

Jahrgang 40

Heft 147

September 2021

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)

1981 erstes Heft durch Martin Mettler

herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

1981 — 2021



Jahre MONOID



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15. November 2021.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

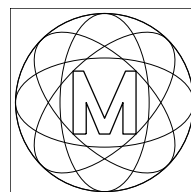
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

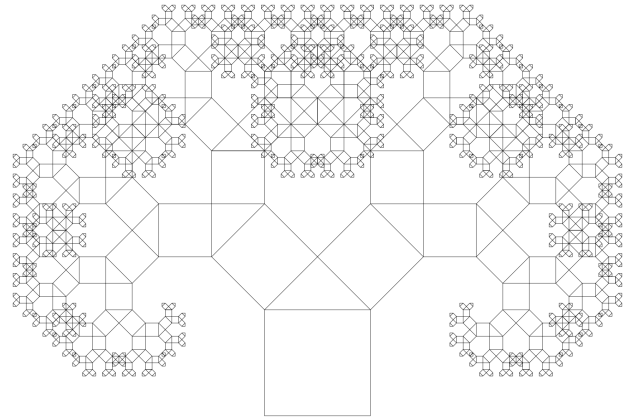
Die Redaktion



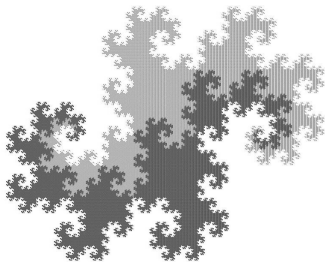
Das Ei des Drachen

von Manuel Krummeck, Tamara Nutz und Kim Vosen

Die nebenstehende Grafik stellt den „Baum des Pythagoras“ dar, der zu den Fraktalen zählt. Den Ursprung der Figur bildet die bekannte Darstellung zum Satz des Pythagoras, die aus einem rechtwinkligen Dreieck und den an den Seiten anliegenden Quadraten mit entsprechender Seitenlänge besteht.

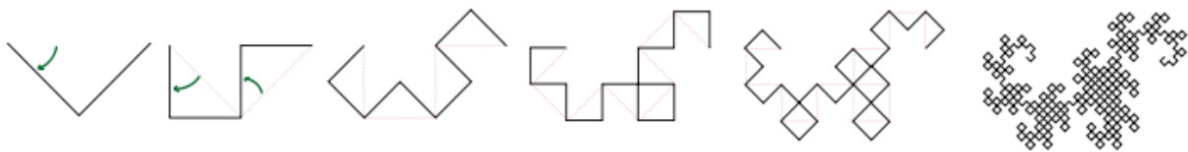


Der „Baum“ entsteht nun aus dem Häuschen mit Dach (das untere Quadrat mit dem rechtwinkligen Dreieck als Dach), indem man auf die Dachseiten das Häuschen entsprechend verkleinert immer wieder aufsetzt. Nach zehn Wiederholungen dieses Prozesses entsteht die dargestellte Figur.



Variiert man diesen Prozess ein wenig, indem man auf der rechten Dachseite das Häuschen wie üblich aufsetzt, auf der linken Dachseite das Häuschen aber um 90° nach links gedreht aufgesetzt, so erhält man nach 15 Wiederholungen eine Figur, von der ein Ausschnitt auf dem Umschlag des aktuellen MONOID-Heftes zu sehen ist.

Die dabei entstehende Randkurve wird interessanterweise wiederum durch ein anderes Fraktal angenähert, den sogenannten „Zwillingsdrachen“. Dieser entsteht aus einer Dopplung der „Drachencurve“ und ist in der kleinen Grafik dargestellt. Die Drachencurve selbst ist eine raumfüllende Kurve und bildet sich über den unten abgebildeten Prozess.



Diese Drachencurve kann man auch durch Papierfalten erhalten, indem man einen langen dünnen Streifen Papier wiederholt in der Mitte faltet und danach wieder so auffaltet, dass die Falze einen rechten Winkel bilden. Ausprobieren und Drachencurve entdecken!



99 Lügner

von Hartwig Fuchs

Professor Quaoar besucht ein Dörfchen, von dem man ihm berichtet hat, dass seine 198 Einwohner $E_1, E_2, \dots, E_{198}$ den Grundsatz befolgen:

Ein Dörfler sagt stets die Wahrheit oder stets die Unwahrheit

Neugierig fragt Professor Quaoar jeden einzelnen Einwohner: „Wie viele Leute im Dorf sind Lügner?“ Er erhält als Antworten fast nur unbestimmte Auskünfte.

(1) E_1 : Es gibt mindestens einen Lügner.

(2) E_2 : Es gibt mindestens zwei Lügner.

⋮

(197) E_{197} : Es gibt mindestens 197 Lügner.

(198) E_{198} : Es gibt 198 Lügner.

Professor Quaoar erwidert nach einiger Zeit des Nachdenkens: „In eurem Dorf gibt es genau 99 Lügner.“ Die Dörfler fragen verwundert und bewundernd: „Wie haben Sie das herausgefunden?“ Professor Quaoar erläutert ihnen gerne, wie er sein Ergebnis gefunden hat:

Zunächst gilt: Wenn E_{198} die Wahrheit sagt, so ist seine Aussage (198) gelogen – ein Widerspruch. Somit:

(198') E_{198} ist ein Lügner.

Daraus folgt unmittelbar

(1') E_1 sagt die Wahrheit.

Wäre nun E_2 ein Lügner, dann gäbe es höchstens einen Lügner. Dann aber wären die Aussagen (2), (3), ..., (198) gelogen – ein Widerspruch. Also gilt:

(2') E_2 sagt die Wahrheit.

⋮

Ganz ebenso ergibt sich, dass $E_3, E_4, \dots, E_{98}$ die Wahrheit sagen.

(99') E_{99} sagt die Wahrheit. Denn hätte E_{99} gelogen, so gäbe es höchstens 98 Lügner und dann hätten $E_{99}, E_{100}, \dots, E_{198}$ und mithin 99 Personen gelogen – ein Widerspruch.

Wegen (99') sind alle 99 Aussagen (100) bis (198) gelogen. Deshalb gibt es im Dorf genau 99 Lügner.

Zufrieden mit seiner Beweisführung lässt sich Professor Quaoar von den Dörflern, die über seine logische Kompetenz staunen, zu einem Umtrunk einladen.

Was uns über den Weg gelaufen ist

Unerwartete Darstellung der geraden Potenzen von 3

von Hartwig Fuchs

$$3^0 = 1$$

$$\downarrow + 3^0$$

$$3^2 = 2 + 3 + 4$$

$$\downarrow + 3^1$$

$$3^4 = 5 + 6 + 7 + \dots + 13$$

$$\downarrow + 3^2$$

$$3^6 = 14 + 15 + 16 + 17 + \dots + 40$$

$$\vdots \quad \downarrow + 3^3$$

$$A(3^0) = 3^0$$

$$A(3^2) = 3^1$$

$$A(3^4) = 3^2$$

$$A(3^6) = 3^3$$

$$\vdots$$

$A(\dots)$ = Anzahl der Summanden

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Nach den Sommerferien möchten Peter und Paul endlich wieder gemeinsam ins Kino gehen. Diesmal schlägt Paul eine Wette vor, der Verlierer muss dann für beide den Eintritt zahlen. Paul hat auf die Rückseite eines Filmplakats die Zahlen von 1 bis 221 geschrieben. Es ist noch viel leerer Platz auf dem Plakat.

„Eigentlich wollte ich ja die Zahlen von 1 bis 2021 aufschreiben“, erklärt er Peter, „aber die Wette funktioniert auch so. Wir streichen abwechselnd zwei beliebige Zahlen auf dem Plakat und schreiben dafür die Summe oder die Differenz der beiden gestrichenen Zahlen hin. Wenn am Schluss deine Lieblingszahl 28 stehen bleibt, lade ich dich ein – sonst lädst du mich ein.“

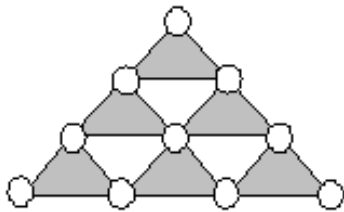
Peter entgegnet: „Da hast du mir bis zum Ende zu viel Kontrolle, um die 28 zu verhindern. Lass mich die letzten 50 Streichungen alleine machen und ich bin dabei.“

Paul stimmt nach kurzem Überlegen zu und erlaubt Peter, mit dem ersten Paar zu beginnen. Wer kann die Wette gewinnen und wie muss er spielen?

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2021 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 145

In Heft 145 stellten wir Euch folgende Aufgabe:



In die Eckpunkte der Dreiecksfigur soll jede der Zahlen von 0 bis 9 genau einmal eingetragen werden. Dabei soll aber die Summe der Zahlen in den Ecken jedes der schraffierten Dreiecke denselben Wert haben.

Ist das möglich, so gib ein Beispiel an. Ist das nicht möglich, so ist dafür eine Begründung erforderlich.

Lösung

Wir bezeichnen die Zahlen in den Ecken wie rechts abgebildet mit $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$. Aus der Aufgabenstellung folgt dann

$$(1) \quad b + d + e = c + e + f = e + h + i, \text{ also } b + d = c + f = h + i.$$

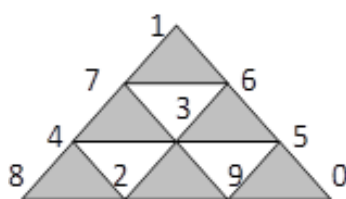
Weiter gilt

$$(2) \quad (a + b + c) + (d + g + h) + (f + i + k) = (b + d + e) + (e + h + i) + (c + e + f),$$

$$\text{also } a + g + k = 3e$$

Mit der Gleichung (2) gilt für die Summe aller Eckenzahlen: $b + d + c + f + h + i + 4e = 45$, und mit Gleichung (1) folgt daraus $3(b + d) + 4e = 45$. Weil sowohl $3(b + d)$ als auch 45 durch 3 teilbar sind, muss $4e$ und damit auch e ebenfalls durch 3 teilbar sein. Für die Zahl in der mittleren Ecke kommen also nur 0, 3, 6 oder 9 in Frage.

Diese Fälle $e = 0$ und $e = 9$ sind aber wegen der Gleichung (2) unmöglich, denn dann wäre $a = g = k = 0$ beziehungsweise $a = g = k = 9$.



Eine Lösung für $e = 3$ ist rechts abgebildet; sie erzeugt insgesamt sechs Lösungen durch Drehen beziehungsweise Spiegeln. Wenn man in jeder dieser Lösungen alle Zahlen x durch $9 - x$ ersetzt, erhält man weitere sechs Lösungen mit $e = 6$. Dies sind alle Möglichkeiten.

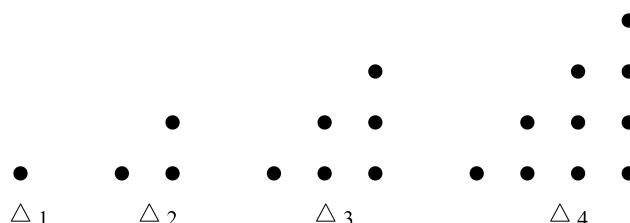
Richtige Lösungen haben eingesandt: Lasse Blum, Josefine Kaßner, Alexander Kolbauer, Philipp Lörcks, Luca Sindel, Oscar Su und Clemens Zabel.

Man könnte noch eine Reihe von vier Dreiecken unten ansetzen und dafür die Zahlen bis 14 je einmal verwenden – wenn das geht. Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Entdeckungen

Besondere Dreieckszahlen

Eine Dreieckszahl erhält man geometrisch so:



oder algebraisch durch $\Delta_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$.

Untersuche die Zahlenfolge Δ_{11} , Δ_{111} , Δ_{1111} , ... (CHA)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2021 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 145

In Heft 145 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Verallgemeinerung des Kennenlernspiels aus MONOID 143

Die n Studenten einer Vorlesung treffen sich jeden Montag zum gemeinsamen Essen; sie teilen sich auf Tische mit jeweils genau m Personen auf. Die Verteilung auf die Tische soll so sein, dass jeder der n Studenten jeden anderen im Laufe der Zeit genau einmal trifft.

- Wie viele Wochen dauert das Spiel?
- Welche Bedingungen findet Ihr an (n, m) , damit eine solche Aufteilung existieren kann?
- Genügen umgekehrt die in b gefundenen Bedingungen an (n, m) , damit eine solche Aufteilung existiert?

Untersucht vor allem die beiden Fälle $m = 2$ und $m = 3$.

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich Kathrin Borrmann (Klasse 12, Gymnasium Oberursel), Josefine Kaßner (Klasse 12, Gymnasium Oberursel), Oscar Su (Klasse 9, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey), Clemens Zabel (Klasse 11, Theresianum, Mainz) beschäftigt.

Alle fanden zu Aufgabenteil a und b heraus:

- a) Das Spiel dauert $\frac{n-1}{m-1}$ Wochen, denn man lernt jede Woche $m-1$ Studenten und insgesamt $n-1$ Studenten kennen.
- b) n muss durch m teilbar sein, da sonst keine gleichmäßige Tischverteilung möglich ist. Nach a) muss außerdem $n-1$ durch $m-1$ teilbar sein. Zusammenfassend gilt, dass n bei Teilung durch $m \cdot (m-1)$ Rest m hat. Speziell ist n für $m=2$ gerade und für $m=3$ ist n ein ungerades Vielfaches von 3.

Oscar vermutet aufgrund dessen, dass umgekehrt für $n = m \bmod (m \cdot (m-1))$ stets eine Lösung existiert (Aufgabenteil c).

Für $m=2$ und n gerade gibt Josefine ein Verfahren für eine Aufteilung an: Man stellt die n Studenten an einen entsprechend langen Tisch.



Einander gegenüberstehende Studenten treffen einander. Zur zweiten Woche rücken Studenten 2 bis n jeweils einen Platz weiter, während Student 1 an seinem Platz bleibt (das heißt insbesondere, dass Student n den freiwerdenden Platz von Student 2 einnimmt.) So trifft jeder der n Studenten jeden anderen genau einmal.

Auch für m prim (wir schreiben $p = m$) und $n = p^k$ eine Potenz von p konstruiert Josefine eine Lösung:

Sie stellt die Studenten nun in p Reihen a p^{k-1} Studenten auf (illustriert am Beispiel $p = k = 3$):

Reihe \ Platz	0	1	2	...	8
0	00	01	02	...	08
1	10	11	12	...	18
2	20	21	22	...	28

Die Spalten bilden die Aufteilung der ersten Woche. Nun rücken die Studenten der l -ten Reihe um l Plätze nach links und teilen sich wieder nach Spalten auf:

Reihe \ Platz	0	1	2	...	8
0	00	01	02	...	08
1	11	12	13	...	10
2	22	23	24	...	21

Die nächste Anordnung:

Reihe \ Platz	0	1	2	...	8
0	00	01	02	...	08
1	12	13	14	...	11
2	24	25	26	...	23

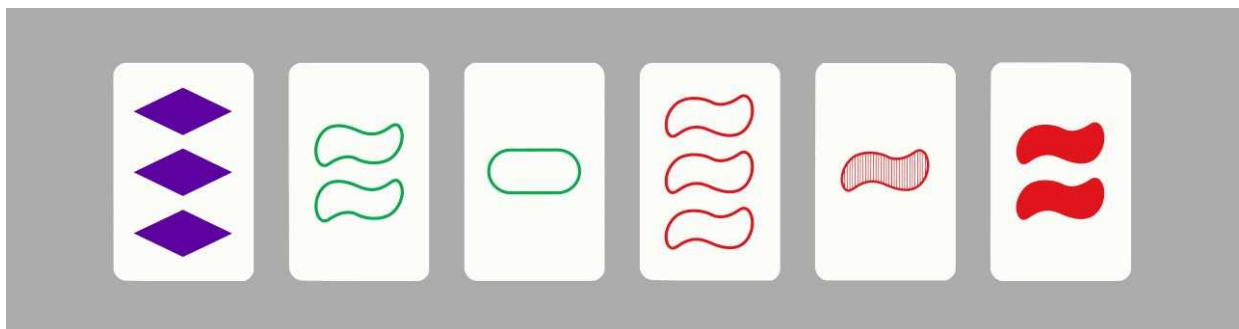
Da p prim ist, wird niemand sich doppelt sehen. Schließlich hat jeder aus Reihe 0 jeden aus den anderen Reihen kennen gelernt und keinen aus der eigenen. Induktiv nehmen wir an, dass für die p^{k-1} Studenten einer Reihe eine zulässige Aufteilung existiert, dass also zu guter Letzt jeder jeden genau einmal getroffen hat.

Ausblick: Wenn man zeitgenössische mathematische Fachliteratur liest, findet man, dass

- die Vermutung stimmt für $n \leq 50$ mit der einzigen Ausnahme $n = 36$ und $m = 6$.
- es gibt (n, m) , zum Beispiel $n = 66$ und $m = 6$ für die die Vermutung offen ist, es also noch nicht bekannt ist, ob es eine Lösung gibt.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Untersuchung eines Kartenspiels



Verschiedene SET®-Karten, © AMIGO Spiel + Freizeit GmbH

Beim Spiel SET® gibt es 81 unterschiedliche Spielkarten. Auf einer Spielkarte ist jeweils eines von drei Symbolen (Raute, Welle, Oval) abgebildet, und zwar entweder ein Mal, zwei Mal oder drei Mal. Alle Symbole einer Karte haben dieselbe Farbe (Violett, Grün oder Rot) und dieselbe Füllung (ungefüllt, schraffiert oder massiv gefüllt). Werden drei dieser Karten ausgewählt, so bilden sie ein zulässiges *SET*, falls sie in jeder der vier Eigenschaften entweder übereinstimmen oder alle unterschiedlich sind. Dabei können sie zum Beispiel in der Farbe (rot) und der Form (Welle) übereinstimmen, in der Anzahl jedoch nicht (es treten ein, zwei und drei Symbole auf) und auch in der Füllung nicht (es treten gefüllte, schraffierte und ungefüllte Symbole auf). Die drei rechten Karten in der obigen Auslage bilden solch ein zulässiges *SET*.

Die Spielregeln sind einfach: Es werden zwölf Karten offen ausgelegt. Wer zuerst ein *SET* findet, erhält diese drei Karten und die Auslage wird ergänzt. Wird kein *SET* gefunden, werden weitere Karten ausgelegt, bis ein *SET* gefunden wird. Die Spielerin oder der Spieler mit den meisten gewonnenen Karten gewinnt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der ersten Auslage von zwölf Karten bereits ein zulässiges *SET*?

Schreibe ein Programm, das für 1 000 000 zufällige Auslagen bestimmt, wie häufig mindestens ein zulässiges *SET* in der Auslage liegt. Wie groß ist Dein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit? (Hinweis zum Überprüfen Deines Ergebnisses: Die Wahrscheinlichkeit ist größer als 90 %, aber kleiner als 99 %.) (AcK)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2021 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 145

In Heft 145 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Auf der Zielgeraden

Letztens saß ich mit meinem Laptop im Garten. Als ich eine Schnecke entdeckte, die über ein Gummiband kroch, fragte ich mich, was wohl passieren würde, wenn ich das Gummiband langzöge, während die Schnecke versucht, die andere Seite des Gummibandes zu erreichen. Um die Schnecke nicht zu stören, entschloß ich mich, ein Computerprogramm zu schreiben, um der Frage nachzugehen.

Bei der Modellierung bin ich von folgenden Daten ausgegangen: Das Gummiband hatte, wie ich wusste, eine Länge von 1 m, die Geschwindigkeit der Schnecke beim Kriechen über das Gummiband schätzte ich auf konstant $v = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Ich nahm an, dass ich gleichzeitig durch alle x Sekunden das unendlich dehnbare Gummiband um $4x$ cm länger zöge, wodurch die Schnecke auf dem Gummiband mitgezogen würde.

- Wie lange braucht die Schnecke bei diesen Annahmen, um das Gummiband für verschiedene Werte von x (2; 1; 0,5; 0,25; 0,1) zu überqueren? Wie lang ist das Band, wenn die Schnecke das Ende erreicht?
- Was passiert, wenn x beliebig klein wird?
- Würde die Schnecke das andere Ende auch erreichen, wenn ich das Gummiband mit $v = 1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ zöge?

(Jan Disselhoff, Mainz)

Lösung

a) Ein mögliches Programm um die Aufgabe zu lösen sieht so aus:

```
1 def zeit_zum_ende(bandLange, schneckeGeschwindigkeit,
2   zugGeschwindigkeit, x):
3     position = 0
4     zeit = 0
5
6     while position < bandLange:
7       #schnecke bewegt sich
8       position += schneckeGeschwindigkeit * x
9
10      #berechne neue Bandlaenge
11      gezogenesBand = bandLange + zugGeschwindigkeit * x
12
13      #berechne neue position der schnecke, nach band strecken
14      position = position * (gezogenesBand / bandLange)
15
16      bandLange = gezogenesBand
17      zeit += x
18
19    return zeit, bandLange
20
21 for x in [2, 1, 0.5, 0.25, 0.1]:
22   zeit, lange = zeit_zum_ende(100, 1, 4, x)
23   print(f"Zieht man das Band alle {x} Sekunden, so braucht die
24   Schnecke {zeit} Sekunden.")
25   print(f"Am Ende ist das Band dann {lange} lang.")
```

Wir erhalten hier folgende Werte:

x	Zeit	Bandlänge
2	1288	5252 cm
1	1314	5356 cm
0.5	1327	5408 cm
0.25	1333.5	5434 cm
0.1	1337.3	5449 cm

- b) Für die bisher gewählten Werte ergibt sich jeweils eine Zeit, in welcher die Schnecke das Ziel erreicht. Selbst wenn ich das Band kontinuierlich (Mathematiker sagen hierzu stetig) länger zöge, erreichte die Schnecke das Ziel.
- c) Auch diese Frage ist mit „ja“ zu beantworten. Allerdings dauert es eine ganze Weile, es dauert sogar so lange, dass diese Frage nicht mehr mit dem Computer zu beantworten ist, da die Berechnung zu lange dauert. Eine mögliche Überlegung und Begründung ist folgende:

Nehmen wir an, dass ich das Band nicht kontinuierlich, sondern nur nach jeweils einer Sekunde länger zöge. Das Band hat anfangs die Länge l und wird jede Sekunde um $\frac{l}{s}$ verlängert. Die Schnecke bewegt sich beharrlich jede Sekunde um die Strecke s weiter.

Wir betrachten, welchen *Anteil* der Strecke die Schnecke geschafft hat. In der ersten Sekunde sind dies $\frac{s}{l}$. Danach wird das Band länger gezogen, sodass die

Schnecke in der zweiten Sekunde nur $\frac{s}{l+v}$ des Bandes zurücklegt. Generell legt die Schnecke in der $(n+1)$ -ten Sekunde $\frac{s}{l+nv}$ Prozent der Strecke zurück. Wir müssen also überlegen, ob $\frac{s}{l+0v} + \frac{s}{l+1v} + \frac{s}{l+2v} + \dots$ irgendwann größer wird als 1.

Für $n \neq 0$ gilt $\frac{s}{l+nv} \geq \frac{s}{nl+nv} = \frac{s}{l+v} \cdot \frac{1}{n}$.

Damit können wir die Summe umschreiben und erhalten

$$\frac{s}{l+0v} + \frac{s}{l+1v} + \frac{s}{l+2v} + \dots > \frac{s}{l+v} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

In der Klammer steht die harmonische Reihe. Diese wächst bis ins Unendliche, also wird die Summe garantiert irgendwann größer als 1 sein.

In unserem Beispiel für sehr kleine x , würde die Schnecke mehr als 10^{43000} Sekunden brauchen. Das ist um ein Vielfaches länger als das Alter des Universums. Nur eine beliebig langlebige Schnecke könnte es schaffen, das Ende des Bandes zu erreichen.

Wo liegt der Fehler?

von Hartwig Fuchs

Für die als harmonische Reihe bezeichnete Summe $H = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ gilt:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \\ &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots \\ &= \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \\ &= H. \end{aligned}$$

Also gilt $H > H$ – ein Widerspruch. Wo liegt der Fehler?

Lösung:

Nach Definition wird in Zahlenmengen mit dem Zeichen $>$ eine Größer-Beziehung zwischen zwei Zahlen dargestellt.

Da nun weder H noch eine der oben auftretenden Summen Zahlen sind*, hat der Term $H > H$ keinen Sinn – und deshalb kann er auch keinen Widerspruch darstellen.

* Es sei $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Dann gilt $H_n > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \text{ Summanden}} \right) = n \cdot \frac{1}{2}$. Mit wachsendem n übertrifft also H wegen $H_n > n$ jede als Schranke vorgegebene natürliche Zahl $\frac{n}{2}$. Somit kann H keine natürliche Zahl sein.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 146

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Zum 40-jährigen Jubiläum

Das erste MONOID-Heft erschien vor 40 Jahren, also im Jahr 1981.

Berechne die Quersumme der Zahl

$$10^{2021} - 1981.$$

(MG)

Lösung:

Es ist

$$10^{2021} - 1981 = 1 \underbrace{000 \dots 0}_{2021 \text{ Ziffern } 0} - 1981 = \underbrace{999 \dots 9}_{2021 \text{ Ziffern } 9} - 1980 = \underbrace{999 \dots 9}_{2017 \text{ Ziffern } 9} 8019.$$

Die Quersumme dieser Zahl ist

$$2017 \cdot 9 + 8 + 0 + 1 + 9 = 18\,171.$$

II. Jubiläums-Banner

Auf einem Banner steht anlässlich des MONOID-Jubiläums

1981402021

Doro zerschneidet das Banner so in drei Stücke, dass dabei drei natürliche Zahlen auf den drei Stücken stehen.

Wie muss Doro schneiden, damit die Summe der drei Zahlen ...

- a) möglichst klein wird, wenn führende Ziffern 0 verboten sind?
- b) möglichst klein wird, wenn führende Ziffern 0 erlaubt sind?
- c) möglichst groß wird?

(MG)

Lösung:

- a) Die Zahl auf der Banderole ist zehnstellig. Damit die Summe möglichst klein wird, dürfen die Zahlen höchstens vierstellig sein.

Da die drittletzte Ziffer eine 0 und führende Ziffern 0 nicht erlaubt sind, kann Doro am Ende also nur eine vierstellige oder eine zweistellige Zahl abschneiden. Schneidet Doro am Ende eine zweistellige Zahl ab, so muss sie im vorderen Teil zwei vierstellige Zahlen schneiden. Die Summe ist dann $1981 + 4020 + 21 =$

6022, also relativ groß.

Schneidet Doro die vierstellige 2021 ab, so kann sie den vorderen Teil der Banderole entweder in zwei dreistellige oder eine zwei- und eine vierstellige Zahl zerschneiden.

Da $198 + 140 = 338 < 1000$ ist, ergibt dabei das Schneiden in zwei dreistellige Zahlen die kleinste Summe.

Daher ist die kleinste Summe, die Doro erhalten kann $198 + 140 + 2021 = 2359$.

- b) Wenn führende Ziffern 0 erlaubt sind, kann Doro auch die fünfstellige Zahl 02021 am Ende abschneiden. Für die vorderen fünf Stellen ergibt sich die kleinste Summe mit der Aufteilung in 198 und 14.

Die kleinste Summe ist dann $198 + 14 + 02021 = 2233$.

- c) Damit die Summe möglichst groß wird, sollte Doro die Banderole in eine acht- und zwei einstellige Zahlen zerschneiden. Unter den drei Möglichkeiten ist $1 + 98140202 + 1 = 98140204$ die größte Summe.

III. Wahr oder falsch?

Es seien m und n positive ganze Zahlen.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe Deine Antworten.

- a) Für alle m und n gilt: $m + n > n$ und $m \cdot n > n$.
- b) Es gibt unendlich viele Zahlen m und n so, dass $\frac{m}{n} < 1$ und $\frac{n}{m} > 1$ ist.
- c) Für alle m und n gelten $m^2 \geq m$ und $n^2 \geq n$ und daher $m^2 + n^2 \geq m + n$.
- d) Es gibt unendlich viele Zahlen m und n , für die $m - n < 0$ und $(m - n)^2 > 0$ sind.
- e) Für alle m und n folgt aus $m < n$, dass $m^n < n^m$ ist. (H.F.)

Lösung:

- a) Es ist $m > 0$. Addiert man zu dieser Ungleichung die positive Zahl n , so folgt $m + n > n$. Für $m = n = 1$ ist $m \cdot n > n$ falsch. – Daher ist die Aussage falsch.
- b) Es gibt unendlich viele Zahlen m und n , für die $m < n$ gilt. Durch Division der Ungleichung mit n bzw. mit m folgt wegen $n > 1$, dass $\frac{m}{n} < \frac{n}{n}$, also $\frac{m}{n} < 1$ und $\frac{m}{m} < \frac{n}{m}$, also $1 < \frac{n}{m}$. – Die Aussage ist wahr.
- c) Aus $m \geq 1$ folgt, dass $m^2 \geq m$ ist; ebenso folgt $n^2 \geq n$. Durch Addition der beiden Ungleichungen ergibt sich $m^2 + n^2 \geq m + n$ – es gilt also die Aussage.
- d) Es gibt unendlich viele Zahlen m und n mit $m < n$, also auch mit $m - n < n - n$, sodass $m - n < 0$ ist. Da $m - n$ negativ ist, muss das Produkt von zwei Zahlen $m - n$ positiv sein; das heißt: $(m - n)^2 > 0$. – Damit ist die Aussage wahr.
- e) Es sei $m = 2$ und $n = 5$. Dann ist zwar $2 < 5$, aber $2^5 > 5^2$ – sodass die Aussage falsch ist.

IV. Datum

Beim Blick auf den Kalender stellt Karin fest: „Das heutige Datum, der 19.06.2021, enthält sowohl gerade als auch ungerade Ziffern. Aber es gibt doch bestimmt auch Daten nur mit geraden sowie nur mit ungeraden Ziffern.“



Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
31	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	1	2	3	4

- Wann war das letzte Datum und wann wird das nächste Datum nur mit geraden Ziffern sein?
- Wann war das letzte Datum und wann wird das nächste Datum nur mit ungeraden Ziffern sein?

Bemerkung: Das Datum soll in der obigen Form geschrieben werden, also Tag und Monat jeweils zweistellig (also ggf. mit führender 0), das Jahr vierstellig. Es genügt, hier die Daten anzugeben, eine Begründung wird ausnahmsweise nicht verlangt.

(MG)

Lösung:

- Das letzte Datum nur mit geraden Zahlen war am 28.08.2020 und das nächste wird am 02.02.2022 sein.
- Das letzte Datum nur mit ungeraden Ziffern war am 19.11.1999 und das nächste wird erst am 11.11.3111 sein.

V. Summe von 40 Fakultäten

Bestimme die letzte Ziffer von

$$1! + 2! + 3! + \dots + 40!.$$

Hinweis: Die Fakultät bedeutet, dass alle natürlichen Zahlen bis zu dieser Zahl multipliziert werden, also zum Beispiel $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

(MG)

Lösung:

Es sind $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1! = 2$, $3! = 3 \cdot 2! = 6$, $4! = 4 \cdot 3! = 24$, $5! = 5 \cdot 4! = 120$, $6! = 6 \cdot 5! = 720$, ... Auch bei weiteren Multiplikationen bleibt die letzte Ziffer der Fakultät stets 0.

Damit werden bei der Summe an der Einerstelle ab $5!$ auch stets nur Ziffern 0 addiert. Somit ist die letzte Ziffer von $1! + 2! + 3! + \dots + 40!$ gleich der letzten Ziffer von $1! + 2! + 3! + 4!$, die wir erhalten, indem wir die entsprechenden Einerstellen addieren. Wir erhalten $1 + 2 + 6 + 4 = 13$. Den Übertrag können wir hier vernachlässigen.

Die letzte Ziffer von $1! + 2! + 3! + \dots + 40!$ ist also eine 3.

VI. Pyramide aus Holzwürfeln

Sarah hat 2021 kleine Holzwürfel der Kantenlänge 1 cm. Aus diesen baut sie eine Pyramide. Die oberste Schicht besteht aus einem Holzwürfel, die darunter aus $2 \cdot 2 = 4$ Holzwürfeln, die quadratisch angeordnet sind. Die nächste Schicht darunter besteht dann aus $3 \cdot 3 = 9$ quadratisch angeordneten Holzwürfeln und so weiter. (Sie baut natürlich von unten, aber auf diese Weise lässt sich der Aufbau leichter beschreiben.)

- Wie viele Holzwürfel haben die obersten sechs Schichten insgesamt?
- Wie viele Schichten hat die größtmögliche Pyramide, die sie aus den 2021 Holzwürfeln bauen kann?
- Wie viele Holzwürfel sind in den untersten sechs Schichten dieser größtmöglichen Pyramide?
- Zeige: Wenn Sarah unten mit der Schicht beginnt, in der $18 \cdot 18$ Holzwürfel sind, dann kann sie noch die $7 \cdot 7$ er Schicht komplett bauen, aber nicht mehr die vollständige $6 \cdot 6$ er Schicht.

(MG)

Lösung:

- Die obersten sechs Schichten enthalten $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$ Holzwürfel.

Alternativ lässt sich die Summe auch mit der Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ berechnen. Es ergibt sich ebenfalls $1^2 + 2^2 + \dots + 6^2 = \frac{6 \cdot (6+1) \cdot (2 \cdot 6+1)}{6} = 91$.

- Wir rechnen schrittweise

Schicht	Würfel in der Schicht	Summe verbauter Würfel
1	1	1
2	4	5
3	9	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17	289	1785
18	324	2109

Also kann Sarah 17 Schichten bauen.

Bemerkung: Die Zahl lässt sich auch über die Formel ermitteln. Dann muss $2021 \geq \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ sein, also $12120 \geq 2n^3 + 3n^2 + n$ resp. $0 \geq n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 6060$. Eine Lösungsformel hierzu hat Gerolamo Cardano* gefunden; Ihr lernt sie im Mathematikstudium.

* * 24. September 1501 in Pavia, † 21. September 1576 in Rom; italienischer Arzt, Philosoph und Mathematiker.

- c) In den untersten sechs Schichten sind dann $12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 = 144 + 169 + 196 + 225 + 256 + 289 = 1279$ Holzwürfel.
- d) Im Pyramidenstumpf von der $7 \cdot 7$ er Schicht bis zur $18 \cdot 18$ er Schicht werden $\frac{18 \cdot (18+1) \cdot (2 \cdot 18+1)}{6} - \frac{6 \cdot (6+1) \cdot (2 \cdot 6+1)}{6} = 2109 - 91 = 2018$ Holzwürfel benötigt, also reichen die 2021 Würfel, die Sarah zur Verfügung stehen.
- Im Pyramidenstumpf von der $6 \cdot 6$ er Schicht bis zur $18 \cdot 18$ er Schicht werden $\frac{18 \cdot (18+1) \cdot (2 \cdot 18+1)}{6} - \frac{5 \cdot (5+1) \cdot (2 \cdot 5+1)}{6} = 2109 - 55 = 2054$ Holzwürfel benötigt, also reichen die 2021 Würfel nicht aus.

VII. Domino

Karin hat zum Geburtstag ein Domino-Spiel geschenkt bekommen. Auf die Rückseiten der Dominosteine ist jeweils ein Buchstabe des Wortes DOMINO (in Großbuchstaben) gedruckt. Karin sucht nun sechs Steine so heraus, dass sie mit diesen das Wort Domino legen kann, also einen Stein mit einem D, einen mit einem O, einen mit einem M, einen mit einem I, einen mit einem N und noch einen weiteren mit einem O. Die übrigen Steine räumt sie zurück in die Packung.

Nun mischt sie diese sechs Steine und legt sie in beliebiger Reihenfolge nebeneinander. So entstehen neue Wörter, wenn auch die meisten keinen Sinn ergeben, wie zum Beispiel die möglichen Wörter DOIMNO oder ONIMOD.

- Wie viele verschiedene (auch sinnlose) Wörter kann Karin mit den Buchstaben bilden?
- Karin schreibt alle möglichen Wörter in alphabetischer Reihenfolge auf, in der natürlich jedes Wort nur einmal steht. An welcher Stelle steht das Wort DOMINO in dieser Liste?
- Welches Wort steht an der 174. Stelle dieser Liste? (MG)

Lösung:

- Für den ersten Buchstaben hat Karin sechs Möglichkeiten, für den zweiten Buchstaben fünf Möglichkeiten und so weiter bis zum letzten Buchstaben, für den nur noch eine Möglichkeit bleibt. Da es aber zweimal den Buchstaben O gibt, haben wir einige Wörter doppelt gezählt, da wir die beiden Buchstaben O miteinander tauschen können, wodurch sich das Wort nicht ändert. Es gibt also insgesamt $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 360$ verschiedene Wörter.
- In der alphabetischen Liste stehen zuerst die Wörter, die mit einem D beginnen. Dazu gehört auch das Wort DOMINO. Alle Wörter, die mit DI, DM und DN beginnen, stehen jedoch in der Liste vorher. Wie viele Wörter es mit diesen Anfängen gibt, können wir uns ähnlich überlegen wie in der Teilaufgabe a. Bei Beginn DI sind noch die vier Buchstaben M, N, O, O zu ergänzen und diese können auf $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 12$ verschiedene Weisen ergänzt werden, ebenso bei DM die weiteren vier Buchstaben I, N, O, O sowie

bei DN die Buchstaben I, M, O, O.

Es folgen die Wörter, die mit DO beginnen, zu denen dann auch DOMINO gehört. Mit Wortanfang DOI und den weiteren Buchstaben M, N und O gibt es sechs Wörter. Es folgt der Wortanfang DOM, unter denen dann DOMINO das erste ist.

Also stehen $12 + 12 + 12 + 6 = 42$ Wörter vorher und somit ist das Wort DOMINO das 43. Wort in der Liste.

- c) Wir überlegen analog: Mit Anfangsbuchstaben D gibt es $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 60$ Buchstaben, ebenso mit den Anfangsbuchstaben I und M. Also umfasst die Liste mit den Anfangsbuchstaben D und I insgesamt 120 Wörter, zusätzlich mit Anfangsbuchstaben M dann 180 Wörter. Also muss das gesuchte Wort mit einem M beginnen.

Mit den Anfangsbuchstaben MD, MI und MN gibt es jeweils $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 12$ Wörter, also umfasst die Liste bis einschließlich Anfangsbuchstaben MN insgesamt 156 Wörter und das gesuchte Wort beginnt mit MO.

Mit den Anfangsbuchstabenkombinationen MOD, MOI und MON gibt es nun jeweils $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 6$ Wörter, es kommen also 18 weitere Wörter hinzu und somit hat die Liste dann 174 Wörter.

Das gesuchte Wort an der 174. Stelle ist also das letzte Wort mit Wortanfang MON und dieses ist das Wort MONOID.

Alternative: Haben wir uns überlegt, dass das gesuchte Wort mit einem M beginnen muss, dann können wir weiter überlegen, dass danach nur noch sechs Wörter mit diesem Anfangsbuchstaben folgen. Dieses sind die sechs Wörter mit dem Wortanfang MOO. Also ist das gesuchte Wort das letzte mit Wortanfang MON und dieses ist das Wort MONOID.

VIII. Wie viele?

Wie viele 6-stellige Zahlen, die durch 60 teilbar sind, gibt es? (Martin Mettler †)

Lösung:

Zwischen 1 und 999 999 liegen 16 666 Vielfache von 60, weil $999\,999 : 60 = 16\,666$ Rest 39 ist.

Zwischen 1 und 99 999 liegen 1 666 Vielfache von 60.

Daher liegen zwischen 99 999 und 999 999 genau $16\,666 - 1\,666 = 15\,000$ Vielfache von 60.

Information: Diese Aufgabe ist die allererste Aufgabe, die 1981 im ersten MONOID-Heft gestellt wurde – also vor genau 40 Jahren. Aufgrund unseres Jubiläums haben wir sie noch mal aus dem Archiv geholt und Euch noch mal gestellt.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. November 2021.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Zahlen schreiben III

Nachdem Kalea und Sophie ihrem Onkel gezeigt haben, wie gut sie schon Zahlen schreiben können (siehe MONOID 145, Mathespielerei II auf Seite 22 und MONOID 146, Aufgabe 1272 auf Seite 26), möchte ihre kleine Schwester Felia ebenfalls ihre Künste unter Beweis stellen. Ähnlich wie Sophie schreibt sie einmal die Zahl 1, zweimal die Zahl 2, dreimal die Zahl 3 und so weiter, allerdings ohne Abstände zwischen den Zahlen zu halten. Es entsteht also die Zahlenkolonne

12233344445555...

Später folgt dann zum Beispiel die Sequenz ...9991010... und so weiter.

- a) An welcher Stelle steht erstmals die Zahl 40?
- b) Welche Ziffer steht an der 40. Stelle?
- c) Wann steht erstmals eine Ziffernfolge aus (mindestens) 40 gleichen Ziffern?

(MG)

II. Teilbarkeit und Quersumme

Bestimme das kleinste Vielfache von 40 mit der Quersumme 1981.

(MG)

III. Wie viele?

- a) Wie viele fünfstellige Quadratzahlen gibt es?
- b) Wie viele fünfstellige Zahlen sind durch 40 teilbar?
- c) Wie viele fünfstellige Quadratzahlen sind durch 40 teilbar?

(MG)

IV. ... dass man Nullen nicht übersehen darf

Die Fakultät einer natürlichen Zahl ist das Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner und gleich dieser Zahl. Notiert wird sie, indem ein ! hinter die Zahl geschrieben wird. Matea berechnet einige Fakultäten: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, ... Sie stellt fest, dass die ersten Fakultäten auf verschiedene Ziffern enden, aber ab $5!$ die letzte Ziffer eine 0 ist und es dann immer mehr Ziffern 0 am Ende der Zahl werden.

- Bestimme, auf wie viele Ziffern 0 die Zahl $2021!$ endet.
- Für welche Zahl m endet die Fakultät $m!$ erstmals auf 40 Ziffern 0?

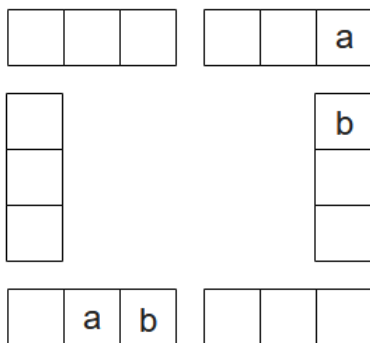
(MG)

V. Zufall oder Regel?

Trifft es zu, dass $(2021 + \frac{1}{2021})^2 - (2021 - \frac{1}{2021})^2 = 4$ ist?

Gilt entsprechendes auch für andere Zahlen an Stelle von 2021? (H.F.)

VI. Farbige Domino-Steine



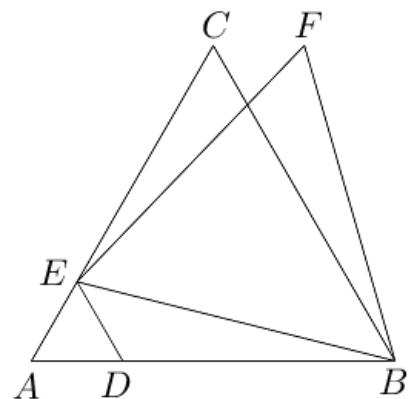
Sechs kongruente Rechtecke, bestehend aus jeweils drei Quadraten, seien so wie in der nebenstehenden Figur angeordnet. Die drei Quadrate eines jeden Rechtecks sollen nun so mit den Farben blau (b), rot (r) und weiß (w) gefärbt werden, dass keine zwei benachbarten Quadrate – das sind Quadrate wie beispielsweise die in der Figur mit a und b bezeichneten – von gleicher Farbe sind.

Zeige durch ein Beispiel, dass eine solche Kolorierung möglich ist. (H.F.)

VII. Parallelogramm oder nicht?

Auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ eines gleichseitigen Dreiecks ABC werden die Punkte D und E so gewählt, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ gleich lang sind. Über $\overline{EB}$ wird ein gleichseitiges Dreieck EBF gemäß Abbildung erzeugt.

Entscheide, ob das Viereck $ADFC$ ein Parallelogramm ist oder nicht, und begründe deine Entscheidung.



Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. November 2021.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1267: Summenspiel mit $\sqrt{1981}$ bis $\sqrt{2021}$

Berechne ohne Taschenrechner

$$\frac{1}{\sqrt{1982} + \sqrt{1981}} + \frac{1}{\sqrt{1983} + \sqrt{1982}} + \frac{1}{\sqrt{1984} + \sqrt{1983}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2020}}.$$

(MG)

Aufgabe 1268: Gewinnchancen

In Hausdorf veranstaltet die dortige Mathematiker-Vereinigung jährlich einen großen Mathematik-Markt, bei dem es verschiedene Stände mit mathematischen Experimenten, Vorträge und weitere Präsentationen gibt. Auch eine Tombola wird angeboten. Dazu werden Lose mit den Nummern von 1 bis 1 000 000 verkauft. Gib die Gewinnwahrscheinlichkeiten an, wenn

- genau die Quadratzahlen gewinnen.
- genau die Kubikzahlen gewinnen.
- genau die Zahlen, die sowohl eine Quadrat- und zugleich eine Kubikzahl sind, gewinnen.
- genau die Zahlen, die eine Quadrat- oder Kubikzahl sind, gewinnen.

(MG)

Aufgabe 1269: Eine Ungleichung – zwei Lösungswege

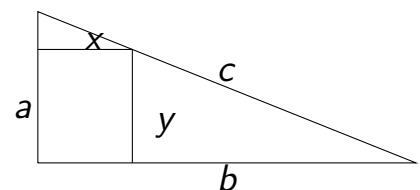
Zeige, dass für alle $x > 0$ gilt: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Gib möglichst zwei verschiedene Lösungswege an.

(WJB)

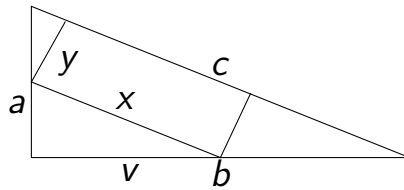
Aufgabe 1270: Ein spezielles Rechteck

Einem rechtwinkligen Dreieck mit Seiten $a < b < c$ werde ein Rechteck so einbeschrieben, dass zwei Seiten auf den Katheten liegen.



- Welche Werte kann der Umfang U des Rechtecks haben?
- Bei gegebenem Umfang U berechne die Seitenlängen x und y .

- c) Beantworte die entsprechenden Fragen für ein einbeschriebenes Rechteck, bei dem eine Seite auf der Hypotenuse liegt. (WJB)



Aufgabe 1271: Wie viele Primzahlen?

Wie viele Primzahlen der Form $Z(n) = n^4 + 4^n$ gibt es? (gefunden WJB)

Aufgabe 1272: Lösungen gesucht

Untersuche, ob es drei natürliche Zahlen x , y und z gibt, welche die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 8z + 6$$

erfüllen. (H.F.)

Aufgabe 1273: Eine Eigenschaft rechtwinkliger Dreiecke

Für jedes rechtwinklige Dreieck mit den ganzzahligen Kathetenlängen a , b und der ganzzahligen Hypotenusenlänge c gilt: Mindestens eine der Seitenlängen ist ein Vielfaches von 5.

Zeige dies. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 146

Klassen 9–13

Aufgabe 1267: Geburtstagskuchen

Zur MONOID-Redaktionssitzung hat die Redaktionsleiterin Frau Dr. Hog-Angeloni einen rechteckigen Blechkuchen mitgebracht. Zum 40-jährigen Jubiläum möchte sie den Kuchen mit genau 40 Schnitten zerteilen. Dabei geht ein Schnitt jeweils parallel zum Rand des Kuchens und jeweils komplett von einem Rand zum gegenüberliegenden Rand. Dadurch entstehen rechteckige Kuchenstücke. Um die Redaktion satt zu bekommen, möchte sie natürlich möglichst viele Stücke aus dem Kuchen schneiden.

Wie viele Kuchenstücke kann Frau Dr. Hog-Angeloni bei dieser Vorgabe maximal erhalten. (MG)

Lösung:

Frau Dr. Hog-Angeloni macht n Schnitte in Längsrichtung und $40 - n$ Schnitte in Querrichtung. Dadurch entstehen $(n + 1) \cdot (40 - n + 1) = (n + 1)(41 - n) = -n^2 + 40n + 41$ Kuchenstücke.

Den quadratischen Term bringen wir in die Scheitelpunktform einer Parabel:

$$-n^2 + 40n + 41 = -(n^2 - 40n - 41) = -(n^2 - 40n + 400 - 441) = -(n - 20)^2 + 441.$$

Daraus können wir ablesen, dass die meisten Stücke entstehen, wenn Frau Dr. Hog-Angeloni $n = 20$ Schnitte in Längsrichtung und demnach auch 20 Schnitte in Querrichtung macht. Sie erhält dann 441 Kuchenstücke.

Alternative mit Differentialrechnung: Wir bestimmen das Maximum der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(n) = -n^2 + 40n + 41$.

Die Ableitungsfunktion ist gegeben durch $f'(n) = -2n + 40$. Aus $-2n + 40 = 0$ ergibt sich das Extremum bei $n = 20$ Schnitten in Längsrichtung. Wegen $f''(n) = -2$ ist dies tatsächlich ein Maximum und es ergeben sich $f(20) = 441$ Kuchenstücke.

Einfache Alternative: Auch (systematisches) Probieren führt zum Ergebnis, dass sich bei jeweils 20 Schnitten in Längs- respektive Querrichtung die meisten, nämlich 441 Kuchenstücke, ergeben.

Aufgabe 1268: 40 Jahre MONOID

Marcel hat auf einen Zettel ganz oft „40 Jahre MONOID“ geschrieben:

4	0	J	A	H	R	E	M
0	J	A	H	R	E	M	O
J	A	H	R	E	M	O	N
A	H	R	E	M	O	N	O
H	R	E	M	O	N	O	I
R	E	M	O	N	O	I	D

Er stellt fest, dass er nun auf ganz viele verschiedene Weisen „40 Jahre MONOID“ lesen kann, wenn er von einem Buchstaben zum nächsten jeweils nur entweder um eins nach rechts oder um eins nach unten zum jeweils benachbarten Buchstaben weiterliest.

Auf wie viele Weisen kann er so „40 Jahre MONOID“ lesen? (MG)

Hinweis: Er startet auf jeden Fall bei der 4 oben links und endet beim D unten rechts.

Lösung:

Marcel muss auf dem Weg von der 4 zum D insgesamt zwölf Buchstabenwechsel abschreiten und dabei siebenmal nach rechts und fünfmal nach unten gehen.

Dafür gibt es $\binom{12}{7} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$ Möglichkeiten.

Um von der 4 zur linken 0 zu kommen, gibt es eine Möglichkeit, ebenso zur rechten 0.

Zum linken J gibt es nur einen Weg, ebenso zum rechten J. Um zum mittleren J zu kommen gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich von der linken und von der rechten 0 kommend.

Allgemein kann zu jeder Position der Weg vom Zeichen links oder von oben kommen. Die Anzahl der Wege dorthin erhalten wir also, wenn wir die Anzahl der möglichen Wege zum Zeichen links oder oben darüber addieren. Ersetzen wir nach dieser Regel nun jeweils die Zeichen durch die Anzahl der Wege zu diesen Positionen, so erhalten wir:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792

Dies ist übrigens ein Auszug aus dem sogenannten Pascalschen Dreieck, das Blaise Pascal zunächst tatsächlich in ähnlicher rechtwinkliger Form aufgeschrieben hat. Daraus können wir erkennen, dass es 792 Wege gibt, um „40 Jahre MONOID“ zu lesen.

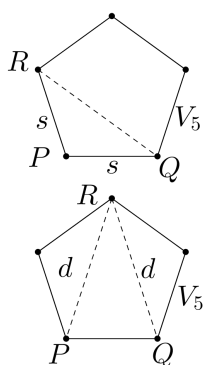
Aufgabe 1269: Eine farbige Angelegenheit

Alle Punkte einer Kreislinie sind entweder rot oder blau gefärbt.

Zeige: Es gibt unendlich viele gleichschenklige Dreiecke, deren Eckpunkte auf der Kreislinie liegen und die von gleicher Farbe sind. (H.F.)

Lösung:

Schritt 1: Es sei V_5 ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Eckpunkte sämtlich auf der Kreislinie liegen.



Da es nur zwei verschiedene Farben gibt, müssen drei seiner Eckpunkte – etwa P , Q und R – von gleicher Farbe sein. Zwei dieser drei Punkte – etwa P und Q – sind notwendigerweise benachbart.

1. Fall: R ist mit P oder mit Q benachbart.
2. Fall: R ist nicht mit P oder Q benachbart.

In beiden Fällen gilt: Das Dreieck mit den gleichfarbigen Eckpunkten P , Q und R ist gleichschenkelig.

Schritt 2: Man kann nun auf unendlich viele Arten das Fünfeck V_5 so um den Mittelpunkt des Kreises drehen, dass man dabei stets ein von V_5 verschiedenes Fünfeck V'_5 erhält.

Mit der gleichen Überlegung wie in Schritt 1 ergibt sich, dass dann stets ein Dreieck $P'Q'R'$ mit gleichfarbigen Eckpunkten existiert.

Insgesamt folgt die Behauptung.

Aufgabe 1270: Gleichungssystem mit 1981 zum Jubiläum

MONOID erschien erstmals im Jahr 1981. Löse folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}-3x_1 + 1x_2 + 4x_3 - 1x_4 &= 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 9 \\ -1x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 1\end{aligned}$$

(MG)

Lösung:

Wir addieren jeweils die erste Gleichung zum 3-fachen der zweiten, zum (-3) -fachen der dritten und zum $\frac{3}{2}$ -fachen der vierten Gleichung. Die neu erhaltene zweite Gleichung multiplizieren wir mit $\frac{1}{2}$ und die neu erhaltene vierte Gleichung mit 2. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}-3x_1 + 1x_2 + 4x_3 - 1x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 7x_2 - 5x_3 - 13x_4 &= -23 \\ -7x_2 - 7x_3 + 19x_4 &= 5.\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt addieren wir zum $-\frac{2}{7}$ -fachen der dritten und zum $\frac{2}{7}$ -fachen der vierten Gleichung die zweite Gleichung. Die neu erhaltene Gleichung in der dritten Zeile multiplizieren wir mit $\frac{7}{9}$ und die vierte Zeile mit $\frac{7}{3}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}-3x_1 + 1x_2 + 4x_3 - 1x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 5x_3 + 6x_4 &= 16 \\ 7x_3 + 22x_4 &= 36.\end{aligned}$$

Nun addieren wir zum $-\frac{5}{7}$ -fachen der letzten Zeile die dritte und erhalten:

$$\begin{aligned}-3x_1 + 1x_2 + 4x_3 - 1x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 5x_3 + 6x_4 &= 16 \\ -\frac{68}{7}x_4 &= -\frac{68}{7}.\end{aligned}$$

Abschließend bestimmen wir rückwärts die Lösungen der Gleichungen. Aus der letzten Zeile folgt $x_4 = 1$.

Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $5x_3 + 6 \cdot 1 = 16$ und somit $x_3 = 2$.

Aus der zweiten Gleichung folgt $2x_2 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$, also $x_2 = 0$.

Wegen $-3x_1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ ist schließlich $x_1 = 2$.

Die Lösung des Gleichungssystems ist also das Quadrupel $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 2, 1)$.

Aufgabe 1271: Zwei Aufgaben mit zwei besonderen Zahlen

Gegeben sind die beiden Zahlen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

- a) Bestimme die (normierte*) quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $-\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- b) Berechne ohne Taschenrechner

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1981} \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1981}.$$

(MG)

Lösung:

- a) Nach dem Satz von Vieta** gelten mit den Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $-p = x_1 + x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$. Für die gegebenen Lösungen folgen also

$$\begin{aligned} -p &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \Rightarrow p &= -1 \\ \text{und } q &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{2 \cdot 2} = \frac{1-\sqrt{5}^2}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

Damit lautet die Gleichung

$$x^2 - 1x - 1 = 0.$$

Alternative: Die Gleichung lässt sich auch durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &= x^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x + \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{2 \cdot 2} \\ &= x^2 - \frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} \\ &= x^2 - \frac{2}{2}x + \frac{1-5}{4} \\ &= x^2 - 1x - 1 \end{aligned}$$

* Normiert bedeutet, dass der Leitkoeffizient 1 ist, hier also das quadratische Glied $1x^2$ ist.

** François Viète (latinisiert: Franciscus Vieta), * 1540 in Fontenay-le-Comte; † 13.12. oder 23.02.1603 in Paris; führte das Rechnen mit Buchstaben in der Neuzeit und einige Symbole (zum Beispiel +, -, = und andere) für Rechenoperationen ein, wird daher auch als einer der Väter der Algebra bezeichnet.

b) Es gilt aufgrund der Potenzgesetze und der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned}
 \varphi^{1981} \cdot \psi^{1981} &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{1981} \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{1981} \\
 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{1981} \\
 &= \left(\frac{(1 + \sqrt{5}) \cdot (-1 + \sqrt{5})}{2 \cdot 2} \right)^{1981} = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}^2}{4} \right)^{1981} \\
 &= \left(\frac{-1 + 5}{4} \right)^{1981} = 1^{1981} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Zahl $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ beschreibt den *Goldenen Schnitt*, ein spezielles Teilungsverhältnis einer Strecke beschreibt. Der Goldene Schnitt ist bereits seit der Antike bekannt.

Die beiden (Teil-)Aufgaben beruhen nun darauf, dass für den Kehrwert $\psi = \frac{1}{\varphi}$ (dies könnt Ihr gerne nachrechnen) der Zahl des Goldenen Schnitts $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ gilt.

Aus dieser Beziehung lässt sich ebenfalls die Gleichung in der ersten Teilaufgabe herleiten (Multiplikation mit φ und Subtraktion von 1). Besonders der Ansatz über den Satz von Vieta zeigt auch diese Beziehung:

Wegen $\psi = \varphi - 1$ ist $\varphi + (-\psi) = \varphi - \varphi + 1 = 1$ ist $p = -1$ und wegen $\psi = \frac{1}{\varphi}$ resp. $\varphi \cdot (-\psi) = \varphi \cdot \left(-\frac{1}{\varphi}\right) = -1$ folgt $q = -1$.

In der zweiten Teilaufgabe folgt im zweiten Schritt aus $\varphi \cdot \psi = \varphi \cdot \frac{1}{\varphi} = 1$.

Aufgabe 1272: Zahlen schreiben II

Nachdem Kalea ihrem Onkel gezeigt hat, wie gut sie schon Zahlen schreiben kann (siehe MONOID 145, Mathespielerei II auf Seite 22), möchte ihre kleine Schwester Sophie ebenfalls ihre Künste unter Beweis stellen. Dabei hat sie sich etwas Besonderes überlegt: Sie notiert einmal die Zahl 1, zweimal die Zahl 2, dreimal die Zahl 3 und so weiter. Dabei trennt sie die Zahlen auch jeweils. Es entsteht also die Folge

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...

a) An welchen Stellen der Folge steht die Ziffernfolge 1981?

b) Welche Ziffer steht an der 2021. Stelle der Folge?

(MG)

Lösung:

- a) Vor der ersten Zahl 1981 stehen die Zahlen 1 bis 1980. Dafür werden

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1980 = \frac{1980 \cdot 1981}{2} = 1\,961\,190$$

Stellen benötigt. Dabei wurde in der Rechnung die Formel für die Gaußsche Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen verwendet: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Also steht die erste Zahl 1981 an der 1 961 191. Stelle der Folge. Die letzte 1981 steht dann an der 1 963 171. Stelle

- b) Es soll $1 + 2 + 3 + \dots + n = 2021$ sein. Wir verwenden die Gaußsche Summenformel und erhalten somit

$$\begin{aligned} 2021 &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \\ \implies 4042 &= n^2 + n \\ \iff \frac{16169}{4} &= n^2 + n + \frac{1}{4} \\ \iff \frac{16169}{4} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \iff \pm \sqrt{\frac{16169}{4}} &= n + \frac{1}{2} \\ \iff -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{16169}{4}} &= n \end{aligned}$$

Da $n > 0$ ist, folgt $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{16169}{4}} \approx 63,1$.

Also sind an der 2021. Stelle bereits die Zahlen 63 abgeschlossen. Dort steht also die Zahl 64.

Bemerkung: Die Zahlen 64 stehen an den Stellen 2017 bis 2080.

Aufgabe 1273: Summen aufeinanderfolgender Zahlen

Joana hat ein wenig mit Zahlen „experimentiert“ und festgestellt, dass sich manche Zahlen auf viele verschiedene Weisen als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen lassen, andere nur auf eine Weise und manche gar nicht. Dabei bestehen manche Darstellungen aus nur zwei Summanden, andere aus mehreren. Die Zahl 2020 lässt sich unter anderem als Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $402 + 403 + 404 + 405 + 406 = 2020$ oder 40 aufeinanderfolgenden Zahlen $31 + 32 + \dots + 70 = 2020$ darstellen.

Nun untersucht Joana, auf wie viele verschiedene Weisen sich

- a) das MONOID-Ersterscheinungsjahr 1981,
- b) das aktuelle Jubiläumsjahr 2021 sowie
- c) das MONOID-Alter 40

als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen schreiben lassen.

Zu welchen Ergebnissen wird sie kommen? Gib auch die Summendarstellungen an. (MG)

Lösung:

Für die n Zahlen $m, m + 1, m + 2, \dots, m + n - 1$ eines solchen Blocks beträgt die Summe

$$\begin{aligned} S &= m + (m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + n - 1) \\ &= nm + 1 + 2 + \dots + (n - 1) \stackrel{(*)}{=} nm + \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n(n + 2m - 1)}{2}, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle (*) die Gaußsche Summenformel verwendet wurde.

Jede Zerlegung $2S = nk$ mit $n < k$, wobei wegen $k = n + 2m - 1$ genau eine der beiden Zahlen n und k gerade und die andere ungerade sein muss, führt zu einer Darstellung der Zahl S als Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Der kleinste Summand ist $m = \frac{S}{n} - \frac{n-1}{2}$.

- a) Die Jahreszahl der MONOID-Ersterscheinung hat die Primfaktorzerlegung $1981 = 7 \cdot 283$. Daher hat 1981 (neben der Zahl 1) die ungeraden Teiler 7, 283 und 1981. Daher ergeben sich die folgenden drei gültigen Darstellungen:
 - wegen $3962 = 2 \cdot 1981$ der 2-er Block $990 + 991 = 1981$,
 - wegen $3962 = 7 \cdot 566$ der 7-er Block $280 + 281 + 282 + \dots + 286 = 1981$,
 - wegen $3962 = 14 \cdot 283$ der 14-er Block $135 + 136 + 137 + \dots + 148 = 1981$.
- b) Für 2021 ergeben sich aufgrund der Primfaktorzerlegung $2021 = 43 \cdot 47$ die ungeraden Teiler 43, 47 und 2021 und somit die folgenden drei gültigen Darstellungen:
 - wegen $4042 = 2 \cdot 2021$ der 2-er Block $1010 + 1011 = 2021$,
 - wegen $4042 = 43 \cdot 94$ der 43-er Block $26 + 27 + 28 + \dots + 68 = 2021$,
 - wegen $4042 = 47 \cdot 86$ der 47-er Block $20 + 21 + 22 + \dots + 66 = 2021$.
- c) Es ist $40 = 2^3 \cdot 5$. Also hat 40 nur den ungeraden Teiler 40. Daraus ergibt sich wegen $80 = 5 \cdot 16$ einzig $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$ als gültige Darstellung.

Aufgabe 1274: Ein Altersrätsel

Bei einem Spaziergang durch die Stadt fragt Herr Mayer seinen Freund Schmidt, wie alt seine vier Kinder seien. Schmidt: „Das Produkt der Zahlen, die jeweils ihr Lebensalter angeben (in Jahren) ist 96“. Herr Mayer nach einigem Nachdenken: „Dürfte ich noch mehr darüber erfahren?“ Schmidt: „Die Summe derselben Zahlen stimmt mit der Anzahl der Stockwerke des vor uns liegenden Hochhauses über-

ein.“ Mayer nach einer kurzen Überlegung: „Fast komme ich damit zurecht. Aber vielleicht machst du noch eine Bemerkung?“ Schmidt: „Mein Zweitjüngster hat blaue Augen.“ Mayer: „Danke, das genügt!“ Und Herr Mayer nannte die Alter der vier Kinder. Wie alt sind diese? (Martin Mettler †)

Lösung:

Das Produkt der Alterzahlen ergibt 96. Die Menge aller möglichen Zerlegungen

Alter des 1. K.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
Alter des 2. K.	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	2	2	2	3
Alter des 3. K.	1	2	3	4	6	12	2	3	4	6	4	4	2	3	4	4
Alter des 4. K.	96	48	32	24	16	8	24	16	12	8	8	6	12	8	6	4
Summe	99	52	37	30	24	22	29	22	19	17	16	15	18	15	14	13

Da Herr Mayer die Anzahl der Stockwerke des Hochhauses kennt, aber dennoch eine weitere Information braucht, muss er zwei mögliche Zerlegungen mit der gleichen Summe gefunden haben und zwar

- a) 1 4 4 6 / 2 2 3 8 Summe: 15
- b) 1 1 8 12 / 1 2 3 16 Summe: 22

Weil nun Herr Schmidt antwortet „Mein Zweitjüngster hat blaue Augen“, bedeutet dies, dass die 3 Jüngsten einzelne Kinder (keine Zwillinge oder Drillinge) sind. Somit ist die Lösung: 1 2 3 16. (Volker Priebe)

Information: Diese Aufgabe stammt aus dem schulinternen Wettbewerb des Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, aus dem letztendlich 1981 das Mathematikblatt MONOID hervorging (vgl. Artikel zur MONOID-Geschichte in MONOID-Heft 146, Seite 6). Damit ist die Aufgabe eine der ersten, die in MONOID aufgelöst wurden – nämlich in Heft 1 vor genau 40 Jahren.

Zu Besuch bei ... Pythagoras von Martin Mattheis

Wieder einmal hat die MONOID-Redaktion keine Kosten und Mühen gescheut, um einen bedeutenden Mathematiker zu interviewen. Dieses Mal waren wir in Unteritalien zu Besuch bei Pythagoras in Metapont.



Sehr geehrter Herr Pythagoras, wo lebten und wirkten Sie?

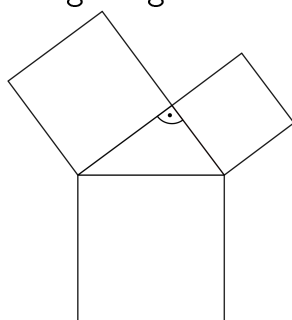
So ganz genau lässt sich das nicht sagen. In eurer Zeitrechnung würdet ihr sagen, dass ich um 570 v. Chr. auf Samos in Griechenland geboren wurde und irgendwann nach 510 v. Chr. in Metapont in Süditalien gestorben bin. In der Zeit dazwischen bin ich weit herumgekommen: Von Samos aus ging es in meiner Jugend zu den Gelehrten nach Ägypten und Babylonien, um dort mein Wissen über die Welt zu vergrößern. Nach meiner Heimkunft erlebte ich, dass ein Tyrann in Samos die Macht ergriff, weswegen ich nach Kroton in Unteritalien auswanderte, dort Jünger um mich scharte und eine Schule gründete. Nach Unruhen in Kroton führte der Weg für mich und meine Gemeinschaft dann nach Metapont.

Was war Ihre bedeutendste mathematische Entdeckung?

Nicht meine bedeutendste, aber die bekannteste Entdeckung ist der nach mir benannte Satz des Pythagoras. Dabei geht es um Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks: Die Summe der Quadrate der am rechten Winkel anliegenden Seiten des Dreiecks ist genau so groß, wie das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite.

Es bereitet mir – auch wenn ich schon lange tot bin – nach wie vor körperliche Schmerzen, wenn ich höre, wie viele in Eurer Zeit dazu einfach sagen „ a Quadrat plus b Quadrat gleich c Quadrat“, und das, ohne dazu zu sagen, was a , b und c eigentlich sein sollen. Der Ehrlichkeit halber sollte ich ergänzen, dass die Aussage des nach mir benannten Satzes schon lange vor mir bei den Ägyptern und auch bei den Babyloniern bekannt war.

Das Neue meiner Zeit war, dass die Gültigkeit des Satzes nicht nur an Beispielen ausprobiert wurde, sondern dass wir bei den Pythagoreern die Ersten waren, die diesen Satz allgemeingültig beweisen konnten. Allerdings kann ich mich nicht mehr genau erinnern, ob ich das selbst geschafft hatte, oder ob das erst meinen Nachfolgern bei den Pythagoreern gelungen ist.

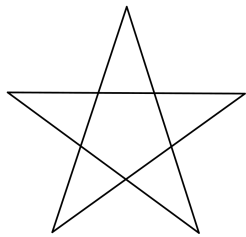


Welches gedruckte Werk von Ihnen hatte den größten Einfluss auf die Mathematik?

Die Frage zeigt Euer Unwissen: Zum einen wurde der Buchdruck mit beweglichen Lettern erst in der Mitte des 15. Jahrhunderts von Johannes Gutenberg erfunden [nach dem die MONOID herausgebende Universität benannt ist (Anmerkung der Redaktion)]. Zum anderen zeigt die Frage, dass ihr noch nichts von der von mir begründeten und nach mir benannten Gemeinschaft der Pythagoreer gehört habt.

Könntet Ihr uns darüber bitte mehr berichten?

Sehr gerne. Grundlage des Glaubens der von mir begründeten religiösen Gemeinschaft der Pythagoreer war die Seelenwanderung, die besagt, dass die unsterbliche Seele nach dem Tod in ein anderes Lebewesen übergeht. Da wir nicht riskieren wollten, einen guten Freund zu essen, haben wir uns deswegen vegetarisch ernährt. Den einzigen Weg für die unsterbliche Seele, dem andauernden Kreislauf zu entgehen, sahen wir in Enthaltbarkeit und in der Beschäftigung mit der Mathematik. Nur dadurch sahen wir die Möglichkeit, die Seele zu reinigen, sie der ewigen Wiedergeburt zu entziehen und für sie einen Platz als Stern am Himmel zu erlangen. Diese Lehre wurde dann auch nach meinem Tode von meinen Jüngern weiterverbreitet.



Das Erkennungssymbol unseres religiös-philosophischen Geheimbundes war schon zu meinen Lebzeiten das Pentagramm, dem auch im Mittelalter magische Kraft bei der Abwehr böser Geister zugeschrieben wurde. Es freut mich, auch in Eurer Zeit immer wieder junge Menschen mit einem Pentagramm um den Hals zu sehen, die damit ihre Liebe zur Mathematik ausdrücken.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch über sich berichten?

Auch heute noch gerate ich ins Schwärmen, wenn ich an die vielen Diskussionen mit meinen Jüngern denke, in denen wir unsere Grundüberzeugung festigten, dass die ganze Natur nach Verhältnissen natürlicher Zahlen – ihr würdet dazu heute wohl „nach positive rationale Zahlen“ sagen – aufgebaut ist. Die sieht man nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Harmonielehre in der Musik und auch sonst überall in der Natur. Es löste eine große Krise unter den Pythagoreern aus, als ausgerechnet an unserem Erkennungssymbol entdeckt wurde, dass es auch – in euren Worten – „irrationale“ Zahlenverhältnisse gibt.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?

Eigentlich in jedem Buch, das sich mit der griechischen Mathematik der Antike beschäftigt. Gibt man meinen Namen in eine Internet-Suchmaschine ein, so erhält man fast 10 Millionen Ergebnisse. Ihr seht, mein Ruhm ist in Eurer Zeit schon sehr nahe an einem Platz am Firmament.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern mit auf den Weg geben?

„Alles ist Zahl.“

Lieber Meister Pythagoras, wir danken Ihnen für dieses aufschlussreiche Gespräch!

Es gibt unendlich viele Primzahlen Ein Beweis mit Hilfe von Fermatzahlen

von Hartwig Fuchs

Die Zahlen $F_m = 2^{2^m} + 1$ für $m = 0, 1, 2, \dots$ werden nach dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat (1607–1665), der sie als Erster untersuchte, als *Fermatzahlen* bezeichnet. Die Folge der Fermatzahlen beginnt mit

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 641, \dots$$

Für Fermatzahlen gilt:

- (1) Keine zwei Fermatzahlen F_m und F_n , wobei $m \neq n$ ist, haben einen gemeinsamen Teiler außer 1.

Zum Nachweis davon benötigen wir die Formeln $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ und $(2^{2^m})^2 = 2^{2^m \cdot 2} = 2^{2^{m+1}}$, sowie $2^{2^0} - 1 = F_0 - 2 = 1$. Nun ist

$$F_m = 2^{2^m} + 1 = \frac{(2^{2^m})^2 - 1}{2^{2^m} - 1} = \frac{2^{2^{m+1}} - 1}{2^{2^m} - 1} \text{ mit } m \geq 0.$$

Daraus folgt für $n = 0, 1, 2, \dots$, dass

$$(2) \quad F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} = \frac{2^{2^1} - 1}{2^{2^0} - 1} \cdot \frac{2^{2^2} - 1}{2^{2^1} - 1} \cdot \frac{2^{2^3} - 1}{2^{2^2} - 1} \cdot \dots \cdot \frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^{n-1}} - 1} = \frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^0} - 1} = 2^{2^n} - 1$$

ist. Wegen $2^{2^n} - 1 = (2^{2^n} + 1) - 2 = F_n - 2$ folgt daraus, dass gilt:

$$F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} = F_n - 2 \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Es sei nun p ein Primfaktor von F_n , also $F_n = vp$ für ein $v > 1$, und zugleich ein Teiler von $F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1}$, also $F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} = wp$ für ein $w \geq 1$. Damit folgt aus Gleichung (2), dass $wp = vp - 2$ und somit $2 = p(v - w)$ gelten – ein Widerspruch, denn es ist $p \geq 3$, weil F_n ungerade ist. Daher haben $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ und F_n keinen gemeinsamen Teiler außer 1 – woraus (1) folgt.

Aus der Feststellung (1) ergibt sich nun, dass die Folge der Primzahlen unendlich ist: Jede Fermatzahl F_m ist eine Primzahl p_m oder F_m hat einen Primteiler p_m . Dann kommt p_m in keiner von F_m verschiedenen Fermatzahl vor. Da es unendlich viele Fermatzahlen F_m mit $m = 0, 1, 2, \dots$ gibt, muss es auch unendlich viele Primzahlen p_m geben. Also: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Errata

Gelöste Aufgabe 1264 „Verbindungen in einem Netzwerk“ in MONOID 146, Seite 30

Leider ist die abgedruckte Lösung fehlerhaft und dadurch unvollständig. Hier die korrigierte Lösung:

Die Anzahl der umweglosen Verbindungen von A nach B sei x , die von B nach C sei y und die von A nach C sei z .

Für die Gesamtzahlen aller Verbindungen von A nach B , von B nach C , von A nach C gelten dann

$$A \longrightarrow B: \quad x + y \cdot z = 82$$

$$B \longrightarrow C: \quad y + x \cdot z = 62$$

$$A \longrightarrow C: \quad z + x \cdot y \geq 10$$

Wir subtrahieren nun die zweite Gleichung von der ersten und erhalten

$$x + y \cdot z - (y + x \cdot z) = 82 - 62$$

$$\iff -xz + yz + x - y = 20$$

$$\iff (y - x)z - (y - x) = 20$$

$$\iff (z - 1)(y - x) = 20.$$

Da $z \geq 0$ ist, muss $z - 1 \geq -1$ sein. Daher sind in der letzten Zeile die folgenden Zerlegungen möglich: $-1 \cdot (-20)$, $1 \cdot 20$, $2 \cdot 10$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 4$, $10 \cdot 2$ und $20 \cdot 1$. Daher ist $z \in \{0, 2, 3, 5, 6, 11, 21\}$.

Zur Bestimmung von y setzen wir nun $x = 82 - yz$ in $y + xz = 62$ ein. Dann ist $y + (82 - yz)z = 62$, also $y - z^2y = 62 - 82z$, woraus folgt $y = \frac{62-82z}{1-z^2}$.

Wir setzen hier der Reihe nach die möglichen z -Werte ein. Dann ergeben sich nur für $z = 0, 2, 3, 11$ ganzzahlige Werte für y , nämlich (in entsprechender Reihenfolge) $y = 62, 34, 23, 7$.

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 82 - y \cdot z$. Damit sind wiederum $x = 82, 14, 13, 5$ ganzzahlig.

Überprüfen wir mit den berechneten Werten die Ungleichung, so zeigt sich, dass alle vier gefundenen Tripel diese Ungleichung erfüllen.

Damit ergeben sich folgende vier möglichen Lösungen:

x (direkte Verbindungen von A nach B)	5	13	14	82
y (direkte Verbindungen von B nach C)	7	23	34	62
z (direkte Verbindungen von A nach C)	11	3	2	0
indirekte Verbindungen von A nach C ($x \cdot y$)	35	299	476	5084

„Ein Blick hinter die Kulissen“ in MONOID 146, Seite 44

Im Nachweis für das erste Spiel (vorletzter Absatz) hat sich eine Ziffer 9 statt einer Klammer eingeschlichen. Es muss heißen: $(p^2 + 17) : 12 = ((6n \pm 1)^2 + 17) : 12 = (36n^2 \pm 12n + 18) : 12 = 3n^2 \pm n + 1 + \frac{6}{12}$.

Wir bitten Euch, die Fehler zu entschuldigen.

Δ -Variante Lösung einer Knobelaufgabe zur Medizin von Achim Klenke

Auf den Sonderseiten zum Mainzer Wissenschaftsmarkt in der Sonderauflage des Heftes 146 haben wir Euch folgende Aufgabe gestellt:

Delta-Variante

Im Jahr gab es in ganz Deutschland pro 100 000 Einwohner in der Kalenderwoche (KW) 22 (31.05.2021 – 06.06.2021) drei Neuinfektionen mit der Corona-Mutante Delta. Alle anderen Varianten hatten zusammen ungefähr 32 Neuinfektionen. In der Kalenderwoche 23 (07.06. – 13.06.) waren es vier (Delta) und 21 (alle anderen Varianten).

- a) Wenn wir davon ausgehen, dass sich die Infektionszahlen der Delta-Variante in jeder Woche um den gleichen Faktor verändern, wie viele Neuinfektionen mit der Delta-Variante gibt es dann zum Schulbeginn in Rheinland-Pfalz (Kalenderwoche 35)?
- b) Wenn wir davon ausgehen, dass sich auch die anderen Varianten pro Woche immer um den gleichen Faktor verändern (natürlich ein anderer Faktor als für die Delta-Variante), wie groß ist dann die Zahl der Neuinfektionen aller anderen Varianten zusammen zu Schulbeginn?

Lösung

- a) Die Delta-Variante verändert sich jede Woche um den Faktor $\frac{4}{3}$. In den zwölf Wochen von KW 23 bis KW 35 verändert sie sich also um den Faktor $\left(\frac{4}{3}\right)^{12} = 31.57$. In KW 23 gibt es vier Neuinfektionen, in KW 35 sind es also

$$4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{12} = 126,28.$$

- b) Bei allen anderen Varianten ist der wöchentliche Faktor $\frac{21}{32}$. In KW 35 ist die Anzahl der Neuinfektionen auf 100 000 Einwohner daher

$$32 \cdot \left(\frac{21}{32}\right)^{12} = 0,2.$$

Der Anteil der Delta-Variante liegt in KW 35 also bereits bei $\frac{126,28}{126,28+0,2} = 99,8\%$.

Mitteilungen

- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
www.facebook.com/monoid.matheblatt
www.instagram.com/monoid.matheblatt
Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/>.
- **Einladung zur MONOID-Feier** An alle Freunde und Förderer von MONOID: Ihr seid herzlich eingeladen an der MONOID-Feier 2021 teilzunehmen. Es werden Preise an erfolgreiche Löser des Schuljahres 2019/2020 vergeben. Die Feier findet am
Samstag, den 27. November,
ab 10 Uhr
statt. Den Festvortrag wird Prof. Dr. Manfred Lehn (Universität Mainz) halten. Alle Preisträgerinnen und Preisträger werden gesondert eingeladen. Weitere Informationen werden demnächst auf unserer Internetseite folgen:
<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/>.
- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2020/21 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Bundesrunde der Matheolympiade:** Die langjährigen MONOID-L(o)eser und mehrfachen MONOID-Preisträger Oscar Su (8. Klasse) und Maximilian Hauck (13. Klasse, beide Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey) erreichten beide in den ersten drei Runden des Wettbewerbs jeweils einen 1. Preis. Aufgrund dessen durften sie Rheinland-Pfalz bei der Bundesrunde vertreten – die Landesmannschaft hatte lediglich elf Teilnehmer! Sowohl Oscar als auch Maximilian gewannen eine Goldmedaille und einen Sonderpreis für besonders elegante Lösungen. Sie gehören somit zu den 14 besten deutschen Mathematikschülern bei der Matheolympiade (MO).

Beide waren auch schon beim Bundeswettbewerb erfolgreich, Maximilian sogar als Bundessieger. Nachdem er dort im letzten Jahr schon eine Bronzemedaille für Deutschland erzielte, hat Maximilian nach dem diesjährigen MO-Erfolg erneut als einer von nur sechs Schülern Deutschland bei der Internationalen Mathematikolympiade (IMO) 2021 vertreten.



Oscar (l.) und Maximilian (r.)

Wir gratulieren den beiden MONOIDanern ganz herzlich zu ihren Erfolgen und wünschen Ihnen weiterhin viel Spaß und Erfolg bei mathematischen Wettbewerben.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 145

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 5: Anton Kreml 11, Marek Moldehn 3, Philipp Reis 11;

Kl. 6: Anna Lena Drescher 5, Mya Fuchs 5, Johannes Greis 11;

Kl. 7: Oscar Su 37, Kevin Tran 12, Jan Christian Weber 11;

Kl. 8: Lars Schall 8;

Kl. 10: Lukas Born 18;

Kl. 12: Torben Bürger 20.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:

Kl. 9: Oliver Bill 7.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:

Kl. 5: Mika Schäfer 3;

Kl. 11: Marvin Wenzel 20.

Friedberg, Augustinerschule:

Kl. 7: Konstantin Herbst 18;

Kl. 10: Nico Brockmeier 19, Aleksandra Herbst 16.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:

Kl. 11: Sönke Schneider 19;

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:

Kl. 6: Lia Boyanova 8, Mark Garkuscha 1, Eva Hovadikova 2, Iwais Karimi 7, Sarah Markhof 6, Nam-anh Pham 7;

Kelkheim, Privatschule Dr. Richter:

Kl. 11: Dennis Mayle 21.

Linz, Martinus-Gymnasium:

Kl. 9: Simon Waldek 4.

Mainz, Martinus-Schule:

Kl. 3: Johannes Wünstel 1,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 8: Gregor Salaru 33;

Kl. 10: Raphael Mayer 7.

Mainz, Theresianum:

Kl. 11: Clemens Zabel 19.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:

Kl. 12: Johannes Kerhberger 8.

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 5: Jasmin Borrmann 9, Leonard Köhler 4, Leon David Mayer 2, Lotta Pietschmann 9;

Kl. 6: Klara Backmann 13, Luis Brinkmann 19, Louisa Lukowiak 13;

Kl. 7: Emilie Borrmann 10;

Kl. 10: Kathrin Borrmann 11, Paulina Herber 14, Josefine Kaßner 19;

Kl. 11: Jonas Glückmann 23.

Schondorf, Burg-Gymnasium:

Christian Carda 7.

Schrobenhausen, Gymnasium

Kl. 6: Luca Sindel 12.

Tangermünde, Diesterweggymnasium:

Kl. 5: Mai Linh Dang 5;

Kl. 8: Tu Sam Dang 17;

Kl. 10: Miriam Büttner 20.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:

Kl. 8: Philipp Lörcks 36.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:

Kl. 5: Lilith Gorecki 3,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:

Kl. 9: Mareike Bühler 9.

Worms, Gauß-Gymnasium:

Kl. 7: Jan Wickenheiser 10;

Kl. 8: Alexander Haun 13;

Kl. 10: Lukas Emmel 7, Marco Klein 12.

1981 – 2021



Jahre MONOID

1981–2021

40 Jahre MONOID

von Marcel Gruner

- XL ist nicht nur eine Kleidergröße, sondern auch die römische Zahl 40. Wir feiern daher das XL. Jubiläum.
- -40°C und -40°F sind die gleiche kalte Temperatur.
- 40 ist die Ordnungszahl von Zirkonium.
- Die Schwangerschaft dauert beim Menschen vierzig Wochen.
- Das Mindestalter für den Bundespräsidenten Deutschlands ist auf vierzig Jahre festgelegt – MONOID kann also jetzt Bundespräsident werden.
- Ali Baba bezwingt in einer Geschichte der Geschichtensammlung „Tausend-undeine Nacht“ 40 Räuber.
- Der israelitische Auszug aus Ägypten dauerte 40 Jahre, unterwegs war Mose 40 Tage und 40 Nächte bei Gott, um die Gebote zu empfangen.
- Nur sehr wenige Zahlen haben in einer Sprache in alphabetischer Reihenfolge aufeinanderfolgende Buchstaben. Eine dieser besonderen Zahlen ist im Englischen die Zahl *forty*.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Fischer, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Alina Gehlhaar, Vera Hofmann, mit freundlicher Unterstützung von Marcel Gruner

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Titellayout: Karsten Müller, Büro Schwarzschild Wiesbaden

Inhalt

M. Krummeck, T. Nutz und K. Vosen: Nullstellen von Littlewoodpolynomen . . .	3
H. Fuchs: 99 Lügner	4
H. Fuchs: Was uns über den Weg gelaufen ist	5
H. Sewerin: Das Denkerchen	5
Mathematische Entdeckungen	7
Die Aufgabe für den Computer-Fan	9
H. Fuchs: Wo liegt der Fehler?	12
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 146	13
Neue Mathespielereien	19
Neue Aufgaben	21
Gelöste Aufgaben aus MONOID 146	22
M. Mattheis: Zu Besuch bei Pythagoras	30
Hartwig Fuchs: Es gibt unendlich viele Primzahlen – ein Beweis mit Hilfe von Fermatzahlen	33
Errata	34
Achim Klenke: Lösung zur Knobelaufgabe zur Medizin	35
Mitteilungen	36
Rubrik der Löser und Löserinnen	37
Marcel Gruner: 40 Jahre Monoid	39
Impressum	40

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>