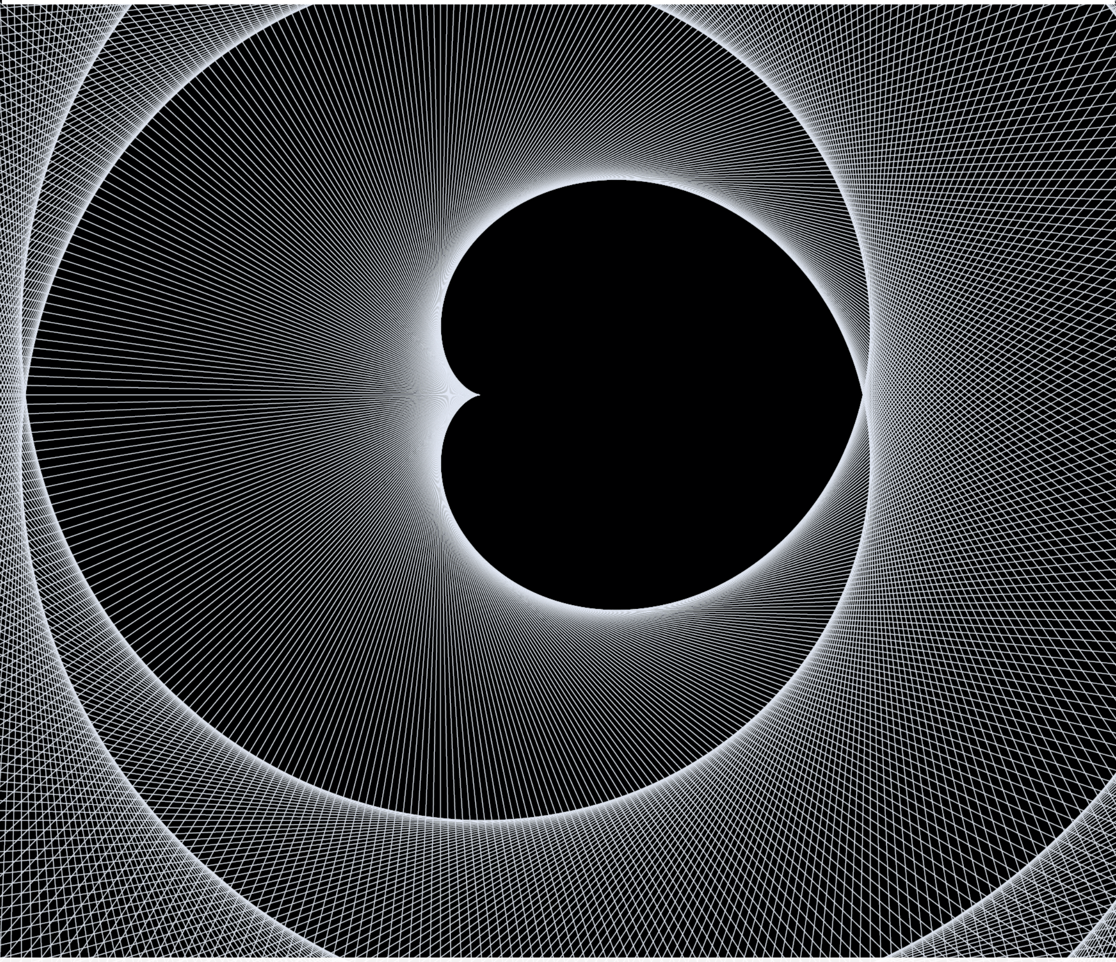
Jahrgang 40 Heft 148 Dezember 2021

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler(innen) und Lehrer(innen)

1981 erstes Heft durch Martin Mettler

herausgegeben von der Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

1981 — 2021
40 Jahre MONOID

JG|U JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Februar 2022.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

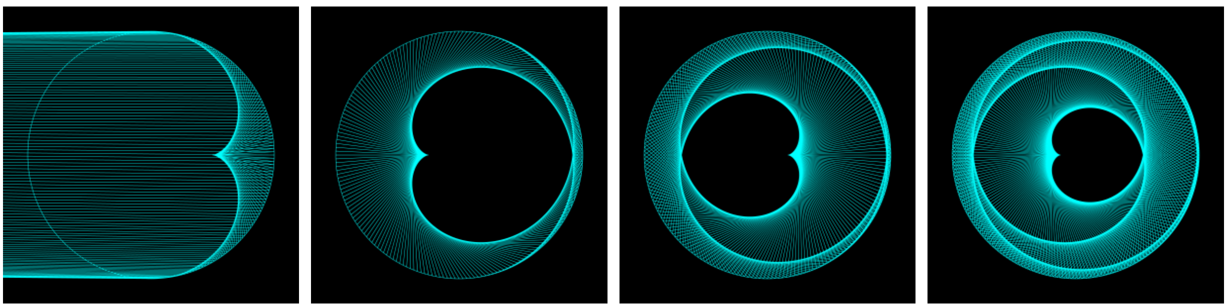
Die Redaktion

Die Kartoide – eine Kaustik

von Florian Bürger, Tobias Fix,
Julian Kress und Ann-Kathrin Schmitt

Kaustiken sind physikalische Phänomene, die jeder im Alltag beobachten kann. Es handelt sich dabei um die Brennlinien, die durch Lichtbrechung oder Lichtreflexion entstehen. Erstere bezeichnet man als Diakaustiken, zweitere als Katakaustiken. Die beiden nebenstehenden Bilder stellen eine Katakaustik in einer Kaffeetasse und eine Diakaustik im Wasser dar. Etwas mathematischer fomuliert, sind Kaustiken Hüllkurven (auch: Enveloppe), die durch eine Schar von Geraden entstehen, die man als Lichtstrahlen auffassen kann. Die Kaustik wird dabei in jedem ihrer Punkte genau einmal von der Geradenschar (Lichtstrahlen) tangential berührt. Das Aussehen einer Kaustik kann von der Position der Lichtquelle abhängen. Liegt die Quelle im Unendlichen, handelt es sich um parallel einfallendes Licht. Andernfalls geht man von einer radialen, punktförmigen Lichtquelle aus.

Auf den untenstehenden Bildern repräsentiert die erste Entwicklungsstufe (erste Darstellung in der Reihe) eine Kaustik, die durch Reflexion der Lichtstrahlen am Kreis entsteht, wobei sich die Lichtquelle im Unendlichen befindet. Diese Art Kaustik nennt man Kardioide (sogenannte Kaffeetassenkaustik). Die weiteren kleinen Bilder zeigen die Lichtstrahlen nach der zweiten, dritten und vierten Reflexion. Auf dem Titelbild des aktuellen Monoid-Heftes findet sich diese Kaustik nach der zehnten Reflexion dargestellt.



Aufgaben zum neuen Jahr

von Hartwig Fuchs

Ein magisches Quadrat

Ein Quadrat sei in vier kongruente Teilquadrate zerlegt. Verteile dann in die 4 Ecken eines jeden Teilquadrates die Zahlen 1, 2020, 2021, 2022 so, dass gilt:

> Die Summe aller vier Zahlen einer jeden Zeile, einer jeden Spalte und der beiden Diagonalen des großen Quadrats stimmen überein.

Finde ein solches Quadrat (davon gibt es viele!).

Endziffern

Wie lauten die beiden letzten Ziffern von 17^{2022}?

Ein besonderes Produkt

Es sei $P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ für $n \geq 2$.
Begründe $P_{2021} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2022}{2021}$.

Zwei Ungleichungen

Für die Zahlen a, b und c gelte: $a \geq b \geq c > 0$ sowie $a + b + c \leq 2021$.
Dann gilt:

(1) $9c^2 < 2022$ sowie
(2) $a^2 + 3b^2 + 5c^2 < 2022$.

Zeige dies.

Jahreszahl-Aufgabe

Für welche positiven ganzen Zahlen n hat die Summe

$$S_n = (n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + (n-4043)^2$$

den kleinsten Wert?

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 39.

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

1	2	$3{\cdot}N$	N	M	$2{\cdot}M$	D
M				4		
O						15
N		12				
O					11	
I			8			
D						

a) Ersetze die Buchstaben M, N, O, I, D und die Produkte $2 \cdot M, 3 \cdot N$ durch jeweils verschiedene Zahlen nach der Vorschrift (vergleiche die Figur): Bezeichnet man das Feld in der Zeile x und der Spalte y mit (x, y), so trägt man in dieses Feld die Zahl $x + y$ ein.
Beispiel: $(I, N) \to I + N = 8$.

b) Bestimme die Zahlen, die in die leeren Felder gehören.

c) Wenn man aus den 36 Zahlen des Quadrates sechs Zahlen auswählt, von denen keine zwei in der gleichen Zeile und auch nicht in der gleichen Spalte vorkommen, so gilt: Alle Summen – jede gebildet aus sechs solcher Zahlen – sind gleich.

Lösung

a) Zeile 1: $(M, M) \to M + M = 4 \Rightarrow M = 2$
Zeile 3: $(N, 3 \cdot N) \to N + 3 \cdot N = 12 \Rightarrow N = 3$
Zeile 4: $(O, 2 \cdot M) \to O + 2 \cdot M = O + 4 = 11 \Rightarrow O = 7$
Zeile 2: $(O, D) \to O + D = 7 + D = 15 \Rightarrow D = 8$
Zeile 5: $(I, N) \to I + 3 = 8 \Rightarrow I = 5$.

b) Mit der Lösung von a) erhält man die folgende Figur.

	1	9	3	2	4	8
2	3	11	5	4	6	10
7	8	16	10	9	11	15
3	4	12	6	5	7	11
7	8	16	10	9	11	15
5	6	14	8	7	9	13
8	9	17	11	10	12	16

c) Jede der Summen S besteht aus sechs Summanden $x + y$, bei denen x genau eine der Zeilennummern 2, 7, 3, 7, 5, 8 und y genau eine der Spaltennummern 1, 9, 3, 2, 4, 8 ist.
Daraus folgt: Jede Summe S hat den Wert

$$(2 + 7 + 3 + 7 + 5 + 8) + (1 + 9 + 3 + 2 + 4 + 8) = 59.$$

Was uns über den Weg gelaufen ist
Vorsicht vor voreiligen Schlüssen
von Hartwig Fuchs

Die Fläche der Dreiecke A_1 und A_2 mit den Seitenlängen $13, 13, 10$ und $13, 13, 24$ ist gleich groß. Wahr oder falsch?

Lösung

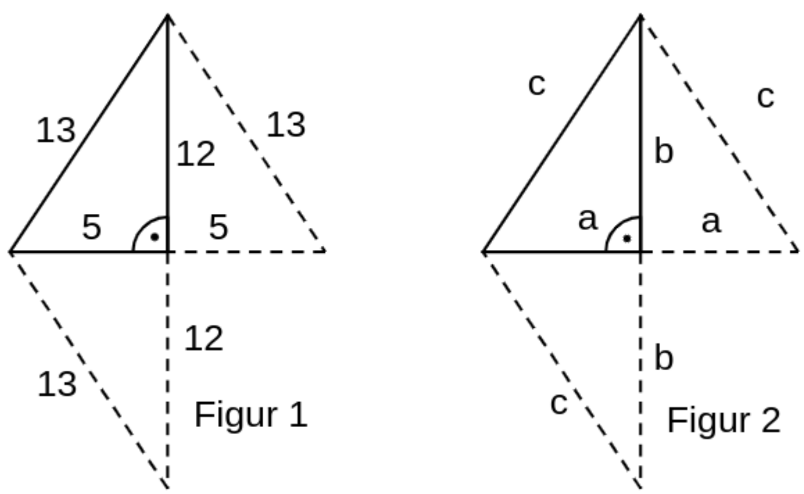
Ein Dreieck mit den Seitenlängen 5, 12, 13 ist rechtwinklig, denn $5^2 + 12^2 = 13^2$ (Umkehrung des Satzes von Pythagoras). Ergänzt man nun A wie in Figur 1 zu den Dreiecken A_1 mit den Seitenlängen 13, 13, 10 und A_2 mit den Seitenlängen 13, 13, 24, dann sieht man:

$$|A_1| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ und } |A_2| = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60.$$

Es gibt unendlich viele Dreieckspaare B_1 und B_2 mit der gleichen Eigenschaft wie A_1 und A_2.

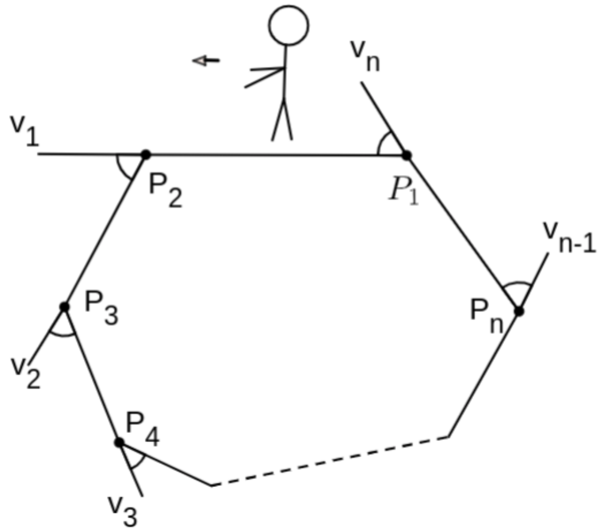
Es sei B ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a, b und der Hypotenusenlänge c. Dann sieht man in Figur 2: Die Dreiecke B_1 und B_2 mit den Seitenlängen c, c, $2a$ und c, c, $2b$ haben die gleiche Fläche, denn

$$|B_1| = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab \text{ und } |B_2| = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot a = ab.$$



Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs



In einem konvexen* n-Eck, wobei $n \geq 3$, mit den Eckpunkten $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ seien die Kanten des n-Ecks wie in der Zeichnung durch Strecken $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ verlängert.

Dann gilt für die von v_1, v_2 und von v_2, v_3 und ... und v_n, v_1 gebildeten Winkel:

$$\sphericalangle(v_1, v_2) + \sphericalangle(v_2, v_3) + \ldots + \sphericalangle(v_n, v_1) = 360^\circ$$

Aus der Zeichnung ist die Behauptung ohne mathematische Methoden herleitbar.

Hinweis: Man beachte die Figur.

Die besondere Aufgabe
Die Fläche eines Zwölfecks

von Hartwig Fuchs

Für ein regelmäßiges 12-Eck mit dem Mittelpunkt M und dem halben Durchmesser r gilt:

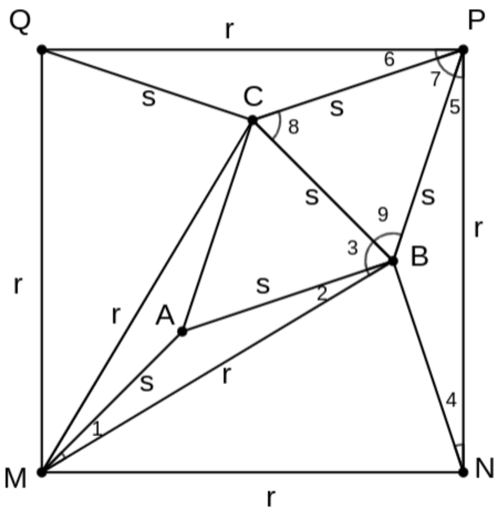
(1) Wenn $r = 1$ ist, dann hat das 12-Eck die Fläche 3.

Diese Behauptung werden wir nun ohne nennenswerten rechnerischen Aufwand und insbesondere ohne den Satz von Pythagoras beweisen.

Es seien MNB, MBC und MCQ drei benachbarte Teildreiecke des 12-Ecks, um die wie in der Figur ein Quadrat der Seitenlänge r konstruiert sei.
Das mittlere Dreieck MBC zerlegen wir in drei Dreiecke, indem wir auf seiner Winkelhalbierenden des Winkels bei M den Punkt A so bestimmen, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Ferner sei das Dreieck PCB in die Figur gezeichnet.

---

* Ein n-Eck heißt konvex, wenn alle seine Innenwinkel zusammen $< 180^\circ$ sind.



Dann gilt:

(2) Die Dreiecke BAM und BNP sind kongruent.

Sie stimmen nämlich in zwei Seiten und den jeweils eingeschlossenen Winkeln $\sphericalangle ABM$ und $\sphericalangle PNB$ überein.
Zunächst ist $|BM| = |NP| = r$ und $|BA| = |NB| = s$.
Wegen $|\sphericalangle BMC| = 360° : 12 = 30°$ ist $|\sphericalangle BMA| = 15°$ und $|\sphericalangle CBM| = \frac{180°-30°}{2} = 75°$. Außerdem gilt $|\sphericalangle ABM| = 75° - |\sphericalangle CBA| = 75° - 60° = 15°$. Aus $|\sphericalangle BNM| = 75°$ ergibt sich $|\sphericalangle PNB| = 90° - 75° = 15°$.

Aus Symmetriegründen gilt auch:

(3) Die Dreiecke CMA und CPQ sind kongruent.

Wir zeigen noch:

(4) Die Dreiecke ABC und BPC sind kongruent.

Zunächst ist das Dreieck BPC symmetrisch zur Diagonalen MP des Quadrates $MNPQ$, so dass $|PB| = |PC|$ ist.
Weiter ist $|\sphericalangle CPB| = 90° - |\sphericalangle BPN| - |\sphericalangle QPC| = 90° - 2 \cdot 15° = 60°$, also auch $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle PBC| = 60°$. Die gleichseitigen Dreiecke BCP und BCA stimmen in der Seite BC überein – mithin gilt Behauptung (4).

Aus den Eigenschaften (2), (3) und (4) folgt: $|MBC| = |BNP| + |BPC| + |CPQ|$.
Weil daher $|MBC| = \frac{1}{4}|MNPQ| = \frac{1}{4}r^2$ ist, folgt: $|MNB \cup MBC \cup MCQ| = \frac{3}{4}r^2$.
Setzt man hier $r = 1$, so erhält man: Die Behauptung (1) trifft zu.

Aus den Archiven der Mathematik
Der Satz von Brun über Sterne in Figuren
von Hartwig Fuchs

Kreisartige Figuren

In der Ebene sei R eine geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidungen und G sei das von R begrenzte Gebiet.

(1) Das geometrische Gebilde $F = R \cup G$ nennen wir eine *kreisartige Figur* mit dem Innengebiet G und dem Rand R.

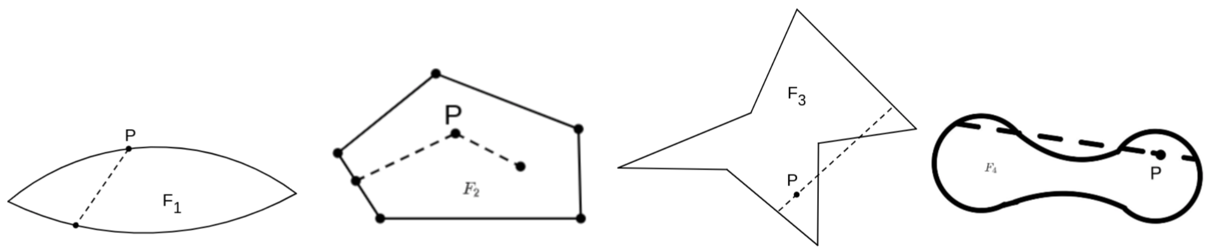
„Kreisartig" deshalb, weil man die Figur F durch eine geeignete Deformation ihres Randes R in einen Kreis transformieren kann; die Figuren in Beispiel 1 sind kreisartig.

Konvexe Figuren

Wir betrachten nun im Folgenden einen speziellen Typ kreisartiger Figuren.

(2) Eine kreisartige Figur F heißt *konvex*, wenn für sie gilt: Jeder Punkt $P \in F$ ist mit jedem anderen Punkt $Q \in F$ mit $Q \neq P$ durch eine Strecke verbindbar, die vollständig in F liegt.
Punkte und Strecken mit ihren Endpunkten werden ebenfalls als konvex betrachtet.

Beispiel 1: Konvexe und nicht konvexe Figuren



konvexe Figuren nicht konvexe Figuren

Sternartige Figuren

Bei einer nicht konvexen, kreisartigen Figur F gibt es stets Punkte P , welche die in Definition (2) beschriebene Verbindungseigenschaft nicht besitzen – vgl. die Punkte in den rechten Figuren F_3 und F_4 in Beispiel 1. Das muss aber nicht für alle Punkte von F zutreffen.

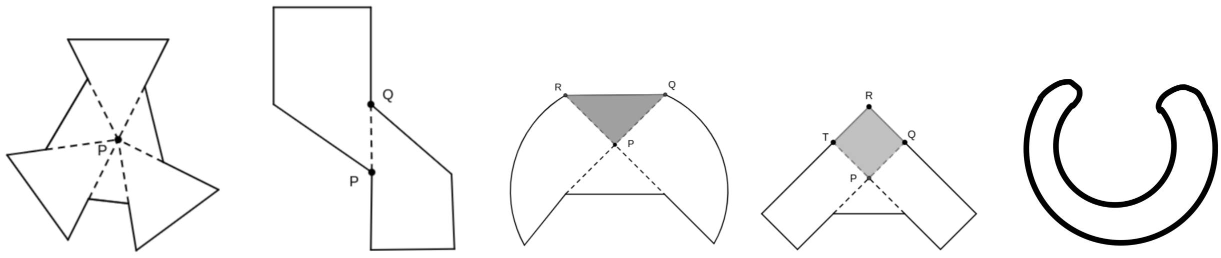
(3) Eine kreisartige Figur F – sei sie konvex oder nicht – heißt *sternartig*, wenn für sie gilt: Es gibt in F mindestens einen Punkt P, der mit allen anderen Punkten $Q \in F$ mit $Q \neq P$ durch eine vollständig in F liegende Strecke verbindbar ist. Die Menge solcher Punkte P nennen wir den *Stern von* F. Die Sterne von Punkten, von Strecken mit ihren Endpunkten seien die Punkte bzw. die Strecken selbst.

Jede konvexe Figur F hat einen Stern S. Dieser ist nach Definition (3) die Figur selbst. Für nicht konvexe kreisartige Figuren F gilt: Es gibt Figuren F mit einem Stern und auch ohne Stern* – siehe dazu das Beispiel 2.

* Dem Verfasser ist kein Kriterium zur Unterscheidung der beiden Fällen bekannt.

Beispiel 2: Sterne von kreisartigen, nicht konvexen Figuren

Mit S sei der Stern einer Figur bezeichnet. Hat eine Figur keinen Stern, so schreiben wir $S = \varnothing$ – sie ist also nicht sternartig.



S =Punkt $\quad$ S =Strecke PQ $\quad$ S = Dreieck PQR $\quad$ S = Viereck $PQRT$ $\quad$ $S = \varnothing$

Die Sterne, welche vier der Figuren in der Abbildung besitzen – einen Punkt, eine Strecke, ein Dreieck, ein Viereck – sind konvex. Der Mathematiker Viggo Brun (1885 – 1978) hat 1912 beweisen können:

(4) *Der Satz von Brun über Sterne*
Der Stern S einer kreisartigen Figur ist konvex.

Für diesen Satz gibt es einen ganz elementaren, durchsichtigen Beweis.
Oben wurde festgestellt, dass für den Stern S einer konvexen Figur F gilt: $S = F$, so dass Satz (4) zutrifft für konvexe Figuren F.
Im Folgenden setzen wir daher voraus, dass F eine sternartige, nicht konvexe Figur ist.
Wenn dann der Stern S der Figur ein Punkt oder eine Strecke ist, so ist S konvex nach Definition (2).** Es sei daher nun S weder ein Punkt noch eine Strecke. Wir zeigen dann: Für jede zwei Punkte P und Q aus S liegt die Strecke PQ vollständig in S.

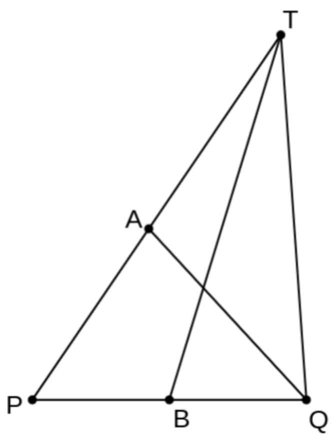


Abb. 2

Die Strecken PQ und PT, wobei T ein beliebiger Punkt von S sei, liegen vollständig in F. Und wegen $Q \in S$ gilt für jeden Punkt $A \in PT$, dass auch jede Strecke QA vollständig in F liegt.
Folglich gilt: Jedes Dreieck PQT liegt vollständig in F. Deshalb liegt insbesondere die Strecke BT für jeden Punkt $B \in PQ$ in F.
Das aber bedeutet: Jeder Punkt $B \in PQ$ ist ein Punkt des Sterns S und daher liegt die Strecke PQ vollständig in S.

Weil dies für jede zwei Punkte P und Q des Sterns S gilt, ist S eine konvexe Figur.

** Dies begründet, warum wir Punkte und Strecken als konvex betrachten.

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

Stephan Reich, Maximilian Graf: Die Berechnung der Blutgrätsche
Von Karl-Heinz Rummenigge ist der Satz überliefert: „Fußball ist keine Mathematik." Im vorliegenden Taschenbuch wird versucht, diese Behauptung zu widerlegen, indem mathematische Aufgaben in einen fußballerischen Kontext gepackt werden. Stephan Reich, Redakteur beim Fußballmagazin „11 Freunde", hat sich mit dem Mathematikstudenten Maximilian Graf zusammengetan und die beiden haben 71 Textaufgaben in einen Zusammenhang mit der schönsten Nebensache der Welt gebracht. Wer von Schulbuch-Textaufgaben im Sinne von „Wenn 5 Hühner und 1 Hahn in 6 Tagen 24 Eier legen, wie viele Eier legen dann $7\frac{2}{5}$ Hühner und 2 Hähne in 4,2 Tagen?" genug hat, der kann sich an den im Buch vorliegenden Aufgaben versuchen. An mathematischen Inhalten sind in der „Berechnung der Blutgrätsche" unter anderem Dreisatz, Prozentrechnung, Geometrie, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten und Logik. Eingekleidet sind die Aufgaben entweder in fußballerische Themen oder festgemacht an bekannten Spielern oder Vereinen. Wer noch nach einem Weihnachtsgeschenk für gleichermaßen Mathe- wie Fußballbegeisterte sucht, der liegt hier richtig. Und auch wer an einer Aufgabe verzweifelt, der sei beruhigt, denn im Anhang gibt es Lösungen zu allen Aufgaben.

Fazit: Tiefgreifende neue mathematische Erkenntnisse findet man bei der „Berechnung der Blutgrätsche" eher weniger. Aber auch wenn offensichtlich ist, dass es sich nur um Einkleidungen – und nicht um wirklich beim Fußball vorkommende Mathematik – handelt, so wird doch die Lektüre (nur) dem fußballinteressierten Leser oder der entsprechenden Leserin ein Lächeln aufs Gesicht grätschen.

Gesamtbeurteilung: gut ☺☺

Angaben zum Buch:

Stephan Reich mit Maximilian Graf: Die Berechnung der Blutgrätsche. Mathe zwischen Dreisatz und Viererkette, rororo, 2018, ISBN 978-3-499-63363-8

Art des Buches:	Aufgabensammlung
Mathematisches Niveau:	je nach Aufgabe von leicht bis verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

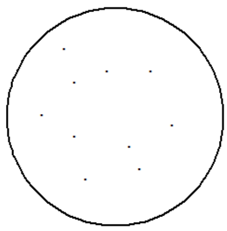
Auch das „Denkerchen“ verneigt sich zum Jahresende vor der für Monoid so bedeutsamen Jahreszahl.
Ein Seeräuber möchte seinen Schatz von 2021 gleichartigen Goldstücken in drei verschieden große Teile aufteilen. Natürlich soll jeder Teil wenigstens eine Münze enthalten. Wie viele Möglichkeiten der Aufteilung gibt es, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt? (Die Aufteilungen $40 + 1936 + 45$, $45 + 1936 + 40$ und so weiter sollen also nur einmal gezählt werden.) Die Richtigkeit der gefundenen Anzahl ist zu begründen.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2022 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 146

In Heft 146 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Das Kunstwerk war fast fertig! Nach und nach hatte der große Maler 99 Punkte irgendwie auf einer kreisförmigen Leinwand vom Durchmesser 2 m verteilt. Heute sollte der 100. Punkt das Gemälde abrunden. Um der Harmonie willen wollte der Meister diesen letzten Punkt so setzen, dass er von jedem der anderen Punkte wenigstens 10 cm Abstand hat.



Kann es einen solchen Punkt stets geben, egal wie die anderen Punkte vorher in der Kreisfläche verteilt wurden? Die Antwort ist zu begründen.

Lösung

Wir denken uns um jeden der 99 bereits gezeichneten Punkte einen Kreis vom Radius 10 cm. Dann bedecken diese 99 Kreise auf der Leinwand eine Fläche von höchstens $99 \cdot \pi \cdot (10\,\text{cm})^2 = 9900 \cdot \pi\,\text{cm}^2$, da einige Kreise sich überlappen oder aus der Leinwand herausragen können. Die Leinwand mit dem Radius 100 cm besitzt aber eine Fläche von $\pi \cdot (100\,\text{cm})^2 = 10000 \cdot \pi\,\text{cm}^2$, so dass sie nicht vollständig von den 99 Kreisen bedeckt werden kann. Auf irgendeine freie Stelle kann der Maler den 100. Punkt setzen, der nach Konstruktion von jedem der 99 Punkte wenigstens 10cm Abstand hat.

Richtige oder fast richtige Bearbeitungen haben eingesandt: Paulina Herber, Josefine Kaßner, Johannes Kehrberger, Alexander Koblbauer, Philipp Lörcks, Oscar Su und Clemens Zabel.

Nachdem er den einhundertsten Punkt gesetzt hatte, beschlich den Meister ein Gefühl der Unzufriedenheit. Die Zahl 100 war zu glatt und wohlgefällig – viel aufregender dagegen die Primzahl 101. Doch konnte unter den gleichen Bedingungen noch ein 101. Punkt auf der Leinwand platziert werden? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Lampen

Im Mathematikum in Gießen gibt es ein Ausstellungsstück, das aus einem großen Holzkreis besteht, auf dem sieben Lampen im Kreis angebracht sind. Vor jeder Lampe ist ein Tastschalter, der den Schaltzustand der zugehörigen Lampe *und ihres linken und rechten Nachbarn* umkehrt: Ist die Lampe eingeschaltet, so geht sie aus; ist sie ausgeschaltet, so geht sie an. Ebenso die beiden Lampen links und rechts. Wird eine Taste zweimal gedrückt, so haben alle Lampen wieder den Zustand wie zuvor.

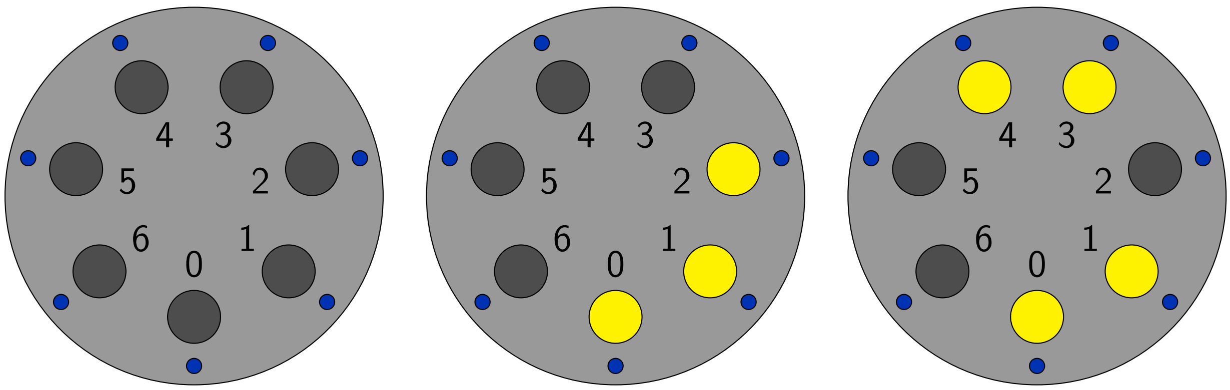


Abbildung 1: Links: Grundstellung, alle Lampen sind aus. Mitte: Der Knopf 1 wurde gedrückt und die Lampen 0, 1 und 2 sind an. Rechts: Die Knöpfe 1 und 3 wurden gedrückt und die Lampen 0, 1, 3 und 4 sind an.

Die Besucher haben nun die Aufgabe, bei einer beliebigen Schaltstellung aller sieben Lampen die Tastschalter zu drücken, bis alle Lampen wieder aus sind.

a) Zeige mit Hilfe eines Computerprogramms, dass dies für jede Schaltstellung geht und gib eine Funktion an, die zu einer Schaltstellung die Knöpfe angibt, die gedrückt werden müssen.

b) Betrachten wir nun eine Abwandlung, bei der wir sechs statt sieben Lampen und Tastschalter haben. Man finde mit Hilfe eines Computerprogramms eine Schaltstellung, von der aus wir *nicht* alle Lampen ausschalten können.

c) Wie viele solcher „unmöglichen“ Schaltstellungen gibt es, wenn wir $n = 3, 4, \dots, 12$ Lampen haben?

Hinweis: Eine Schaltstellung kann durch eine Folge $s = (s_0, s_1, s_3, s_4, s_5, s_6)$ mit $s_i \in \{0, 1\}$ kodiert werden, wobei $s_i = 1$ heißt, dass die Lampe mit der Nummer i an ist und $s_i = 0$, dass sie aus ist. Die Tasten, die gedrückt werden müssen, können ebenso durch $t = (t_0, \dots, t_6)$, $t_i \in \{0, 1\}$ kodiert werden, wobei $t_i = 0$ heißt, dass Taste i nicht gedrückt wurde und $t_i = 1$, dass sie gedrückt wurde. Auf die Reihenfolge, in der die Tasten gedrückt werden, kommt es nicht an. Deshalb hat auch das, sagen wir, fünffache Drücken von Taste i dasselbe Ergebnis, wie das dreifache oder einfache Drücken von Taste i. Es reicht also zu notieren, *ob* Taste i gedrückt wird. Insgesamt suchen wir also für jedes s dasjenige t, sodass alle Lampen aus sind.
Eine Simulation des Spiels: https://scratch.mit.edu/projects/618668754. (AcK)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2022 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.
Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 146

In Heft 146 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Gespiegelte Summen

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Palindrom*, wenn ihre Ziffern (im Dezimalsystem) in umgekehrter Reihenfolge die gleiche Zahl ergeben. Zum Beispiel ist 13531 ein Palindrom, 13513 hingegen nicht.
Wir wollen uns nun folgendes Vorgehen anschauen: Wir beginnen mit einer beliebigen Zahl n_0 und bestimmen die Zahl m_0, die durch Umkehren der Ziffern von n_0 entsteht. Anschließend bestimmen wir die Summe $n_1 = n_0 + m_0$. Ist diese Zahl ein Palindrom, so sind wir fertig, andernfalls wiederholen wir das Ganze mit n_1, bestimmen also m_1 und $n_2 = n_1 + m_1$ und so weiter.

a) Bestimme für alle Zahlen $n_0 = 1, \dots, 20000$, nach wie vielen Iterationen das erste Mal ein Palindrom erreicht wird.
b) Welches ist jeweils die kleinste Zahl $n(k)$, für die nach genau k Iterationen ein Palindrom erreicht wird?

Achtung: Es kann auch Zahlen geben, bei denen *nie* ein Palindrom erreicht wird. Es ist daher sinnvoll, eine maximale Anzahl an Iterationen vorzugeben.

Lösung

Das zentrale Werkzeug für die Aufgabe ist eine Funktion, die zu einer gegebenen natürlichen Zahl $x \in \mathbb{N}$ ihre Inversion y bestimmt, also die Zahl, die durch Umkehren der Ziffernreihenfolge entsteht. Dazu kann man zum Beispiel mit $y = 0$ beginnen und dann jeweils die Einerstelle von x abzuschneiden und rechts an y anzufügen. Die folgende Funktion demonstriert das in Python:

```
# Diese Funktion dreht die Reihenfolge der Ziffern von x
def umkehren(x):
    # y wird die "umgekehrte" Zahl sein
    y = 0
    # Solange x > 0 ist, gibt es noch Ziffern, die noch nicht verarbeitet
    # wurden
    while x > 0:
        # alle Ziffern von y werden um eine Stelle nach links verschoben
        # und die nächste Ziffer von x wird addiert
        y = y * 10 + x % 10
        # die eben verwendete Ziffer wird abgeschnitten, indem alle anderen
        # Ziffern von x um eine Stelle nach rechts verschoben werden
        x = x // 10
    return y
```

Jetzt benötigen wir nur noch den eigentlichen Algorithmus, der die Rechenvorschrift umsetzt. Ausgehend von einer Startzahl $n \in \mathbb{N}$ führen wir maximal k Iterationen (mindestens aber eine) durch. Wir brechen ab und geben das Palindrom und die Anzahl der Iterationen zurück, sobald wir eine Palindromzahl erreicht haben.

```
# Führe maximal k Iterationen des Algorithmus ausgehend von der
# Startzahl n aus.
def finde_palindrom(n, k):
    for i in range(k):
        m = umkehren(n)
        # Falls die Zahl ein Palindrom ist, gib die Zahl und die Anzahl
        # der Iterationen zurück.
        # Die Algorithmus wird aber mindestens einmal durchlaufen.
        if (m == n) and (i > 0):
            return (i, m)
        # Addiere Zahl und ihre umgekehrte Zahl
        n = n + m
    # Nach k Iterationen wurde kein Palindrom gefunden
    return None
```

Für Aufgabe a) können wir jetzt einfach die Anzahl der benötigten Iterationen zurückgeben. Der Einfachheit halber haben wir die Anzahl der Iterationen auf 1000 beschränkt:

```
for n in range(1, 20000):
    r = finde_palindrom(n, 1000)
    if r:
        print("Zahl={} Iterationen={} Palindrom={}".format(n, r[0], r[1]))
    else:
        print("Zahl={} KEIN PALINDROM GEFUNDEN".format(n))
```

Wir sehen, dass es durchaus einige Zahlen gibt, für die 1000 Iterationen nicht ausreichen. Die kleinste ist 196.

Für Aufgabe b) verwenden wir ein Python-Dictionary, um uns für jede Iterationsanzahl *i* die erste Zahl zu merken, die nach genau *i* Iterationen erstmals ein Palindrom erreicht.

```
min_iter = dict()
for n in range(1, 20000):
    r = finde_palindrom(n, 1000)
    if r and r[0] not in min_iter:
        min_iter[r[0]] = r[1]
        print("Zahl={} Iterationen={} Palindrom={}".format(n, r[0], r[1]))
```

Zahlen, die niemals auf ein Palindrom führen, heißen übrigens „Lychrel-Zahlen". Allerdings liefert der obige Algorithmus keinen Beweis dafür, dass eine Zahl, für die kein Palindrom gefunden wurde, tatsächlich eine Lychrel-Zahl ist. Bis heute weiß man nicht, ob 196 tatsächlich eine Lychrel-Zahl ist, oder ob irgendwann doch ein Palindrom erreicht wird (selbst mit schnellen Computern konnte bisher keines gefunden werden).

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 147

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Zahlen schreiben III

Nachdem Kalea und Sophie ihrem Onkel gezeigt haben, wie gut sie schon Zahlen schreiben können (siehe Monoid 145, Mathespielerei II auf Seite 22 und Monoid 146, Aufgabe 1272 auf Seite 26), möchte ihre kleine Schwester Felia ebenfalls ihre Künste unter Beweis stellen. Ähnlich wie Sophie schreibt sie einmal die Zahl 1, zweimal die Zahl 2, dreimal die Zahl 3 und so weiter, allerdings ohne Abstände zwischen den Zahlen zu halten. Es entsteht also die Zahlenkolonne

122333444455555...

Später folgt dann zum Beispiel die Sequenz ...9991010... und so weiter.

a) An welcher Stelle steht erstmals die Zahl 40?

b) Welche Ziffer steht an der 40. Stelle?

c) Wann steht erstmals eine Ziffernfolge aus (mindestens) 40 gleichen Ziffern?

(MG)

Lösung:

a) Felia schreibt insgesamt $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ einstellige Zahlen und benötigt dafür auch 45 Stellen.
Es folgen die zweistelligen Zahlen von 10 bis 39. Daher schreibt sie $10 + 11 + 12 + \ldots + 39 = \frac{39 \cdot 40}{2} - \frac{9 \cdot 10}{2} = 780 - 45 = 735$ Zahlen mit jeweils zwei Ziffern. Dafür benötigt sie 1470 Stellen.
Zusammen mit den einstelligen Zahlen hat sie also 1515 Ziffern geschrieben.

Die erste Zahl 40 folgt dann an den Stellen 1516 und 1517.

b) Wir haben bereits gesehen, dass Felia 45 Stellen für die einziffrigen Zahlen benötigt. Wegen $1+2+3+\ldots+8=36$ ist sie aber nach 36 Stellen mit der Zahl 8 fertig, sodass an der 40. Stelle eine 9 steht.

c) Bei den einstelligen Zahlen kann sie maximal neunmal dieselbe Ziffer nacheinander schreiben.
Um mit zweistelligen Zahlen insgesamt 40-mal dieselbe Ziffer nacheinander schreiben zu können, muss sie $40:2=20$-mal die Zahl schreiben, die dann aus zweimal der selben Ziffer besteht. Dies erreicht sie mit der Zahl 22.
Diese Sequenz steht dann wegen $1+2+3+\ldots+2\cdot(10+\ldots+21)=417$ ab der 418. Stelle und umfasst sogar 45 gleiche Ziffern 2.

Bemerkung: Da Kalea, Sophie und Felia keine weiteren Geschwister haben, ist die Aufgabenreihe „Zahlen schreiben“ mit dieser Aufgabe beendet.

II. Teilbarkeit und Quersumme

Bestimme das kleinste Vielfache von 40 mit der Quersumme 1981. (MG)

Lösung:

Eine Zahl ist genau dann durch 40 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist und die beiden Ziffern davor (als zweistellige Zahl gelesen) durch 4 teilbar sind.

Damit die Zahl möglichst klein ist, sollte sie möglichst wenig Stellen (Ziffern) haben. Wegen $1981=220\cdot 9+1$ hat die gesuchte Zahl mindestens 221 Stellen gefolgt von einer Ziffer 0 an der letzten Stelle.

Die kleinste Kandidatin ist die Zahl

$$1\,\underbrace{999\ldots999}_{220\text{ Ziffern }9}\,0,$$

diese ist aber nicht durch 40 teilbar, da 99 nicht durch 4 teilbar ist.

Wir erhöhen nun schrittweise die erste Ziffer und passen die letzten Ziffern an, sodass die Quersumme erhalten bleibt.

Auch

$$2\,\underbrace{999\ldots99}_{219\text{ Ziffern }9}\,80$$

ist nicht durch 40 teilbar, da 98 nicht durch 4 teilbar ist.

Aber

$$3\,\underbrace{999\ldots9}_{218\text{ Ziffern }9}\,880$$

ist durch 40 teilbar, da 88 ein Vielfaches von 4 ist. Also ist $3\,\underbrace{999\ldots9}_{218\text{ Ziffern }9}\,880$ die gesuchte Zahl.

III. Wie viele?

a) Wie viele fünfstellige Quadratzahlen gibt es?

b) Wie viele fünfstellige Zahlen sind durch 40 teilbar?

c) Wie viele fünfstellige Quadratzahlen sind durch 40 teilbar?

(MG)

Lösung:

a) Es gelten $10000 = 100^2$ und $316^2 = 99856 < 99999 < 100489 = 317^2$. Also sind die Quadratzahlen von 100^2 bis 316^2 fünfstellig und davon gibt es $316 - 99 = 217$.

b) Es sind $10000 = 250 \cdot 40$ und $99960 = 2499 \cdot 40 < 99999 < 100000 = 2500 \cdot 40$. Also gibt es $2499 - 249 = 2250$ durch 40 teilbare fünfstellige Zahlen.

c) Es ist $40 = 2^3 \cdot 5$. Daher genügt es nicht die Quadratzahlen zu zählen, deren Basis ein Vielfaches von 40 ist, sondern es müssen die Vielfachen von $20 = 2^2 \cdot 5$ berücksichtigt werden (denn $20^2 = 2^4 \cdot 5^2 = 400$ ist ja auch durch 40 teilbar). Wegen $10000 = 100^2 = (5 \cdot 20)^2$ und $(15 \cdot 20)^2 = 300^2 < 316^2 < 320^2 = (16 \cdot 20)^2$ gibt es $15 - 4 = 11$ solcher Zahlen.

IV. ... dass man Nullen nicht übersehen darf

Die Fakultät einer natürlichen Zahl ist das Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner und gleich dieser Zahl. Notiert wird sie, indem ein ! hinter die Zahl geschrieben wird. Matea berechnet einige Fakultäten: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, ... Sie stellt fest, dass die ersten Fakultäten auf verschiedene Ziffern enden, aber ab 5! die letzte Ziffer eine 0 ist und es dann immer mehr Ziffern 0 am Ende der Zahl werden.

a) Bestimme, auf wie viele Ziffern 0 die Zahl 2021! endet.

b) Für welche Zahl m endet die Fakultät $m!$ erstmals auf 40 Ziffern 0?

(MG)

Lösung:

Eine Ziffer 0 am Ende der Fakultät $n!$ kommt genau dann hinzu, wenn in den Primfaktorzerlegungen der natürlichen Zahlen, die im Produkt multipliziert werden, und somit in der Primfaktorzerlegung von $n!$ die beiden Primfaktoren 2 und 5 (ggf. nacheinander) hinzukommen. Die erste 0 ergibt sich beispielsweise bei 5! aufgrund der Primzahlen 2 und 5, die zweite Ziffer 0 dann bei 10! durch einen der Primfaktoren 2 der Zahl $4 = 2^2$ (oder der Zahl 10) und dem Primfaktor 5 der Zahl 10 und so weiter.

Da viel häufiger Primfaktoren 2 hinzukommen (bei jeder zweiten Zahl mindestens einer), genügt es zu untersuchen, wann die Primfaktoren 5 hinzukommen und so eine Ziffer 0 am Ende erzeugen.

a) Von jedem Vielfachen von 5 ergibt sich ein Primfaktor 5 für 2021!. Davon gibt es 404 im Produkt $n!$.
Von den Vielfachen der Zahl 25 kommt wegen $25 = 5 \cdot 5$ jeweils ein weiterer Primfaktor 5 zusätzlich hinzu, das sind noch einmal 80 Primfaktoren 5.
Genauso ergeben sich zusätzliche Primfaktoren 5 durch die Vielfachen von $125 = 5^3 = 5^2 \cdot 5$, nämlich 16 weitere.
Wegen $625 = 5^4 = 5^3 \cdot 5$ kommen noch einmal drei weitere Primfaktoren 5 hinzu.
Insgesamt sind es also $404 + 80 + 16 + 3 = 503$ Primfaktoren 5 und daher endet die Zahl 2021! auf insgesamt 503 Ziffern 0.

b) Nun müssen wir umgekehrt überlegen. Bei jeder fünften Zahl, erhöht sich die Anzahl der Endziffern 0 um eins. Wegen $40 \cdot 5 = 200$ endet spätestens 200! auf 40 Ziffern 0.

Allerdings kommt bei jedem Vielfachen von 25 jeweils ein Primfaktor 5 hinzu, sodass pro 25 Faktoren in $m!$ tatsächlich jeweils sogar sechs Primfaktoren 5 in $m!$ multipliziert werden und wegen $6 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 40$ ergeben sich die 40 Endziffern 0 spätestens bei der Fakultät von $25 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 170$.
Nun ist diese Zahl aber größer als 125, für die wegen $125 = 5^3$ ein weiterer Primfaktor 5 multipliziert wird. Also wird die 40. Endziffer 0 erstmals schon bei einem Vielfachen von 5 früher erreicht, also bei 165!.

Alterative: Wir überlegen uns, dass bei 125! insgesamt 31 Primfaktoren 5 multipliziert werden, nämlich 25 für die Vielfache von 5, fünf weitere für die Vielfache von $25 = 5^2$ und ein weiterer für $125 = 5^3$. Für jedes weitere Vielfache von 25 kommen entsprechend jeweils sechs Primfaktoren 5 hinzu, und darüber hinaus für jedes weitere Vielfache von 5 noch einmal jeweils ein Primfaktor 5.
Nun ist $40 = 1 \cdot 31 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 1$. Daher ist die gesuchte Zahl $m = 1 \cdot 125 + 1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 = 165$, das heißt 165! endet erstmals mit 40 Ziffern 0.

V. Zufall oder Regel?

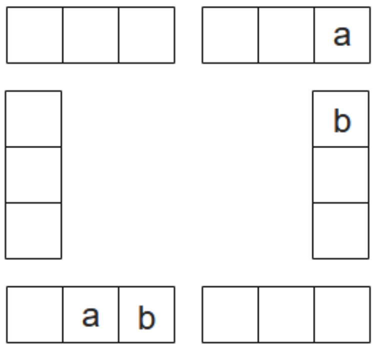
Trifft es zu, dass $\left(2021 + \frac{1}{2021}\right)^2 - \left(2021 - \frac{1}{2021}\right)^2 = 4$ ist?
Gilt Entsprechendes auch für andere Zahlen an Stelle von 2021? (H.F.)

Lösung:

Es gilt für jede natürliche Zahl $n > 1$ (sogar für jede reelle Zahl $x \neq 0$):

$$\left(n + \tfrac{1}{n}\right)^2 - \left(n - \tfrac{1}{n}\right)^2 = n^2 + 2 + \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 - \left(n^2 - 2 + \left(\tfrac{1}{n}\right)^2\right) = 4.$$

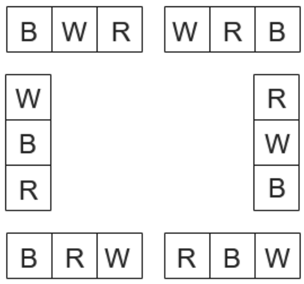
VI. Farbige Domino-Steine



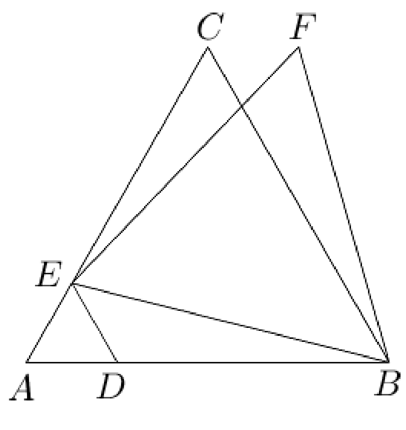
Sechs kongruente Rechtecke, bestehend aus jeweils drei Quadraten, seien so wie in der nebenstehenden Figur angeordnet. Die drei Quadrate eines jeden Rechtecks sollen nun so mit den Farben blau (b), rot (r) und weiß (w) gefärbt werden, dass keine zwei benachbarte Quadrate – das sind Quadrate wie beispielsweise die in der Figur mit a und b bezeichneten – von gleicher Farbe sind.

Zeige durch ein Beispiel, dass eine solche Kolorierung möglich ist. (H.F.)

Lösung:



VII. Parallelogramm oder nicht?



Auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ eines gleichseitigen Dreiecks ABC werden die Punkte D und E so gewählt, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ gleich lang sind. Über $\overline{EB}$ wird ein gleichseitiges Dreieck EBF gemäß Abbildung erzeugt.

Entscheide, ob das Viereck $ADFC$ ein Parallelogramm ist oder nicht, und begründe deine Entscheidung.

Lösung:

Das Viereck $ADFC$ ist ein Parallelogramm.

Um dies zu zeigen, genügt es nachzuweisen, dass $|\overline{CF}| = |\overline{AD}|$ und $\overline{CF}$ parallel zu $\overline{AD}$ ist.

Das Dreieck EDB ist kongruent zu Dreieck EFC nach SWS, denn

- sie haben nach Definition gleichlange Seiten $|\overline{EB}| = |\overline{EF}|$
- sie haben die gleichlangen Seiten $|\overline{BD}| = |\overline{BA}| - |\overline{AD}| = |\overline{CA}| - |\overline{AE}| = |\overline{CE}|$

- sie haben gleich große Winkel $\sphericalangle FEC = \sphericalangle EBD$, weil in gleichseitigen Dreiecken alle Winkel 60° betragen und daher (gestreckter Winkel $\sphericalangle AEC$) $180^\circ = \sphericalangle AEC = \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF + \sphericalangle FEC = \sphericalangle AEB + 60^\circ + \sphericalangle FEC$ und (Winkelsumme im Dreieck ABE) $180^\circ = \sphericalangle BAE + \sphericalangle AEB + \sphericalangle EBD = \sphericalangle EAD + \sphericalangle AEB + \sphericalangle EBD = 60^\circ + \sphericalangle AEB + \sphericalangle EBD$ gelten; folglich ist $\sphericalangle FEC = \sphericalangle EBD$.

Daraus folgt $|\overline{CF}| = |\overline{ED}| = |\overline{AD}|$, da auch AED gleichseitig ist.
Nachweis der Parallelität: Wegen der Kongruenz der Dreiecke EDB und EFC folgt $\sphericalangle ECF = \sphericalangle BDE = 180^\circ - \sphericalangle EDA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Da $\sphericalangle DAE = 60^\circ$ ist $\sphericalangle ECF$ gleich groß wie der Gegenwinkel zum Nebenwinkel von $\sphericalangle DAE$ und damit $\overline{FC}$ parallel $\overline{DA}$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Letzte Ziffern von Dezimalbrüchen

Die Zahlen $\frac{1}{5^n}$, wobei n eine natürliche Zahl ist, lassen sich jeweils mit endlichen Dezimalbrüchen darstellen, das heißt die Darstellung bricht irgendwann ab und es folgen ab einer bestimmten Stelle nach dem Komma nur noch Ziffern 0, die aber nicht mehr notiert werden. Die Ziffer an der Stelle, bevor nur noch Ziffern 0 folgen, ist die *letzte Ziffer*.
Bestimme die letzte der Ziffer...

a) der Zahl $\frac{1}{5^{1981}}$.

b) der Zahl $\frac{1}{5^{2021}}$.

c) der Zahl $\frac{1}{5^{1981}} + \frac{1}{5^{2021}}$.

(MG)

II. Natürliche Zahl gesucht

Wie heißt die kleinste natürliche Zahl, für die gilt: $x > 1300$ und x ist ein Vielfaches von 5 und x hat die Quersumme 4? (H.F.)

III. Bauer Wilhelms Waage

In Bauer Wilhelms Hofladen fällt der elektrische Strom aus. Er holt deshalb statt der sonst benutzten elektrischen Waage eine alte Balkenwaage.

Er weiß, dass auf der rechten Waagschale 10 % mehr Gewicht liegen muss als auf der linken, wenn die Waage im Gleichgewicht sein soll.

Er hilft sich jetzt auf falsche Weise: wenn ein Kunde 2 kg Äpfel kaufen will, so legt er zunächst ein 1 kg-Gewicht auf die linke Waagschale und Äpfel auf die rechte. Dann wiederholt er dies mit dem Gewicht rechts und den Äpfeln links.

Ist dieses Verfahren wirklich gerecht?

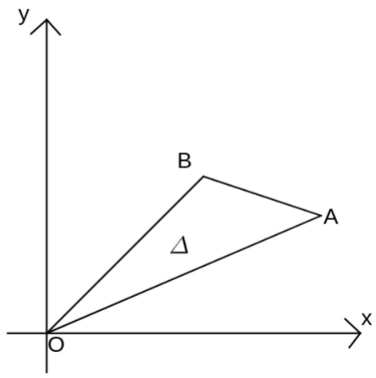
(WJB)

IV. Fragen zu Quadratzahlen

a) Zeige: $5n + 3$ ist für kein n eine Quadratzahl.

b) Gibt es Quadratzahlen, die bei Division durch 15 den Rest 2 haben? (WJB)

V. Dreiecksflächen



In einem Koordinatensystem seien die Punkte $O = (0|0)$, $A = (2022|2021)$ und $B = (2020|2023)$ gegeben. Betrachte nun das Dreieck $\triangle := OAB$.
Gilt für den Flächeninhalt $|\triangle|$ des Dreiecks dann $|\triangle| - 2021 < 2022$ oder $|\triangle| - 2021 > 2022$ oder $|\triangle| - 2021 = 2022$? (H.F.)

VI. Nicht nur zum Jahreswechsel 2021/22

Es gilt

$$(2021 + 2021) + (2021 - 2021) + (2021 \cdot 2021) + (2021 : 2021) = 2022^2.$$

Diese Gleichung gilt aber nicht zufällig, sondern auch für andere Jahreswechsel. Begründe dies und gib an, für welche weiteren Jahreswechsel entsprechende Gleichungen gelten. (MG)

Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Dann schicke gerne neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, an uns. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen.

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1268: Teilbarkeit zum 40-jährigen Jubiläum

a) Bestimme den größten ganzzahligen Exponenten m so, dass 1981^m ein Teiler von 2021! ist.

b) Bestimme den größten ganzzahligen Exponenten n so, dass 2021^n ein Teiler von 1981! ist.

(MG)

Aufgabe 1269: Eine Ungleichung für rechtwinklige Dreiecke

Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann gilt:

$$|CM| < \frac{1}{2}|AC| + \frac{1}{2}|BC|$$

Zeige dies. (H.F.)

Aufgabe 1270: Welche Zahl?

Welche zweistellige Zahl ist gleich der Summe aus ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Einerstelle? (WJB)

Aufgabe 1271: Ein Zwei-Farben-Problem

Jeder Punkt der Ebene sei entweder rot oder blau gefärbt, aber nicht alle Punkte seien gleich gefärbt.

Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl a zwei gleichfarbige Punkte vom Abstand a.

Trifft das zu? (H.F.)

Aufgabe 1272: Lösungen eines Gleichungssystems

Gib für alle Paare (a, b) von reellen Zahlen jeweils alle Lösungen für x und y des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - y &= a \\ x^2 - y^2 &= b \end{aligned}$$

an. (gefunden WJB)

Aufgabe 1273: Fünf Lose

Zur Kundenbindung hat sich die Supermarktkette MERCATOR eine Aktion überlegt: Jeder Kunde erhält bei jedem Kauf ein Glückslos. Die Supermarktkette wirbt damit, dass jedes fünfte Los gewinnt.

Herr Emptor, der gerade im Supermarkt einkauft, überlegt: „Wenn ich fünfmal einkaufen gehe und dann fünf Lose habe, dann müsste ich doch sicher gewinnen."

a) Begründe mit einer Rechnung, dass Herr Emptor sich irrt.
b) Wie viele Lose benötigt Herr Emptor, damit er mit mindestens 90 %-iger Wahrscheinlichkeit gewinnt.

(MG)

Aufgabe 1274: Zum Abschluss des Jahres

Zeige: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$2^n + 0^n + 2^n + 1^n \leq 3^n.$$

Für welche natürlichen Zahlen n gilt dabei das Gleichheitszeichen? (HF)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 147

Klassen 9–13

Aufgabe 1275: Summenspiel mit $\sqrt{1981}$ bis $\sqrt{2021}$

Berechne ohne Taschenrechner

$$\frac{1}{\sqrt{1982}+\sqrt{1981}}+\frac{1}{\sqrt{1983}+\sqrt{1982}}+\frac{1}{\sqrt{1984}+\sqrt{1983}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}.$$

(MG)

Lösung:

Wir erweitern die Brüche $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ mit $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, um dann anschließend im Nenner die dritte binomische Formel anwenden und schließlich die Summe vereinfachen zu können:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\sqrt{1982}+\sqrt{1981}}+\tfrac{1}{\sqrt{1983}+\sqrt{1982}}+\tfrac{1}{\sqrt{1984}+\sqrt{1983}}+\ldots+\tfrac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}\\
=&\tfrac{\sqrt{1982}-\sqrt{1981}}{\left(\sqrt{1982}+\sqrt{1981}\right)\left(\sqrt{1982}-\sqrt{1981}\right)}+\tfrac{\sqrt{1983}-\sqrt{1982}}{\left(\sqrt{1983}+\sqrt{1982}\right)\left(\sqrt{1983}-\sqrt{1982}\right)}\\
&\qquad+\tfrac{\sqrt{1984}-\sqrt{1983}}{\left(\sqrt{1984}+\sqrt{1983}\right)\left(\sqrt{1984}-\sqrt{1983}\right)}+\ldots+\tfrac{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}}{\left(\sqrt{2021}+\sqrt{2020}\right)\left(\sqrt{2021}-\sqrt{2020}\right)}\\
=&\tfrac{\sqrt{1982}-\sqrt{1981}}{\sqrt{1982}^2-\sqrt{1981}^2}+\tfrac{\sqrt{1983}-\sqrt{1982}}{\sqrt{1983}^2-\sqrt{1982}^2}+\tfrac{\sqrt{1984}-\sqrt{1983}}{\sqrt{1984}^2-\sqrt{1983}^2}+\ldots+\tfrac{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}}{\sqrt{2021}^2-\sqrt{2020}^2}\\
=&\tfrac{\sqrt{1982}-\sqrt{1981}}{1982-1981}+\tfrac{\sqrt{1983}-\sqrt{1982}}{1983-1982}+\tfrac{\sqrt{1984}-\sqrt{1983}}{1984-1983}+\ldots+\tfrac{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}}{2021-2020}\\
=&\sqrt{1982}-\sqrt{1981}+\sqrt{1983}-\sqrt{1982}+\sqrt{1984}-\sqrt{1983}+\ldots\\
&\qquad+\sqrt{2021}-\sqrt{2020}\\
=&-\sqrt{1981}+\sqrt{1982}-\sqrt{1982}+\sqrt{1983}-\ldots-\sqrt{2020}+\sqrt{2021}\\
=&\sqrt{2021}-\sqrt{1981}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1276: Gewinnchancen

In Hausdorf veranstaltet die dortige Mathematiker-Vereinigung jährlich einen großen Mathematik-Markt, bei dem es verschiedene Stände mit mathematischen Experimenten, Vorträge und weitere Präsentationen gibt. Auch eine Tombola wird angeboten. Dazu werden Lose mit den Nummern von 1 bis 1 000 000 verkauft. Gib die Gewinnwahrscheinlichkeiten an, wenn

a) genau die Quadratzahlen gewinnen.

b) genau die Kubikzahlen gewinnen.

c) genau die Zahlen, die sowohl eine Quadrat- und zugleich eine Kubikzahl sind, gewinnen.

d) genau die Zahlen, die eine Quadrat- oder Kubikzahl sind, gewinnen.

(MG)

Lösung:

a) Es ist $1\,000\,000 = 1\,000^2$. Also gibt es 1 000 Quadratzahlen und die Wahrscheinlichkeit beträgt $P(\text{„Quadratzahl“}) = \frac{1\,000}{1\,000\,000} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}1\,\%$.

b) Es ist $1\,000\,000 = 100^3$. Also gibt es 100 Kubikzahlen und die Wahrscheinlichkeit beträgt $P(\text{„Kubikzahl“}) = \frac{100}{1\,000\,000} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}01\,\%$.

c) Zahlen, die sowohl eine Quadrat- als auch Kubikzahl sind, sind die Zahlen, die sich als 6. Potenz schreiben lassen.

   Davon gibt es wegen $1\,000\,000 = 10^6$ genau zehn auf den Losen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$P(\text{„Quadrat- und Kubikzahl“}) = \frac{10}{1\,000\,000} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}001\,\%.$$

d) Die Gewinnwahrscheinlichkeit können wir aus den Wahrscheinlichkeiten der Quadrat- und Kubikzahlen bestimmen. Addieren wir diese, haben wir aber einige Zahlen doppelt berücksichtigt, nämlich diejenigen, die beides sind. Diese müssen wir also einmal wieder abziehen. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit kennen wir aus Teil c:

$$\begin{aligned} &P(\text{„Quadrat- oder Kubikzahl“})\\ =&P(\text{„Quadratzahl“}) + P(\text{„Kubikzahl“}) - P(\text{„Quadrat- und Kubikzahl“})\\ =&\frac{1\,000}{1\,000\,000} + \frac{100}{1\,000\,000} - \frac{10}{1\,000\,000}\\ =&\frac{1\,090}{1\,000\,000} = \frac{109}{100\,000} = 0{,}109\,\%. \end{aligned}$$

Aufgabe 1277: Eine Ungleichung – zwei Lösungswege

Zeige, dass für alle $x > 0$ gilt: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
Gib möglichst zwei verschiedene Lösungswege an. (WJB)

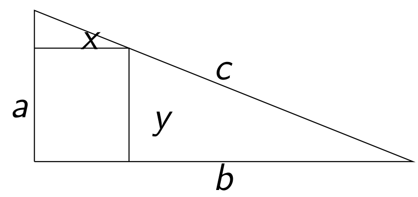
Lösung:

a) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ist gleichwertig mit $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$
$\frac{x^2+1}{x} \geq 2 \iff x^2 + 1 \geq 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0$ und $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

b) Für $f : x \to \frac{(x^2+1)}{x}$ gilt $f(1) = 2$.
$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, also $f'(x) = 0$ genau wenn $x = \pm 1$.
Als einzige Nullstelle der Ableitung ist 1 ein Tiefpunkt, da $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} > 2$ und $f(3) = \frac{10}{3} > 2$.

Aufgabe 1278: Ein spezielles Rechteck

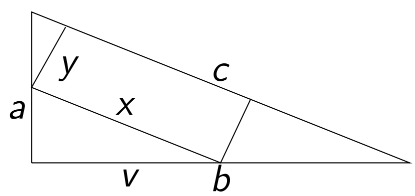
Einem rechtwinkligen Dreieck mit Seiten $a < b < c$ werde ein Rechteck so einbeschrieben, dass zwei Seiten auf den Katheten liegen.



a) Welche Werte kann der Umfang U des Rechtecks haben?

b) Bei gegebenem Umfang U berechne die Seitenlängen x und y.

c) Beantworte die entsprechenden Fragen für ein einbeschriebenes Rechteck, bei dem eine Seite auf der Hypotenuse liegt. (WJB)



Lösung:

a) Offensichtlich muss $U > 2a$ und $U < 2b$ gelten. Dies folgt auch aus der Lösung zu b).

b) $U = 2(x+y)$ und $y = a - \frac{a}{b}x$ ergibt $U = 2x(1-\frac{a}{b}) + 2a = \frac{2x(b-a)}{b} + 2a$, also $x = b\frac{(U-2a)}{2(b-a)}$ und $y = a - \frac{a(U-2a)}{2(b-a)} = \frac{a(2b-U)}{2(b-a)}$.

c) Betrachtung ähnlicher Dreiecke ergibt $\frac{x}{v} = \frac{c}{b}$ und $\frac{y}{(b-v)} = \frac{a}{c}$, also $x = \frac{cv}{b}$ und $y = \frac{a(b-v)}{c}$. Damit ist $U = 2(x+y) = 2v(\frac{c}{b} - \frac{a}{c}) + 2\frac{ab}{c}$.
U ist wachsend in v, das heißt $U > \frac{ab}{c}$ wegen $v > 0$ und $U < 2b(\frac{c}{b} - \frac{a}{c}) + 2\frac{ab}{c} = 2c$ wegen $v < b$.
Ist U gegeben, so ist

$$v = \frac{\left(\frac{U}{2} - \frac{ab}{c}\right)}{\left(\frac{c}{b} - \frac{a}{c}\right)} = \frac{\left(\frac{Uc-2ab}{2c}\right)}{\left(\frac{(c^2-ab)}{bc}\right)} = \frac{(Uc-2ab)b}{2(c^2-ab)}$$

Die Seitenlängen sind dann:

$$x = \frac{c}{b}v = \frac{c(Uc-2ab)}{2(c^2-ab)} \text{ und } y \quad = \frac{ab}{c} - \frac{av}{c} = \frac{ab}{c} - \frac{ab(Uc-2ab)}{2c(c^2-ab)}.$$

Aufgabe 1279: Wie viele Primzahlen?

Wie viele Primzahlen der Form $Z(n) = n^4 + 4^n$ gibt es?

Lösung:

Die Zahl $Z(1) = 1^4 + 4^1 = 5$ ist die einzige Primzahl dieser Form, denn für gerades n ist $z(n) > 2$ und gerade. Für ungerades $n > 1$ gilt

$$\begin{aligned} Z(n) &= n^4 + 4^n = (n^2)^2 + (2^n)^2 = (n^2)^2 + 2 \cdot n^2 \cdot 2^n + (2^n)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot 2^n \\ &= (n^2 + 2^n)^2 - (n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}})^2 = (n^2 + 2^n + n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}})(n^2 + 2^n - n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}). \end{aligned}$$

Die Zahl $2^{\frac{n+1}{2}}$ ist für ungerades n eine ganze Zahl. Die beiden Faktoren sind also ganzzahlig. Der erste ist offensichtlich positiv, also auch der zweite, da $Z(n) > 0$. Außerdem ist der erste Faktor größer als der zweite Faktor. Den zweiten Faktor formen wir um, um zu sehen, dass er nicht gleich 1 ist:

$$\begin{aligned} & n^2 + 2^n - n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \\ =& (n - 2^{\frac{n-1}{2}})^2 - 2^{n-1} + 2^n \\ =& (n - 2^{\frac{n-1}{2}})^2 + 2^{n-1} \cdot (2-1) \\ >& 0 + 2, \end{aligned}$$

falls $n > 1$ und ungerade.
Also ist für ungerade $n > 1$ die Zahl $Z(n)$ eine zusammengesetzte Zahl.

Aufgabe 1280: Lösungen gesucht

Untersuche, ob es drei natürliche Zahlen x, y und z gibt, welche die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 8z + 6$$

erfüllen. (H.F.)

Lösung:

1. Wenn x und y beide gerade sind, zum Beispiel $x = 2n$ und $y = 2m$ sind, dann gilt $x^2 + y^2 = (2n)^2 + (2m)^2 = 4 \cdot (n^2 + m^2)$. Also ist die linke Seite der gegebenen Gleichung ein Vielfaches von 4, aber die rechte Seite ist es nicht. Folglich hat die Gleichung in diesem Fall keine Lösung.

2. Wenn eine der Zahlen x und y gerade, die andere aber ungerade ist, zum Beispiel sei x ungerade und $x = 2n + 1$, dann gilt $x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, und daher ist $x^2 + y^2$ ungerade, während die rechte Seite der gegebenen Gleichung gerade ist. Somit gibt es auch in diesem Falle keine Lösung.

3. Es seien nun x und y beide ungerade, also $x = 2n + 1$ und $y = 2m + 1$. Dann ist $x^2 + y^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 4m^2 + 4m + 2$. Damit die Gleichung lösbar ist, muss also $x^2 + y^2 = 4(n^2 + n + m^2 + m) + 2 = 8z + 6$ oder $n^2 + n + m^2 + m = 2z + 1$. Nun ist $n^2 + n$ stets gerade und ebenso ist $m^2 + m$ stets gerade, sodass die linke Seite der letzten Gleichung gerade ist, während die rechte Seite ungerade ist. Also hat auch in diesem Falle die Gleichung der Aufgabe keine Lösung.

Insgesamt gilt: Die gegebene Gleichung $x^2 + y^2 = 8z + 6$ hat keine ganzzahlige Lösung x, y, z.

Aufgabe 1281: Eine Eigenschaft rechtwinkliger Dreiecke

Für jedes rechtwinklige Dreieck mit den ganzzahligen Kathetenlängen a, b und der ganzzahligen Hypotenusenlänge c gilt: Mindestens eine der Seitenlängen ist ein Vielfaches von 5.
Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Es seien $a = 5m + r$ und $b = 5n + s$ mit $r, s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und m, n natürliche Zahlen. Dann ist $a^2 = 25m^2 + 10mr + r^2$, wobei für $r = 0$, 1, 2, 3, 4 in dieser Reihenfolge gilt: $r^2 = 0, 1, 4, 5 + 4, 15 + 1$.
Deshalb hat a^2 bei Division mit 5 einen Rest $\overline{r}$ mit $\overline{r} \in \{0, 1, 4\}$.
Somit hat a^2 die Darstellung $a^2 = 5\overline{m} + \overline{r}$ mit einer natürlichen Zahl $\overline{m}$. Ganz ebenso kann man schreiben $b^2 = 5\overline{n} + \overline{s}$ mit einer natürlichen Zahl $\overline{n}$ und $\overline{s} \in \{0, 1, 4\}$.
Fall 1: Es sei $\overline{r} = 0$ oder $\overline{s} = 0$. Dann ist a oder b ein Vielfaches von 5.

Fall 2: Es sei $\overline{r} = 1$. Dann ist $\overline{s} = 4$.
Wäre nämlich $\overline{r} = 1$ und $\overline{s} = 1$, dann hätte $a^2 + b^2$ den Rest 2 bei Division mit 5 und wegen $a^2 + b^2 = c^2$ träfe das auch zu für c^2. Aber c^2 kann nur einen Divisionsrest 0, 1 oder 4 haben – ein Widerspruch.
Also ist $\overline{r} = 1$ und $\overline{s} = 4$ und deshalb ist a^2+b^2 und damit auch c^2 ein Vielfaches von 5.

Fall 3: Es sei $\overline{r} = 4$. Dann ist $\overline{s} = 1$ und folglich sind $a^2 + b^2$ sowie c^2 Vielfache von 5.

Aus den drei Fällen folgt insgesamt: Mindestens eine der quadrierten Seitenlängen a^2, b^2 oder c^2 ist ein Vielfaches von 5. Dann muss aber auch mindestens eine der Seitenlängen a, b oder c ein Vielfaches von 5 sein.

Ein Wunsch (nicht nur) in Corona-Zeit

$$\boldsymbol{f(x) = |x|}$$

Bleibt positiv!

Liebe L(o)eserinnen und L(o)eser,

bitte bleibt positiv (also eingestellt, nicht beim Virus-Test!) und natürlich gesund!

Eure MONOID-Redaktion

Zu Besuch bei ...
David Hilbert
von Martin Mattheis

Wie schon in Heft 145 führt uns unser Weg wieder nach Göttingen und wir sind zu Besuch bei David Hilbert, im letzten Jahrhundert Professor für Mathematik an der Universität in Göttingen.

Sehr geehrter Herr Professor Hilbert, wo lebten und wirkten Sie?
Ich wurde am 23. Januar 1862 in Königsberg in Ostpreußen jeboren, was man an meinem Dialekt immer noch ein bisschen hört.* Dort habe ich dann auch Mathematik studiert, 1885 promoviert und mich 1886 habilitiert, so dass ich 1892/93 eine Professur übernehmen und an der Universität lehren konnte. Im Jahr 1895 wechselte ich als Professor an die Universität in Göttingen, wo ich dann mit meiner Frau Käthe bis zu meinem Tode am 14. Februar 1943 lebte und wirkte. Entscheidend war ich dort daran beteiligt, dass Göttingen zu einem weltweit anerkannten Forschungszentrum für Mathematik wurde, was jedoch leider nur bis 1933 andauerte.

* Wer die Stimme von David Hilbert im Original hören will, der sei auf die Aufnahme einer Radioansprache vom 1930 verwiesen, die im Internet verfügbar ist: https://www.ardaudiothek.de/episode/archivradio-geschichte-in-originaltoenen/wir-muessen-wissen-wir-werden-wissen-david-hilberts-radioansprache-1930/swr2/66772996/

Sie haben durch Ihr Wirken die Mathematik weltweit und bis heute geprägt. Waren Sie auch in der Schule – was die Mathematik angeht – schon besonders engagiert?
„Ich habe mich auf der Schule nicht besonders mit Mathematik beschäftigt, denn ich wusste ja, dass ich das später tun würde."

Welches gedruckte Werk von Ihnen hatte den größten Einfluss auf die Mathematik?
Das 1899 erschienene Buch „Grundlagen der Geometrie", in dem ich die bekannte euklidische Geometrie des dreidimensionalen Raums auf ein vollständiges Axiomensystem aufbauend, streng axiomatisch begründen konnte. Bei dieser Grundlegung sind die betrachteten Objekte vollkommen egal, solange sie nur den Axiomen genügen. „Man muss jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen' ‚Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können."

Eng verbunden mit Ihrem Namen sind auch die nach Ihnen benannten „Hilbertschen Probleme". Worum handelt es sich dabei?
Beim zweiten Internationalen Mathematikerkongress in Paris hielt ich am 8. August 1900 eine vielbeachtete Rede über 23 ungelöste Probleme der damaligen Mathematik, von deren Lösung ich mir wertvolle Impulse für das Voranschreiten der Mathematik als Ganzes versprochen hatte. Von den von mir genannten Problemen sind auch 2021 immer noch drei ungelöst und sieben nur zum Teil gelöst. Nichtsdestoweniger hat – wie ich es vorhergesagt hatte – die Suche nach der Lösung der 23 Probleme die Mathematik des 20. Jahrhunderts enorm vorangebracht.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch über sich berichten?
Was ich nie verstanden habe, ist, warum in Bezug auf das Betreiben oder das Lehren von Mathematik das Geschlecht irgendeine Rolle spielen soll. Für die Lösung eines mathematischen Problems oder für den Beweis eines mathematischen Satzes hat es keinerlei Bedeutung, ob dies durch einen Mann oder eine Frau geschieht.
Im Jahr 1915 stellte die brillante Mathematikerin Emmy Noether an der Universität Göttingen den Antrag sich in Mathematik zu habilitieren. Ihre Forschungsergebnisse waren ausgezeichnet und nach der 1907 erfolgten Promotion in Mathematik war die Zulassung als Privatdozent der nächste Schritt auf dem Weg, um Mathematik an einer Universität lehren zu dürfen.

In der Zeit vor dem ersten Weltkriege war es in Schwimmbädern üblich, dass es getrennte Badetage für Männer und Frauen gab. Bei den Beratungen zu Emmy Noether schaffte ich es, die Fakultät in Göttingen mit folgendem berühmt gewordenen Satz zu überzeugen: „Meine Herren, ich sehe nicht ein, warum das Geschlecht der Kandidatin ein Argument gegen ihre Zulassung als Privatdozent sein sollte. [Die Fakultät] ist schließlich keine Badeanstalt!" Leider hatte das Kultusministerium dann doch abgelehnt, so dass es bis 1919 dauerte, bis sich Emmy Noether habilitieren konnte.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?
In jedem Lexikon oder auch jedem Buch zur Geschichte der Mathematik der Neuzeit findet man einen Eintrag über mich. Außerdem hat mein erster Doktorand, Otto Blumenthal, der mich leider nur ein Jahr überlebt hat, für den 1935 erschienenen dritten Band meiner Gesammelten Abhandlungen auf 42 Seiten meine „Lebensgeschichte" verfasst.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch mit auf den Weg geben?
„Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus."**

Lieber Herr Professor Hilbert, wir danken Ihnen für dieses interessante Gespräch, in dem wir außer über die Mathematik auch noch etwas über Badeanstalten gelernt haben!

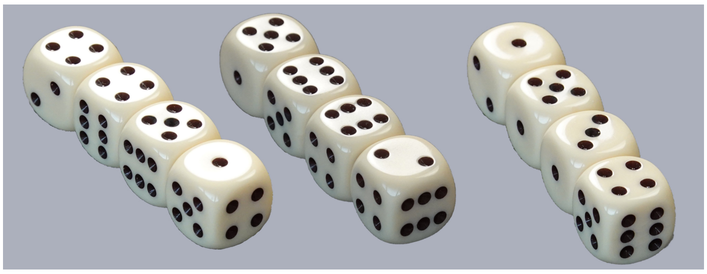
** Anmerkung der Redaktion: Ignoramus et ignorabimus (lat. „Wir wissen es nicht und wir werden es niemals wissen") ist eine am Ende des 19. Jahrhunderts oft geäußerte Skepsis an den Ansprüchen der Naturwissenschaften alles erklären zu können.

Würfelreihen

von Achim Klenke

Wir nehmen $n = 2, 3, 4, \ldots$ sechsseitige Würfel und legen sie in einer Reihe von links nach rechts so nebeneinander, dass die Würfelflächen zusammenstoßen. Dann kleben wir die Würfel, so wie sie liegen aneinander und tun das Ganze in einen Beutel.

Wie viele unterschiedliche solche Würfelreihen mit n Würfeln können wir so herstellen?



Die beiden linken Würfelreihen sind gleich (einmal der Länge nach umgedreht und dann ein Vierteildrehung entlang der langen Achse), die rechte ist anders.

Bestimme die Anzahl der Würfelreihen in den Fällen

a) $n = 2$.

b) n ungerade.

Lösung

1. Fall $n = 2$: 84

Für $n = 2$ können wir ad hoc argumentieren. Es gibt 21 Möglichkeiten, zwei Zahlen (ohne Beachtung der Reihenfolge) mit Werten $1, \ldots, 6$ auszuwählen (die Augenzahlen der beiden Würfelflächen, die zusammengeklebt werden): Wenn wir die Zahlen nämlich nach Größe ordnen, können wir sie schreiben als

$$(1,1),\ (1,2),\ \ldots,(1,6), \quad (2,2),\ (2,3),\ldots,(2,6), \quad \ldots,(6,6).$$

Dies sind $6+5+4+3+2+1 = 21$ Möglichkeiten. Hält man den einen Würfel fest, so lässt sich der andere nun noch in vier Positionen drehen. Es gibt also insgesamt 84 verschiedene Möglichkeiten.

2. Fall n ungerade: $\frac{24^n}{8}$

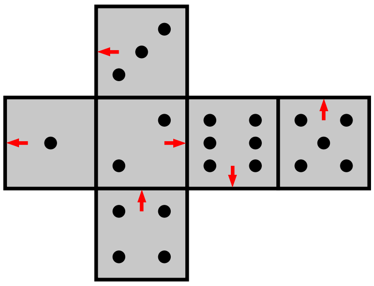
Bei einer ungeraden Anzahl von Würfeln kann man so argumentieren: Jeder Würfel kann zunächst in eine von 24 unterschiedlichen Positionen gedreht werden. Nach dem Zusammenkleben kann man die Würfelreihe durch Drehen (der Länge nach umdrehen, wobei die oberen Seiten oben bleiben, und Vierteldrehungen entlang der langen Achse) in acht mögliche Stellungen bringen.

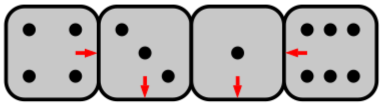
Am mittleren Würfel kann man nun ablesen, wie gedreht wurde, das heißt, alle acht Stellungen unterscheiden sich. Jeweils acht Stellungen lassen sich also durch Drehungen ineinander überführen. Damit gibt es $\frac{24^n}{8}$ unterschiedliche Würfelreihen.

Zur Aufgabe „Würfel anordnen" aus Heft 146 geben wir nun die Lösung für den verbleibenden Fall an.

Fall n gerade: $\frac{24^n+4\cdot 24^{n/2}}{8}$

Wir stellen uns vor, dass die Würfel nebeneinander von links nach rechts aufgereiht sind. Wir schauen von oben auf diese Reihe von Würfeln. Da wir die Seiten nicht sehen können, kennen wir die Würfelreihe nicht vollständig. Als Abhilfe markieren wir die Würfel mit einem Pfeil auf jeder Seite, wie im Würfelnetz dargestellt:





Eine Würfelreihe ist jetzt eindeutig beschrieben durch $w = (w_1, \dots, w_n)$, wobei $w_i = (a_i, p_i)$ die Ansicht des i-ten Würfels angibt. Dabei ist $a_i \in \{1, \dots, 6\}$ die Augenzahl und $p_i \in \{W, N, O, S\}$ die Richtung des Pfeils, angegeben in den Himmelsrichtungen West, Nord, Ost und Süd. Das heißt, w_i ist ein Element von $A := \{1, \dots, 6\} \times \{W, N, O, S\}$ und w ein Element von $X := A^n$. Offenbar ist $\#A = 24$ und $\#X = 24^n$.* Allerdings kann eine Würfelreihe durch Drehen unterschiedliche Ansichten zeigen. Also gehören im Allgemeinen mehrere $w \in X$ zur selben Würfelreihe. Kompliziert wird die Sache nun dadurch, dass zu einer Würfelreihe nicht immer gleich viele w gehören.

Zunächst einmal können wir die gesamte Würfelreihe entlang der langen Achse um eine Vierteldrehung drehen, so, dass die obere Seite nach der Drehung hinten liegt. Diese Drehung nennen wir $H : X \to X$. Indem wir H mehrfach ausführen, erhalten wir die halbe Drehung H^2, die Dreiviertel-Drehung H^3 und schließlich wieder die unveränderte Position durch $H^4 = 1$. Dabei ist $1 : X \to X$, $w \mapsto w$, die Abbildung, die w unverändert lässt.

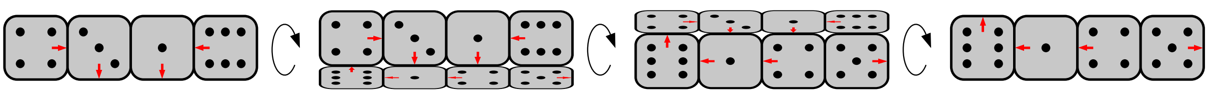


Abbildung 2: Hochdrehen H einer Würfelreihe, dargestellt in drei Schritten.

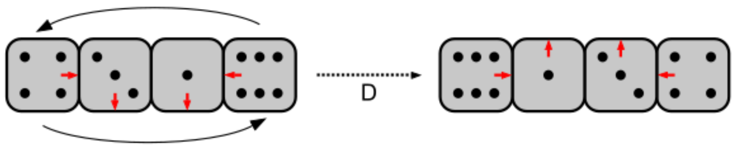
* $\#A$ bezeichnet die Mächtigkeit der Mengen A, also die Anzahl der Elemente in diesen Mengen. Ihr kennt vermutlich die Schreibweise $|A|$, die dasselbe bedeutet.

Weiter gibt es die halbe Drehung $D : X \to X$ entlang der kurzen Achse, die senkrecht durch die oben liegende Fläche geht. Offenbar ist $D^2 = 1$.
Wenn wir die Drehung eines einzelnen Würfels mit $d : A \to A$ bezeichnen, so ist beispielsweise $d(6W) = 6O$, $d(5N) = 5S$ und so weiter.

Dadurch erhalten wir für D die Darstellung

$$D(w_1, \dots, w_n) = (d(w_n), \dots, d(w_1)).$$

Die Würfel werden einzeln gedreht und die Reihenfolge wird vertauscht.



Umdrehen D einer Würfelreihe.

Natürlich könnten wir noch die halbe Drehung entlang der anderen kurzen Achse betrachten, diese ist aber gleich DH^2 (zwei Mal H anwenden, dann ein Mal D). Also bleibt es bei D und H. Insgesamt haben wir die folgenden acht Drehungen

$$G = \{1, H, H^2, H^3, D, DH, DH^2, DH^3\}.$$

Die Nacheinanderausführung von beispielsweise DH^2 und DH bringt nichts Neues, denn es ist $DHD = DHD^{-1} = H^{-1} = H^3$ und deshalb $(DH)(DH^2) = DHDH^2 = H^3H^2 = H^5 = H$. Nicht ganz zufällig schreiben wir die Elemente nebeneinander wie bei einer Multiplikation. Tatsächlich gilt das Assoziativgesetz der Multiplikation. Außerdem finden wir zu jedem Element $g \in G$ ein Element h, das die Drehung g wieder rückgängig macht, also $hg = 1$ erfüllt (in der Tat ist $h = g^3$ so ein Element).
Wir schreiben $g^{-1} := h$. Eine Menge G mit diesen Verknüpfungseigenschaften nennt man in der Mathematik eine Gruppe. Anders als bei der Multiplikation von Zahlen, gilt für unser G jedoch nicht das Kommutativgesetz, denn beispielsweise ist $HD = DDHD = DH^3 \neq DH$. Wir haben jetzt genug Vokabular beisammen, um die ursprüngliche Frage nach der Anzahl unterschiedlicher Würfelreihen präzise zu fassen: Wie viele unterschiedliche Elemente $w \in X$ gibt es, wenn wir zwei Elemente $v, w \in X$ als gleich ansehen, sofern es ein $g \in G$ gibt mit $g(v) = w$?
Na, das ist immer noch ein bisschen holprig und umständlich. Versuchen wir also, es noch etwas besser zu machen und formulieren wir noch einmal neu, was es heißt, dass zwei Würfelpositionen zur gleichen Würfelreihe gehören. Wir gehen dafür von einer Würfelreihe in einer festen Position $w \in X$ aus. Wenn wir eine Drehung $g \in G$ darauf anwenden, bekommen wir die selbe Würfelreihe, aber in der neuen Position $g(w)$. Betrachten wir also alle Positionen, die wir aus w herstellen können:

$$Gw := \{g(w) : g \in G\}.$$

Diese Menge wird manchmal als *Orbit* von w bezeichnet, weil es alle Positionen sind, die w durch Drehung erreichen kann. Zwei Positionen $v, w \in X$ gehören also zur selben Würfelreihe, wenn $Gv = Gw$ ist. Die Anzahl unterschiedlicher Würfelreihen ist daher

$$\#\{Gw : w \in X\}.$$

Kürzer kann man es wohl nicht ausdrücken! Wir wissen schon, dass $\#G = 8$ ist und $\#X = 24^n$. Die Welt wäre nun sehr einfach, wenn jeder Orbit Gw ebenfalls acht Elemente hätte. Dann müsste man einfach nur $24^n/8$ rechnen. So einfach ist es aber nicht. Betrachten wir etwa den Fall $n = 2$ und $w = (6O, 6W)$.

Dann ist $D(w) = (d(6W), d(6O)) = (6O, 6W) = w$. Durch die Drehungen H entstehen aber unterschiedliche Positionen $H(w) = (2N, 5O)$, $H^2(w) = (1S, 1N)$, $H^3(w) = (5W, 2S)$. Wir berechnen noch $DH(w) = (5W, 2S) = H^3(w)$, $DH^2(w) = (1S, 1N) = H^2(w)$ und $DH^3(w) = (2N, 5O) = H(w)$ und sehen so, dass $\#(Gw) = 4$ für $w = (6O, 6W)$. Offenbar sind w, $H(w)$, $H^2(w)$ und $H^3(w)$ alle unterschiedlich für jedes $w \in X$.

Wir sehen so, dass $\#(Gw)$ entweder 4 oder 8 ist. Jetzt müssen wir nur noch wissen, wie oft es 4 ist und wie oft 8. Sicherlich ist es nützlich zu wissen, wie viele Positionen ein $g \in G$ unverändert lässt. Bei den Drehungen H, H^2 und H^3 sind dies keine, aber D lässt $(6O, 6S)$ unverändert, wie wir oben gesehen haben. Für festes $g \in G$ schreiben wir

$$X^g = \{w \in X : g(w) = w\}$$

für die Menge der Fixpunkte von g. Wie viele Elemente hat X^g? Nun, das hängt von g ab.

Offenbar gilt $X^1 = X$ und $X^H = X^{H^2} = X^{H^3} = \emptyset$. Für welche w gilt aber $D(w) = w$? Dies ist genau dann der Fall, wenn $w_n = d(w_1)$ ist, $w_{n-1} = d(w_2)$ und so weiter. Ist n ungerade, so kann die Bedingung für den mittleren Würfel nicht erfüllt werden und es gilt $X^D = \emptyset$. Ist n gerade, so können wir $w_1, w_2, \dots, w_{\frac{n}{2}}$ frei aus A wählen und müssen dann $w_n = d(w_1)$ und so weiter setzen. In diesem Fall ist also $\#X^D = 24^{\frac{n}{2}}$. In gleicher Weise erhalten wir für $g \in \{D, DH, DH^2, DH^3\}$, dass $X^g = \emptyset$ ist, falls n ungerade ist und $\#X^g = 24^{\frac{n}{2}}$, falls n gerade ist. Wir fassen zusammen: Für n gerade ist

$$\#X^g = \begin{cases} 24^n, & \text{falls } g = 1, \\ 24^{\frac{n}{2}}, & \text{falls } g = D, DH, DH^2, DH^3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt kommt der Punkt, wo wir in die Zauberkiste greifen. Es gibt eine kombinatorische Gleichung, die Anzahl der Orbits $\#\{Gw : w \in X^g\}$ aus den $\#X^g$ berechnet, das Lemma von Burnside- Frobenius:

$$\#\{Gw : w \in X\} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#X^g.$$

Hieraus berechnen wir nun endlich die Anzahl unterschiedlicher Würfelreihen. Im Fall, wo n gerade ist:

$$\#\{Gw : w \in X\} = \frac{24^n + 4 \cdot 24^{\frac{n}{2}}}{8}. \tag{$*$}$$

Im Fall $n = 2$ bekommen wir $\frac{1}{8}(576 + 96) = 84$, wie oben schon berechnet.

Lemma von Burnside-Frobenius

Sei X eine endliche Menge und G eine endliche Gruppe von Abbildungen $X \to X$. Für $g \in G$ sei

$$X^g = \{x \in X : \, g(x) = x\}$$

die Menge der Fixpunkte von g. Für $x \in X$ sei $Gx = \{g(x) : \, g \in G\}$ der Orbit von x. Das Lemma von Burnside-Frobenius gibt an, dass die Anzahl der Orbits berechnet werden kann als

$$\#\{Gx : \, x \in X\} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#X^g.$$

Um diese Identität zu beweisen, definieren wird die *Standgruppe* oder *Fixgruppe* von $x \in X$ durch

$$G_x := \{g \in G : \, g(x) = x\}.$$

Dies ist in der Tat eine Gruppe, denn aus $g, h \in G_x$ folgt, dass $(gh)(x) = g(h(x)) = g(x) = x$ ist, also $gh \in G_x$. Gilt $gh = 1$ für gewisse $g \in G_x$ und $h \in G$, so ist $g(x) = x = (gh)(x)$. Also ist $h(x) = x$ und damit $h \in G_x$.

Wir zählen nun die Paare (g, x) mit $g(x) = x$ auf zwei Weisen und bekommen

$$\sum_{x \in X} \#G_x = \#\{(g, x) : \, g(x) = x\} = \sum_{g \in G} \#X^g.$$

Zu $y \in Gx$ wählen wir ein $g_x \in G$ mit $g_x(x) = y$. Die Menge G zerfällt in die paarweise disjunkten Mengen (die sogenannten Restklassen modulo G_x)

$$G_{x,y} := \{f \in G : \, f(x) = y\}, \qquad y \in Gx.$$

Für $f \in G_{x,y}$ ist $f^{-1}g_y(x) = f^{-1}(y) = x$, also ist $f^{-1}g_y \in G_x$. Andererseits ist für jedes $h \in G_x$ auch $gh \in G_x$. Also ist $\#G_{x,y} = G_x$ und damit

$$\#G = \sum_{y \in Gx} \#G_{x,y} = (\#Gx)(\#G_x).$$

Für $y \in Gx$ ist $G_y = G_x$, also ist

$$\#G_y = \frac{\#G}{\#G_x} = \#G_x$$

und

$$\sum_{y \in Gx} \# G_y = \# G.$$

Wir benutzen dies in der dritten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} X^g &= \sum_{y \in X} \# G_y \\
&= \sum_{J \in \{Gx : x \in X\}} \sum_{y \in J} \# G_y \\
&= \sum_{J \in \{Gx : x \in X\}} \# G \\
&= \# \{Gx : x \in X\} \cdot \# G.
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma von Burnside-Frobenius bewiesen. *q.e.d.*

Mathematische Entdeckungen

Zahlen, die sich selbst beschreiben

Sei $n = a_0\ a_1 \ldots a_k$ eine $(k+1)$-ziffrige Zahl.
n beschreibt sich selbst, wenn für jede ihrer Ziffern a_i gilt: Die Ziffer a_i gibt an, wie viele Ziffern i die Zahl n besitzt.

a) Erkläre, warum eine sich selbst beschreibende Zahl höchstens 10-ziffrig ist.
b) Erkläre, warum 1210 sich selbst beschreibt.
c) Kann eine 10-ziffrige sich selbst beschreibende Zahl $a_0 \geq 7$ oder $a_0 \leq 5$ erfüllen?
d) Bestimme alle 10-ziffrigen sich selbst beschreibenden Zahlen.
e) Der neugierige Leser möge alle sich selbst beschreibenden Zahlen – oder wenigstens einige von ihnen – bestimmen.

(CHA)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2022 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 146

Die Aufgabe wird im Artikel „Würfelreihen“ (siehe Seite 33 in diesem Heft) beschrieben.

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Josefine Kaßner (Gymnasium Oberursel, Klasse 12), Philipp Lörcks (Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Klasse 10), Oscar Su (Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Klasse 9) und Clemens Zabel (Mainz, Theresianum, Klasse 13).

Zu Teil a (Fall $n = 2$) schreibt Clemens:
Zuerst untersuchen wir die Klebeflächen. Die 1 vom ersten Würfel kann mit 6 Zahlen vom zweiten Würfel kombiniert werden. Die 2 vom ersten Würfel kann noch mit 5 Zahlen vom zweiten Würfel kombiniert werden und so weiter, also $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ Möglichkeiten der Verklebung.

Kleben nun die Würfel an zwei bestimmten Flächen aneinander, so gibt es stets vier mögliche Ausrichtungen der Würfel zueinander, die man erhält, indem man Würfel 1 festhält und Würfel 2 entlang der „Klebeachse" rotiert.
Für $n = 2$ sind daher $21 \cdot 4 = 84$ Würfelreihen möglich.

Zu Teil b (Fall n ungerade): Jeder Würfel kann eine von 24 Positionen einnehmen. Nach dem Zusammenkleben kann man die Stange durch Drehen (lange Achse und eine kurze Achse) in 8 mögliche Stellungen bringen. Am mittleren Würfel kann man ablesen, wie gedreht wurde, das heißt, alle 8 Stellungen unterscheiden sich. Jeweils 8 Stellungen lassen sich also durch Drehungen ineinander überführen.

Es gibt also $\frac{24^n}{8}$ unterschiedliche Würfelstangen für ungerade n.

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 4

Jahreszahlen

Das folgende Quadrat ist eine mögliche Lösung:

1	2020	2021	2022
2021	2022	1	2020
2022	2021	2020	1
2020	1	2022	2021

Endziffern

Die ersten 21 Potenzen von 17 haben die beiden Endziffern

n	1	2	3	4	5	6	7	...	18	19	20	21
17^n	17	89	13	21	57	69	73	...	09	53	01	17

Das 21. Element 17 der Tabelle zeigt: Die beiden letzten Ziffern von 17^n für $n = 1, 2, 3, \dots$ bilden Zyklen der Länge 20. Weil 2020 ein Vielfaches von 20 ist, hat $17^{2022} = 17^{2020} \cdot 17^2$ die Endziffern 89.

Ein besonderes Produkt

Wegen $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}$ kann man P_n so darstellen:

$$P_n = P' \cdot P'' \text{ mit } P' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$
$$\text{und } P'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Für $n = 2021$ ist dann $P_{2021} = \frac{1}{2021} \cdot \frac{2022}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2022}{2021}$.

Zwei Ungleichungen

Es ist: $2022 > (\sqrt{2021})^2 \geq (a+b+c)^2$.
Aus $(a+b+c)^2 \geq (c+c+c)^2 = 9c^2$ folgt Ungleichung (1).
Außerdem gilt

$$\begin{aligned} 2022 > \sqrt{2021}^2 &\geq (a+b+c)^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c^2. \end{aligned}$$

Jahreszahl-Aufgabe

$$\begin{aligned} S_n &= \left(n^2 - 2n + 1^2\right) + \left(n^2 - 4n + 2^2\right) + \dots + \left(n^2 - 2 \cdot 4039n + 4043\right)^2 \\ &= 4043n^2 - 2\,(1 + 2 + \dots + 4043)\,n + \left(1^2 + 2^2 + \dots + 4043^2\right) \\ &= 4043\left(n^2 - \tfrac{2}{4043} \cdot \tfrac{4043 \cdot 4044}{2} n\right) + \left(1^2 + 2^2 + \dots + 4043^2\right) \\ &= 4043\left(n^2 - 2 \cdot 2022n + 2022^2 - 2022^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + \dots + 4043\right)^2 \\ &= 4043\left((n-2022)^2 - 2022^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + \dots + 4043^2\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt: S_n hat den kleinsten Wert für $n = 2022$.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 145

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 7: Gabriel Faber 22, Anna Lena Drescher 20;
Kl. 8: Oscar Su 171, Jan-Christian Weber 32;
Kl. 11: Lukas Born 56.

Aschaffenburg, Kronberg-Gymnasium:
Kl. 7: Jonathan Reuthner 44,5.

Dorfen, Gymnasium:
Kl. 7: Emil Dörr 17.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 6: Linus Saloch 43,5, Mika Schäfer 58,5, Hagen Hohlbein 17;
Kl. 12: Marvin Wenzel 46.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 8: Konstantin Herbst 83;
Kl. 11: Aleksandra Herbst 59.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Lasse Blum 83;
Kl. 12: Sönke Schneider 25.

Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:
Kl. 7: Jacob Schmittner 67.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:
Kl. 5: Julia Hans 3;
Kl. 10: Theresa Horstkötter 12.

Hof, Johann-Christian-Reinhart-Gymnasium:
Kl. 7: Finja Weiß 7.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Tejas Shivakumar 44,5;
Kl. 7: Jabir Aouzi 38,5;
Kl. 8: Sarah Markhof 36.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 10: Simon Waldek 15.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 6: Anna Salaru 24.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 11: Pascal Bohlinger 10,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 6: Victor Mayer 18;
Kl. 11: Raphael Mayer 22.

Mainz, Theresianum:
Kl. 12: Clemens Zabel 83.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 8: Jona Richartz 11.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 11: Salvatore Ippolito 41;
Kl. 13: Johannes Kehrberger 60.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 6: Jasmin Borrmann 42;
Kl. 7: Louisa Lukowiak 36, Mats Budäus 27;
Kl. 8: Emilie Borrmann 40;
Kl. 11: Josefine Kaßner 74, Paulina Herber 8;
Kl. 12: Kathrin Borrmann 55,5.

Schondorf, Burg-Gymnasium:
Kl. 12: Christian Carda 11.

Schrobenhausen, Gymnasium
Kl. 7: Luca Sindel 67.

Simbach am Inn, Tassilo-Gymnasium:
Kl. 7: Alexander Koblbauer 128,5.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 6: Mai Linh Dang 65;
Kl. 9: Tu Sam Dang 110;
Kl. 11: Miriam Büttner 84.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 9: Philipp Lörcks 105,5.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:
Kl. 7: Marie Baumgartner 31.

Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:
Kl. 7: Greta Waldmüller 11.

Mitteilungen

- **Soziale Netzwerke:** Monoid ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
  `www.facebook.com/monoid.matheblatt`
  `www.facebook.com/monoid.redaktion`
  `www.instagram.com/monoid.matheblatt`
  Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu Monoid finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
  Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 15 € für das Kalenderjahr 2020 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Fischer, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Alina Gehlhaar mit freundlicher Unterstützung von Marcel Gruner
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau
Titellayout: Karsten Müller, Büro Schwarzschild Wiesbaden

Jahrgang 41 Heft 148 Dezember 2021

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid