwei weitere Lösungen von (4), die sich in Tabelle (5) finden.

Es sei $g = 5$.
Dann ist $h \geq 6$ und mit (4) ergibt sich $\frac{1}{h} + \frac{1}{i} = \frac{3}{10}$.
Für $h = 6$ erhält man daraus $i = \frac{30}{4}$ und für $h \geq 7$ ist $\frac{1}{h} + \frac{1}{i} \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < \frac{2}{7} < \frac{3}{10}$.
Daher hat (4) für $g = 5$ keine Lösung.

(5) Die Lösungen (g, h, i) der Gleichung (4) sind:

g	3	3	3	3	4	4
h	7	8	9	10	5	6
i	42	24	18	15	20	12
	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Die sechs Lösungen (5) der Gleichung (4) ermöglichen eine Antwort auf die Frage Q_2.
Man kann nämlich die Ebene nur dann in ein Mosaik (g, h, i) zerlegen, wenn (g, h, i) eine Lösung von (4) ist (notwendige Bedingung). es bleibt jedoch zu klären – etwa durch Konstruktion – ob es zu jeder Lösung von (4) ein Mosaik gibt. Wie sich herausstellt, ist das nicht der Fall.Tatsächlich gibt es zu keiner von (4, 6, 12) verschiedenen Lösung ein Mosaik – wohl aber für die Lösung (4, 6, 12).

(6) Es gibt – abgesehen von der Größe der Fliesen – nur ein Mosaik mit Eckfiguren aus Fliesen verschiedenen Typs, wobei jeder Typ nur einmal vorkommt: Das Mosaik (4, 6, 12), dessen Eckfiguren aus einem Quadrat, einem regelmäßigen Sechseck und einem regelmäßigen Zwölfeck gebildet sind – vergleiche Figur 2.

Mosaike aus Eckfiguren mit k Fliesen – einige Fliesen (jedoch nicht alle) vom gleichen Typ

Q_3: Für welche Zahlen $S_g, S_h, S_i, \ldots$ gibt es Mosaike M, deren Eckfiguren aus S_g Fliesen F_g, S_h Fliesen F_h, S_i Fliesen F_i, ..., $S_g \neq S_h \neq S_i \neq \ldots$, gebildet sein?

Es sei M eines der in Q_3 gesuchten Mosaike mit r verschiedenen Fliesentypen einer Eckfigur von M:

(7) $2 \leq r \leq 3$

Denn nach Voraussetzung ist $r \geq 2$. Wäre nun $r \geq 4$, dann gilt bereits für vier Fliesen F_g, F_h, F_i, F_j von verschiedenen Typen bei ihrer gemeinsamen Ecke: $\angle F_g + \angle F_h + \angle F_i + \angle F_j \geq \angle F_3 + \angle F_4 + \angle F_5 + \angle F_6 = 60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ > 360^\circ$.
Wegen (7) unterscheiden wir bei der Untersuchung der Frage Q_3 die Fälle $r = 2$ und $r = 3$.

Es sei $r = 2$.
Eine Eckfigur eines Mosaiks M sei aus S_g Fliesen F_g und S_h Fliesen F_h gebildet. Dann gilt:

(8) $k = S_g + S_h$ und $3 \leq S_g + S_h \leq 5$ sowie $g \neq h$ nach Voraussetzung.

Denn in einer Eckfigur von M gilt bei der gemeinsamen Ecke von F_g und F_h: Für $k = 2$ wäre $\angle F_g + \angle F_h < 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$; für $k \geq 6$ wäre $S_g \cdot \angle F_g + S_h \cdot \angle F_h \geq 5 \cdot \angle F_3 + \angle F_4 = 300^\circ + 90^\circ > 360^\circ$.
ferner gilt dort wegen (1):
$S_g \cdot \angle F_g + S_h \cdot \angle F_h = S_g \cdot \frac{g-2}{g} \cdot 180^\circ + S_h \cdot \frac{h-2}{h} \cdot 180^\circ = 360^\circ$, woraus folgt:

(9) $\frac{S_g}{g} + \frac{S_h}{h} = \frac{1}{2}(S_g + S_h) - 1$

Die Bestimmung der ganzzahligen Lösungen von (9) bereitet keine besonderen Schwierigkeiten. Aber sie ist trotz der Einschränkung (8) der S_g – und S_h – Werte doch so aufwändig, dass wir hier nur die Lösungen von (9) auflisten.

g	3	3	3	3	4	5
S_g	3	4	2	1	1	2
h	4	6	6	12	8	10
S_h	2	1	2	2	2	1
	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Die Lösungen von (9) führen zu einer Teilantwort auf die Frage Q_3.
Zunächst: Schreiben wir eine Lösung wie $g = 3, S_g = 2, h = 6, S_h = 2$ als Quadrupel (3, 3, 6, 6), so seien die eventuell zugehörigen Mosaike – unter Berücksichtigung der möglichen Anordnungen der Fliesen in einer Eckfigur – mit (3, 3, 6, 6) und (3, 6, 3, 6) bezeichnet.

Für die Lösungen von (9) gilt dann:

(10) Zu jeder Lösung $\neq$(5, 5, 7) von (9) gibt es ein Mosaik – wenn man von der Größe der Fliesen absieht; zur Lösung (3, 3, 3, 4, 4) gibt es sogar zwei Mosaike bei Berücksichtigung der Fliesenanordnung an der gemeinsamen Ecke. Diese Mosaike (3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 3, 4), (3, 3, 3, 3, 6), (3, 6, 3, 6), (3, 12, 12)und (4, 8, 8) sind in Figur 4 graphisch dargestellt.

Es sei $r = 3$
Eine Eckfigur eines Mosaiks bestehe aus S_g Fliesen F_g, S_h Fliesen F_h und S_i Fliesen F_i. Dann gilt:

(11) $k = S_g + S_h + S_i = 4.$

Denn $k = 2$ ist nicht möglich und für $k = 3$ gilt: $S_g = S_h = S_i = 1$ – ein Fall, der mit (6) erledigt ist.
Wäre $k \geq 5$, so wäre in einer Ecke des Mosaiks $S_g \cdot \angle F_g + S_h \cdot \angle F_h + S_i \cdot \angle F_i \geq 3 \cdot \angle F_3 + \angle F_4 + \angle F_5 = 3 \cdot 60^\circ + 90^\circ + 108^\circ > 360^\circ$.
Wegen (1) gilt nun in einer Ecke des Mosaiks:
$S_g \cdot \frac{g-2}{g} \cdot 180^\circ + S_h \cdot \frac{h-2}{h} \cdot 180^\circ + S_i \cdot \frac{i-2}{i} = 360^\circ$. Daraus folgt:

(12) $\frac{S_g}{g} + \frac{S_h}{h} + \frac{S_i}{i} = \frac{1}{2}(S_g + S_h + S_i) - 1 = 1$

Wegen (11) gibt es für das Tripel (S_g, S_h, S_i) nur die drei Möglichkeiten (2, 1, 1), (1, 2, 1), und (1, 1, 2) – die zu den Gleichungen führen

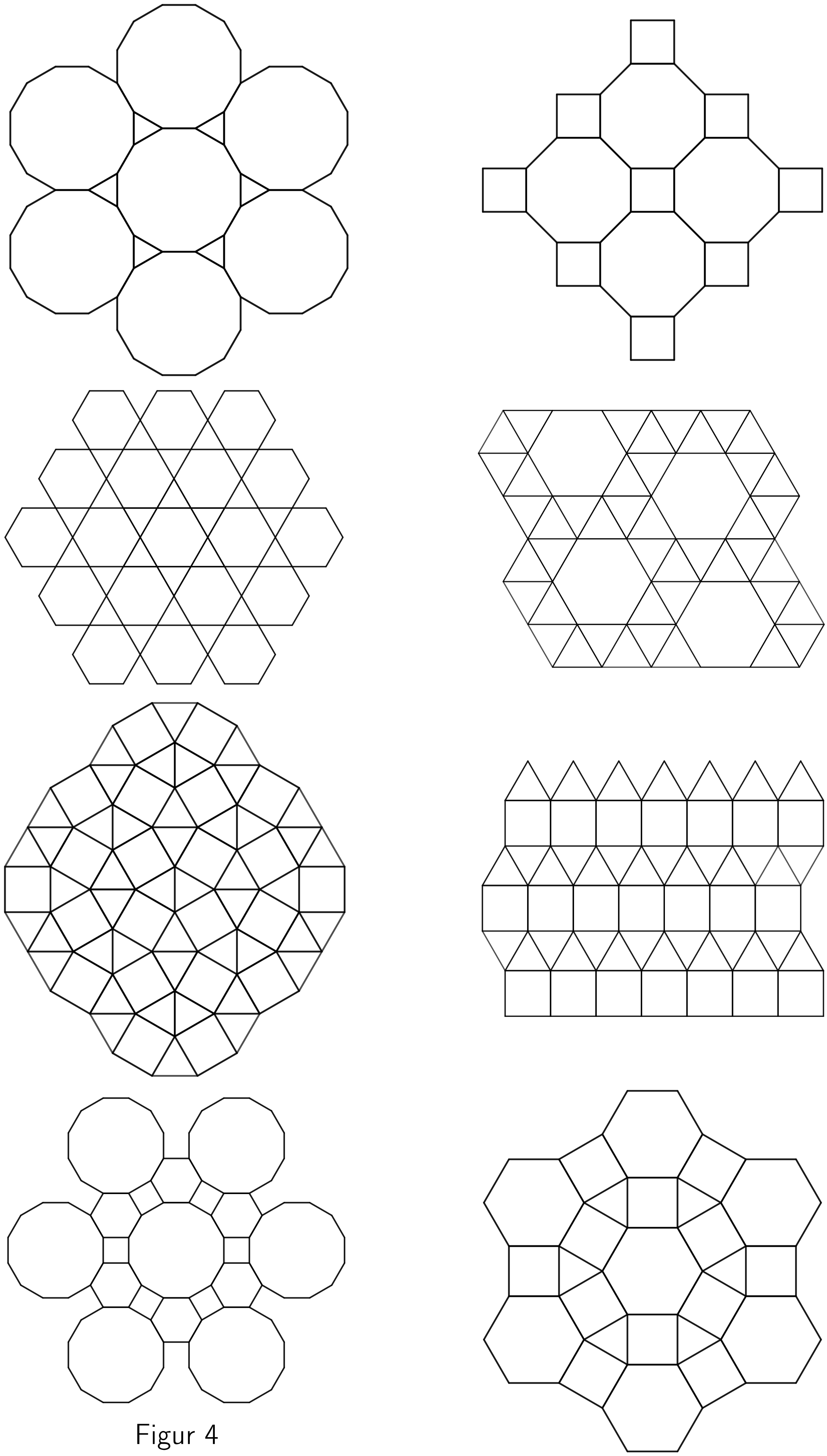
(13) $\frac{2}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} = 1; \frac{1}{g} + \frac{2}{h} + \frac{1}{i} = 1; \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{2}{i} = 1$

Da das Gleichungssystem, aus den Gleichungen (13) symmetrisch ist in g, h und i, dürfen wir $g < h < i$ voraussetzen.
Dann haben die beiden ersten Gleichungen jeweils genau eine Lösung: $(S_g, S_h, S_i) = (2, 1, 1) \Rightarrow (g, h, i) = (3, 4, 12); (S_g, S_h, S_i) = (1, 2, 1) \Rightarrow (g, h, i) = (3, 4, 6)$ die dritte Gleichung hat keine Lösung wegen $\frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{2}{i} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{59}{60} < 1$.
Der Versuch, für die zu den beiden Lösungen gehörigen möglichen Mosaike jeweils eine Eckfigur zu konstruieren, ergibt:

(14) Nur zur zweiten Lösung (3, 4, 6) mit $S_3 = 1, S_4 = 2, S_6 = 1$ gibt es ein Mosaik – wenn man von der Größe der Fliesen absieht – ist es das Mosaik (3, 4, 6, 4) – vergleiche Figur 4.

Mit den Ergebnissen (10) und (14) ist die Frage Q_3 beantwortet. Darüber hinaus sind mit (3), (6), (10) und (14) alle Möglichkeiten für die Existenz weiterer Mosaike erschöpft, sodass gilt:

(15) Es gibt genau 11 Zerlegungen der Ebene in Mosaike – wenn man von der Fliesengröße absieht. In Figur 2 und Figur 4 sind von jedem dieser Mosaike jeweils mehrere Eckfiguren dargestellt.



Figur 4

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
Frank Rehm

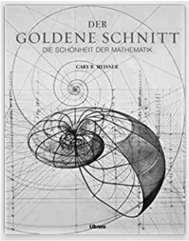
Meisner, Gary B.: Der Goldene Schnitt. Die Schönheit der Mathematik.

Warum wieder ein Buch über den Goldenen Schnitt? Es gibt einige englischsprachige und eine Reihe von Büchern in Deutsch über dieses Thema, z.B. von Hans Walser im Eagle-Verlag (2013) oder von Albrecht Beutelspacher im Spektrum Akademischen Verlag (1995). Dieses interessante Größenverhältnis hat lange vor uns die Natur für sich mit Erfolg „erkannt“: man prüfe einfach einmal die Längenverhältnisse an den eigenen Fingern, Armen und Beinen. Der Buchautor möchte begeistern und legt besonderen Wert auf eine erstaunliche Vielfalt von Illustrationen aus der Geometrie, Natur, Kunst, Architektur. Wie kann man die Schönheit der Mathematik besser vermitteln, als mit Bildern von Flügeln eines Schmetterlings, den Proportionsdarstellungen von Künstlern wie Botticelli, Vinci, Francesca, Michelangelo oder Prachtbauten wie goldene Kathedralen oder den ägyptischen Pyramiden? Das Buch besteht aber nicht nur aus einer Anreihung von bestechenden Bildern, sondern es beginnt mit den mathematisch dominierten Kapiteln Goldene Geometrie und Phi und Fibonacci. Erst darauf folgen dann die Kapitel zur Kunst, Architektur, Flora und Fauna und abschließend zum Universum. Im Anhang werden vertiefende Informationen zum Thema vermittelt, inclusive der Konstruktionsbeschreibung des Goldenen Schnitts. Mit einem Stichwortregister schließt das Buch ab, was einem jederzeit erlaubt, anhand der vielen Themen etwa einzelne Künstler oder Bauwerke nachzuschlagen. Detaillierte Bildausschnitte etwa von Notre-Dame oder Taj Mahal demonstrieren die Umsetzung des Goldenen Schnitts durch ihre Baumeister. Im letzten Kapitel zur Astronomie werden überraschenderweise auch schwarze Löcher besprochen. Dabei wird u.a. der mexikanische Wissenschaftler J.A.Nieto mit der von ihm entdeckten 2-dimensionalen Matrix für den goldenen Schnitt $p = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ zitiert.

Fazit:

Das Buch ist besonders für alle interessant, die an Anwendungen eines zentralen Prinzips aus Natur, Kunst, Architektur und Mathematik interessiert sind. Durch präzise Erläuterungen des goldenen Schnitts im Zusammenhang mit Fünfecken oder den Fibonacci-Zahlen hält das Buch auch für diejenigen etwas bereit, die mehr an den rein mathematischen Aspekten des Goldenen Schnitts interessiert sind. Dabei können sich Mathefreaks im 2- und 3-Dimensionalen tummeln, so dass für jeden etwas dabei ist. Die phänomenalen Illustration und der günstige Buchpreis von 19,95 € runden den positiven Eindruck ab.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:
Meisner, Gary B.: Der Goldene Schnitt. Die Schönheit der Mathematik. Librero Verlag,
ISBN 978-9-463-59143-0,
gebundenes Buch 224 Seiten.

Art des Buches:	opulentes gut bebildertes Mathematisches Nachschlagewerk
Mathematisches Niveau:	sehr gut verständlich
Altersempfehlung:	ab 15 Jahren

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 135

Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg:
Kl. 10: Lisa Schäfer 10; **Kl. 11:** Hannah Schmitt 7, Fiete Schopp 7.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Finn Baumann 28, Sarah Braunecker 6, Leon Conrad 18,Anna Lena Drescher 21, Gabriel Faber 21, Mya Fuchs 28, Jonah Fürst 6, Johannes Greis 33, Pauline Groschke 4, Luca Guth 21, Chiara Kreis 8, Roberta Tintea 5;
Kl. 6: Oscar Su 105, Kevin Tran 37, Jan Christian Weber 21;
Kl. 7: Lars Schall 21;
Kl. 8: Linus Kemmeter 8, Nils Koch 13;
Kl. 9: Lukas Born 50;
Kl. 11: Torben Bürger 51.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Schule:
Kl. 5: Leyla 2, Liam Genscher 2;
Kl. 6: Carina 2, Kiara Dallmeier 2, Hannah Neele Frank 2, Coleen Genscher 2, Raphael Hanold 1, Max Hauser 1, Karl Hoffmann 16, Sarah Hoffmann 16.

Bielefeld, Gymnasium am Waldhof:
Kl. 9: Roxana Mittelberg 7.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:
Kl. 8: Oliver Bill 19.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 7: Philip Memmer 22;
Kl. 8: Julia El Sayed 25, Elisa Hoch 25, Merit Millsimmer 25, Emilie Schnirch 20;
Kl. 10: Tim Kruse 44.

Friedberg, Augustinerschule: Kl. 6: Konstantin Herbst 32;
Kl. 9: Nico Brockmeier 23, Aleksandra Herbst 49.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Sönke Schneider 66;
Kl. 12: Maximilian Göbel 64.

Gießen, Landgraf-Ludwig-Gymnasium:
Kl. 8: Hanna Mattner 9, Maret Schlinkneider 8, Tom Rieger 11, Jasmin Schulz 15.

Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:
Kl. 5: Kira Gaspar 12;
Kl. 8: Raphael Schmittner 27;
Kl. 9: Jakob Zimmermann 41;
Kl. 10: Marie Bauer 24.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule
Kl. 7: Ali Said 8, Fabienne Schuy 9;
Kl. 8: Theresa Horstkötter 14, Johannes Sabel 6;
Kl. 11: Dominik Horstkötter 42;
Kl. 13: Melanie Schuy 20.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Mark Garkuscha 9, Severin Hackl 12, Eva Hovadikova 6, Amelie John 5, Iwais Karimi 11, Sarah Markhof 10, David Mücke 12, Elisa Pape 8, Nam-anh Pham 11, Sonja Schischkov 6;
Kl. 6: Linus Peczkowski 6;
Kl. 7: Michael Bauer 13, Stefanie Forchhammer 16, Valerie Schiberna 6.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 11: Dennis Mayle 57.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium:
Kl. 10: Cedric Friedrich 19.

Linz, Martinus Gymnasium:
Kl. 5: Daniel Waldek 18;
Kl. 8: Simon Waldek 38.

Mainz-Gonsenheim, Martinus Schule:
Kl. 2: Johannes Wünstel 13
Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 7: Gregor Salaru 117;
Kl. 9: Raphael Mayer 28.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 11: Max Herwig 45,5;
Kl. 12: Ivan Khomutovskiy 45, Florian Weinzinger 45,5.

Mainz, Theresianum:
Kl. 10: Clemens Zabel 65.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 6: Jona Richartz 19.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jasmin Borrmann 7, Luis Brinkmann 34, Frederick Fink 10, Sophie Kunz 11, Dora Meszaros 34, Jaden Stix 21;
Kl. 6: Emilie Borrmann 34;
Kl. 8: Elisabeth Budimann 32, Annika Etz 35, Henriette Heibock 6, Natalia Kobeszko 19, Emilia Korfmacher 35, Rebecca Pergament 38, Martin Daniel Schanne 36;
Kl. 9: Kathrin Borrmann 40,5, Paulina Herber 68, Josefine Kaßner 71;
Kl. 10: Annika Borrmann 27;
Kl. 11: Oliver Storck 21;
Kl. 12: Jonas Blumenroth 66, Jonas Buhrke 35, Lennard Freud 54, Jonas Glückmann 67, Luise Kaßner 46, Friedrich Kievernagel 46, Jannik Matthiesen 25, Fabian Rasch 46, Elisa Windorf 38;
Kl. 13: Kristin Teichert 15, Jan Wabnig 17.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 7: Tu Sam Dang 60;
Kl. 9: Miriam Büttner 65.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 7: Philipp Lörcks 84.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 8: Mareike Bühler 49.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 6: Finn Huber 6, Jan Wickenheiser 12;
Kl. 7: Alexander Haun 29;
Kl. 8: Fatima Hemood 23.

Mitteilungen

- **Datenschutz:** Wir möchten unsere Abonnenten anlässlich der in Kraft getretenen DSGVO informieren, welche Daten wir von ihnen gespeichert haben:
  1. Für den Versand führen wir eine Abonnentenliste mit Namen, Adresse, wenn bekannt E-Mail-Adresse, Zahlungseingang, bestellte Heftnummern. Bei Abbestellung werden diese Daten von uns gelöscht.
  2. Auf der Homepage `http://monoid.mathematik.uni-mainz.de/` und in den gedruckten Heften kann jeder L(o)eser seinen aktuellen Punktestand einsehen. In den Listen werden jeweils Name, Schule, Klassenstufe und Punktzahl des jeweils in der Wertung laufenden Schuljahres genannt.

  Wer einverstanden ist, braucht nichts weiter zu veranlassen.
  Sonst kontaktieren Sie uns bitte unter monoid@mathematik.uni-mainz.de

Die Redaktion

Jahrgang 39 Heft 139 September 2019

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid