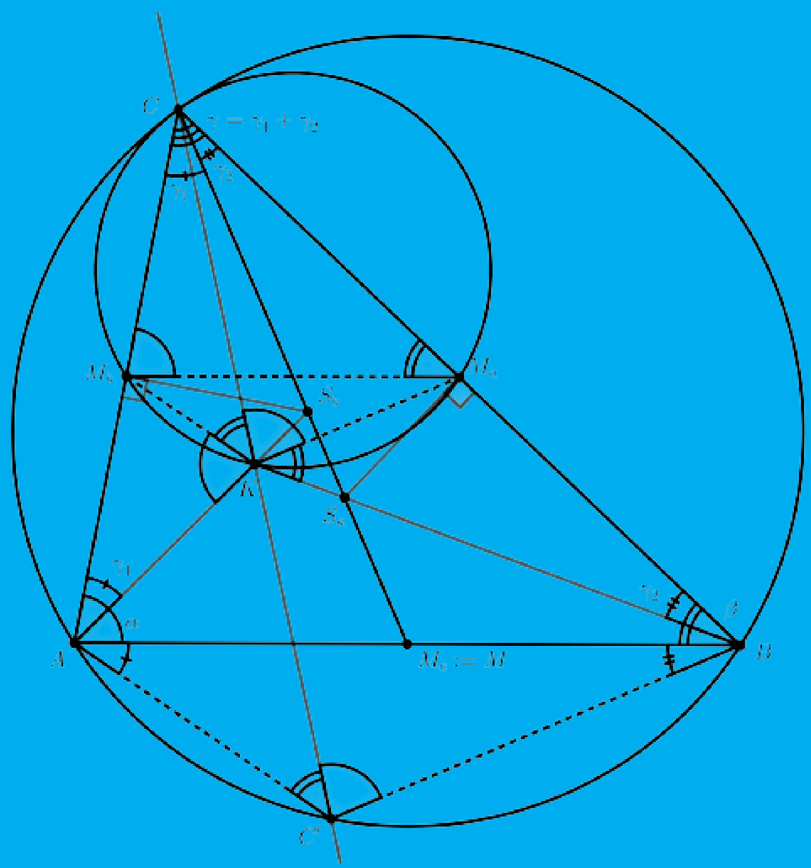
Jahrgang 42 Heft 151 Oktober 2022

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Dezember 2022.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindtund am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Monoidale Knobelei

Hartwig Fuchs

Löse das folgende Sudoku.

M		1	7	5				O
			6	1		7		4
6		8				2		
N	8				7		5	
	3	2		9	6			
					5	O	9	2
2	1		5					
			4			5		
			i		D	8	3	9

Die in der Lösung den Buchstaben Monoid zugeordneten Zahlen sind die Ziffern einer Zahl. Wie heißt diese Zahl?

Lösung des Sudokus

4	2	1	7	5	8	9	6	3
3	5	9	6	1	2	7	8	4
6	7	8	9	3	4	2	1	5
9	8	4	3	2	7	1	5	6
5	3	2	1	9	6	4	7	8
1	6	7	8	4	5	3	9	2
2	1	3	5	8	9	6	4	7
8	9	6	4	7	3	5	2	1
7	4	5	2	6	1	8	3	9

Die gesuchte Zahl ist Monoid $= 439321$.

Freitag, der 13.

von Wolfgang J. Bühler

In Heft 1970/6 der damals in der DDR erschienenen Schülerzeitschrift Alpha fand ich folgende „elegante Lösung" für das Problem, wie oft ein Freitag, der 13. in einem Jahr auftritt: Wir orientieren uns daran, was der 13. Dezember des Vorjahres für ein Wochentag ist. Der 13. Januar ist dann um $3 (= 31 - 4 \cdot 7)$ Tage verschoben, der 13. Februar um $6 = 62 - 8 \cdot 7$, der 13. März um $6 = 90 - 12 \cdot 7$ in „normalen" Jahren und um $91 - 13 \cdot 7 = 0$ Tage in Schaltjahren. Die Verschiebungen für die zwölf Monate sind demnach $(3, 6, 6, 2, 4, 0, 2, 5, 1, 3, 6, 1)$ in „normalen" Jahren und $(3, 6, 0, 3, 5, 1, 3, 6, 2, 4, 0, 2)$ in Schaltjahren. In „normalen" Jahren ist also zum Beispiel der 13. Mai ein Freitag, wenn der 13. Dezember des Vorjahres „Freitag $-$ 4 = Montag" war. Somit haben wir in dem betrachteten Jahr, falls es kein Schaltjahr ist, einen Freitag, den 13., wenn der 13. Dezember ein Freitag (Verschiebung 0) ein Dienstag (3) oder Sonntag (5) war. Entsprechend gibt es drei Möglichkeiten dafür, dass es zwei „Freitag 13." gibt und nur eine Möglichkeit für drei „Freitag, der 13.". Das gleiche sieht man auch für Schaltjahre. Also hat man die Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{7}$ bzw. $\frac{1}{7}$ für ein, zwei bzw. drei „Freitag, der 13." in einem Jahr.

Diese Argumentation verwendet eine nicht überprüfte Voraussetzung.

a) Welche Voraussetzung ist dies?
b) Ist diese Voraussetzung (und damit die Aussage über die Wahrscheinlichkeiten) richtig?

Lösung

a) Es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass der 13. Dezember mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf jeden der sieben Wochentage fällt.
b) Der Erwartungswert der Anzahl der „Freitag 13." ergibt sich aus der Behauptung $\frac{3}{7} \cdot 1 + \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{1}{7} \cdot 3 = \frac{12}{7}$. Danach wäre die erwartete Anzahl in 400 Jahren gleich $\frac{12}{7} \cdot 400$. Dies ist keine ganze Zahl.
   Andererseits wiederholt sich der Kalender nach 400 Jahren. Die Anzahl der „Freitag 13." müsste also gleich der erwarteten Anzahl sein.

Vom Suchen und Finden von Quadratzahlen

von Stefan Deichmann

In der Schule, aber auch in der weiteren mathematisch-naturwissenschaftlichen Ausbildung, treten zahlreiche Aufgaben und Fragestellungen auf, bei denen Quadratzahlen und die Arbeit mit diesen besonderen Zahlen sowohl wichtig als auch hilfreich sind.
Quadratzahlen sind Zahlen, die man als Produkt aus zweimal derselben natürlichen Zahl schreiben kann. Beispiele: $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ und $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$.
Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen aufeinander folgenden Quadratzahlen? Auf welche Weise findet man zu einer Quadratzahl n^2 die unmittelbar folgende (nächstgrößere) Quadratzahl, wenn eine Quadratzahl (und das dazugehörige wertgleiche Produkt aus zwei natürlichen Zahlen) bekannt ist? Beispiel: $2022^2 = 4088484$; $2023^2 = ?$.
Alternativ: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Folge der ungeraden Zahlen u_n (das erste Folgenglied soll 1 sein: $u_1 = 1$) und der Folge der Quadratzahlen q_n?

Multiplikationsverfahren

Es ist möglicherweise naheliegend, dass man eine Zahl a sucht, die man mit einer Quadratzahl n^2 multipliziert, um auf diese Weise die unmittelbar folgende Quadratzahl m^2 zu erhalten:

$$a \cdot n^2 = m^2 \Leftrightarrow a = ?.$$

Nach einigen Versuchen, auf diese Weise die gesuchten Quadratzahlen zu finden, wird man bald feststellen, dass dieses Verfahren nicht geeignet ist.

Additiver Zusammenhang

Schreibt man sich die natürlichen Zahlen der Größe nach geordnet und mit der Zahl Null beginnend in einer (ersten) Spalte auf und daneben (in einer zweiten Spalte) die dazugehörigen Quadratzahlen, so fällt auf, dass sich die aufeinander folgenden Quadratzahlen lediglich durch eine bestimmte (natürliche) Zahl, die zur jeweils vorherigen Zahl addiert werden muss, unterscheiden.
Diese Zahl ist eine ungerade Zahl und ergibt sich aus dem um zwei erhöhten Wert der Differenz der beiden vorherigen Quadratzahlen.
Beispiel: Wenn man die Quadratzahl zu der natürlichen Zahl 22 sucht und bereits weiß, dass 20 zum Quadrat 400 und 21 zum Quadrat 441 ist, dann subtrahiert man 400 von 441, erhält 41, addiert zu diesem Wert 2 und erhält die natürliche Zahl 43. Diesen Wert 43 addiert man zu 441 und erhält die Quadratzahl zu 22, nämlich 484.

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise betrachte folgende Tabelle:

	Zahl		**Quadratzahl**	Folge der ungeraden Zahlen
	0	$\rightarrow$	$0 \cdot 0 = 0^2 = 0$	
$\swarrow$ $+1$ $\searrow$				$\searrow$ $+1$ $\swarrow$
	1	$\rightarrow$	$1 \cdot 1 = 1^2 = 1$	
$\swarrow$ $+1$ $\searrow$				$\searrow$ $+3$ $\swarrow$
	2	$\rightarrow$	$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$	
$\swarrow$ $+1$ $\searrow$				$\searrow$ $+5$ $\swarrow$
	3	$\rightarrow$	$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	18	$\rightarrow$	$18 \cdot 18 = 18^2 = 324$	
$\swarrow$ $+1$ $\searrow$				$\searrow$ $+37$ $\swarrow$
	19	$\rightarrow$	$19 \cdot 19 = 19^2 = 361$	
$\swarrow$ $+1$ $\searrow$				$\searrow$ $+39$ $\swarrow$
	20	$\rightarrow$	$20 \cdot 20 = 20^2 = 400$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

Fazit

Die Folge der Quadratzahlen q_n wird in der vierten Spalte der obigen Tabelle durchlaufen. In der fünften Spalte erkennt man diejenigen Zahlen, die zu bestimmten Quadratzahlen addiert werden müssen, um die nächstgrößere Quadratzahl zu erhalten. Bei genauem Hinsehen wird die Folge der ungeraden Zahlen u_n durchlaufen.

Zudem ist es möglich, zu einer bekannten Quadratzahl n^2 das um 1 vergrößerte Doppelte der Basis zu addieren, um die nächstgrößere Quadratzahl zu erhalten.

- *Beispiel 1:* Die unmittelbar folgende Quadratzahl von n^2 wird gesucht. Diese Zahl m^2 ergibt sich, indem man den Wert des Terms $n^2 + 2n + 1$ bestimmt, kurz: $m^2 = (n+1)^2$. Man kann sich also der ersten binomischen Formel bedienen, um gesuchte Quadratzahlen zu bestimmen.
- *Beispiel 2:* Die unmittelbar folgende Quadratzahl von 2022^2 wird gesucht. Diese Zahl m^2 ergibt sich, indem man den Wert des Terms $2022^2 + 2 \cdot 2022 + 1$ bestimmt, kurz: $m^2 = (2022+1)^2 = 4092529$.

Das Suchen der Quadratzahlen wird somit deutlich mit Hilfe der Folge der ungeraden Zahlen und der ersten binomischen Formel vereinfacht. Eine Regelmäßigkeit wird festgestellt.

Übungen

1. Das Quadrat der Zahl 10 ist 100, das Quadrat aus 11 ist 121. Welche Zahl muss zu 121 addiert werden, um die nächstgrößere Quadratzahl zu erhalten?
2. Das Quadrat der Zahl 36 ist 1296, das Quadrat der der Zahl 35 ist 1225. Welche Zahl muss von 1225 subtrahiert werden, um die nächstkleinere Quadratzahl zu erhalten?
3. Man weiß, dass $484 = 22^2 = 22 \cdot 22$ und $529 = 23^2 = 23 \cdot 23$ ist. Ermittele rechnerisch die nächstgrößere und nächstkleinere Quadratzahl.
4. Bestimme die nächstkleinere Quadratzahl von n^2.
5. Bestimme die 2024. Quadratzahl nach 1000.

Primzahl-Mehrlinge und Primzahl-Abstände

von Frank Rehm

Unser Redaktionsmitglied Hartwig Fuchs machte mich kürzlich auf seinen Artikel in Monoid 83 aufmerksam, in dem es um Primzahlketten ging, die eine endliche arithmetische Folge bilden, das heißt, die Differenzen benachbarter Glieder dieser Folge sind gleich. Ich habe mir die Frage gestellt, ob es für jede mögliche gerade Differenz solche Primzahlketten oder wenigstens ein Primzahlpaar gibt.

Die Primzahlen von 3 bis 1 Million weisen tatsächlich alle Differenzen bis 114 auf, wobei die Differenzen 2 bis 92, 96 bis 100 und 112 bis 114 sogar für benachbarte Primzahlen gelten. In dem Beitrag von Hartwig Fuchs war der Blickwinkel auf mögliche Längen von Primzahlfolgen gerichtet: die Vermutung von Hardy-Littlewood besagt, dass jede Länge möglich ist, allerdings ohne Aussage über die Differenz der arithmetischen Folge. Dazu führte Hartwig Fuchs das Beispiel von P. A. Pritchard an, das mit der Primzahl 8 297 644 387 beginnt, gefolgt von weiteren 18 Primzahlen im Abstand der geradezu astronomischen Differenz von 4 180 566 390.

Der Abstand 2 tritt bis zu 1 000 000 übrigens ziemlich häufig auf: 9169 Mal – es handelt sich um die Primzahlzwillinge, von denen man nicht weiß, ob es unendlich viele davon gibt. Beinahe genauso oft gibt es 4er-Abstände: 8143 Mal, Abstand 6 gibt es 13549 Mal, Abstand 8 gibt es 5569 Mal, Abstand 10 – 7079, 12 – 8005, 14 – 4233 Mal, und so weiter. Übrigens findet sich der Abstand 100 nur zweimal: zwischen 396733 und 396833 sowie zwischen 838249 und 838349, dagegen 106 Mal der Abstand 50.

Zum Thema Primzahlabstände bieten sich noch diese beiden Zahlenfolgen an, die beliebig fortgesetzt werden können. Was hat es damit auf sich?

$$\begin{aligned} P(n) = \{&3, 7, 23, 89, 113, 523, 887, 1129, 1327, 9551, 15683, 19609, 31397, \\ &155921, 360653, 370261, 492113\}, \\ D(n) = \{&2, 4, 6, 8, 14, 18, 20, 22, 34, 36, 44, 52, 72, 86, 96, 112, 114\}. \end{aligned}$$

Zum Abschluss noch einige kuriose Primzahlen: Primzahlen können auch Palindrome sein, also von vorn und hinten gleich lauten. Dabei sind besonders die mit nur zwei verschiedenen Ziffern interessant, zum Beispiel 3 331 333 oder 333 333 313 333 333 oder 99 999 199 999 oder 77 777 277 777. Rekordverdächtig sind auch die Primzahlen 111 111 151 111 111 und 333 333 383 333 333. Sind alle Ziffern gleich, kann es sich nur um „Einser-Schlangen“ (auch Repunit-Primzahlen genannt) handeln (warum?), diese Primzahlfolge wächst extrem schnell an, das heißt, solche Primzahlen sind besonders selten: 11, 1 111 111 111 111 111 111, ... oder man notiert besser lediglich die Stellenzahl: $R(n) = 2, 19, 23, 317, 1031, 49081, 86453, 109297, \ldots$.

Lösung der Aufgabe

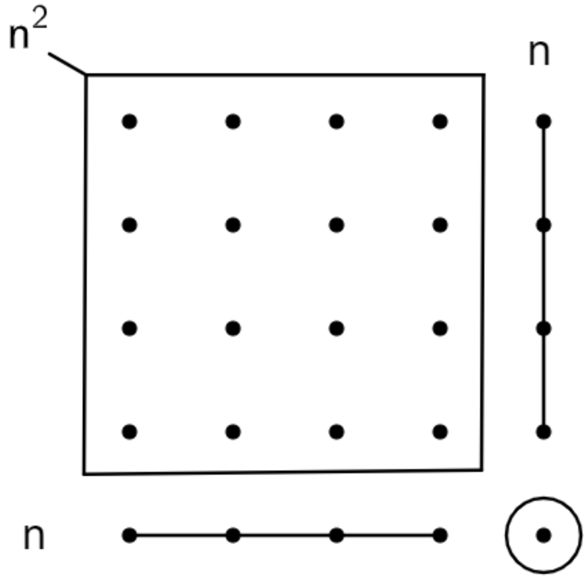
Die beiden Folgen $P(n)$ und $D(n)$ beziehen sich auf die Primzahlen von 3 bis 1 000 000. Dabei enthält $P(n)$ jeweils die kleinste Primzahl, deren Abstand zum Nachfolger einen neuen Rekord erreicht, und diese Abstände sind die Glieder der Folge $D(n)$. Beispiel: Die Primzahlen 3 und 5 mit Abstand 2, die Primzahlen 7 und 11 mit Abstand 4, die Primzahlen 23 und 29 mit Abstand 6, ..., die Primzahlen 492113 und 492227 mit Abstand 114. Größere Sprünge treten dann erst bei Primzahlen größer 1 000 000 auf. Bei größeren Primzahlen werden immer seltener neue Rekordabstände erreicht, so setzt sich $P(n)$ wie folgt fort: 1349533, 1357201, 2010733, 4652353, 17051707, 20831323, 47326693, 122164747, 189695659, 191912783, 387096133, 436273009, 1294268491

Die Folge $P(n)$ wird in der Online-Enzyklopädie der Zahlenfolgen (OEIS) von N. J. Sloane unter der Nummer A002386 geführt: www.oeis.org/A002386. Die Nachfolgeprimzahlen sind als Folge A000101 archiviert. Die jeweiligen Abstände in $D(n)$ setzen sich nach 114 bei Primzahlen über 1 000 000 wie folgt fort: 118, 132, 148, 154, 180, 210, 220, 222, 234, 248, 250, 282, 288, geführt als Folge A005250 im OEIS. Der erste vierstellige Abstand beträgt 1132, gefolgt von den Rekorden 1184, 1198, 1220 und so weiter.

Nachtrag: Die nur aus der Ziffer 1 bestehenden so genannten Repunit-Primzahlen findet man auch im OEIS als Folge A004023. Mehr als 1 000 000 Ziffern hat erstmals die zehnte Repunit-Primzahl mit 5794777 Stellen.

Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs



$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Besondere pythagoreische Tripel

von Frank Rehm

Bekannt ist das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5, mit denen wir das kleinste pythagoreische Tripel haben. Das Dreieck ist rechtwinklig, also gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$. Monoid hat mehrmals über die allgemeine Formel für pythagoreische Tripel (a, b, c) mit

(1) $a^2 + b^2 = c^2$

berichtet: Man erhält alle möglichen Tripel für ganze Zahlen u, v mit $0 < v < u$ mit

(2) $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$

Die erste und zweite binomische Formel bestätigen dafür die Gültigkeit von Gleichung (1). Sind u und v teilerfremd, sind es offenbar auch a, b und c. Multipliziert man a, b und c bzw. u und v mit einer ganzen Zahl größer 1, erhält man weitere Tripel, die hier nicht weiter betrachtet werden. Als „besonders“ wollen wir ein Tripel (a, b, c) bezeichnen, bei dem sich b und c nur um 1 unterscheiden. Der erste Treffer ist demnach $(3, 4, 5)$.

Nun stellt sich die Frage: wie komme ich zu weiteren bzw. überhaupt zu allen solchen Lösungen mit $c = b + 1$?

Anhand der Formeln (2) müsste dann $2uv + 1 = u^2 + v^2$ gelten beziehungsweise umgeformt $1 = (u - v)^2$, also wegen $v < u$ muss $u = v + 1$ gelten – eine Überraschung, denn dann weichen auch b und c nur um 1 ab.

Wir starten nun mit dem Tripel $(3, 4, 5)$. Das Tripel kann übrigens mit $u = 2$, $v = 1$ erzeugt werden. Sind die Zahlen teilerfremd, dann können nicht alle drei Zahlen gerade sein. Bei diesem Tripel ist 4 gerade, was wegen $4 = 2uv = 2 \cdot 2 \cdot 1$ nicht verwundert. Die mittlere Zahl b des Tripels ist also immer gerade. Dann können weder a noch c gerade sein, denn andernfalls sind die Zahlen nicht teilerfremd oder der Rest bei Teilung durch 2 ist in Gleichung (1) auf beiden Seiten verschiedenen.

Da noch unklar ist, welches das nächste „besondere" Tripel sein könnte, versuchen wir es durch Probieren und beginnen mit $a = 5$ als Startwert, also gerade die Zahl c des ersten Tripels, zumal a ungerade sein muss. Wie groß müssen dann u und v sein, wenn das Tripel mit 5 beginnt? Es muss $5 = u^2 - v^2$ gelten. Eine Differenz 5 von zwei Quadratzahlen kommt nur bei 9 und 4 vor, also ist $u = 3$ und $v = 2$. Aus den Überlegungen oben wissen wir bereits, dass für $u = v + 1$ auch die Zahlen b und c benachbart sind, und wir bekommen das Tripel $(5, 12, 13)$. Nun kann man mit 13 fortsetzen und findet dafür das Tripel $(13, 84, 85)$. Die Zahlen werden zunehmend größer, weiter geht es mit $(85, 3612, 3613)$ und so weiter. „Besonders" ist aber auch das Tripel $(7, 24, 25)$, das auf dieselbe Weise wie beim Tripel $(3, 4, 5)$ zu einem weiteren „besonderen" Tripel $(25, 312, 313)$ führt und so weiter. Allerdings gelange ich von $(3, 4, 5)$ nicht zum Tripel $(7, 24, 25)$, es ist ein neues „Start-Tripel" für eine Serie von weiteren „besonderen" Tripeln.

Es scheint, dass es mehrere solche Tripel-„Ketten" gibt, aber bleiben wir bei $(3, 4, 5)$ mit dem Übergang zu $(5, 12, 13)$: Wie findet man die Zahlen u und v, wenn 5 einerseits die Summe von zwei Quadratzahlen, aber auch die Differenz von Quadratzahlen ist? Natürlich ist jede ungerade Zahl die Differenz von zwei sogar benachbarten Quadratzahlen*. Und sind u und v benachbart, sind es auch b und c, wie wir oben feststellen konnten.
Die nächsten Parameter u und v findet man in der Tat ganz einfach: gilt $c = u^2 + v^2$, dann gilt wegen $c = \frac{c+1}{2} + \frac{c-1}{2}$ auch

$$c = u^2 - v^2 \text{ mit } u = \frac{u^2 + v^2 + 1}{2} \text{ und } v = \frac{u^2 + v^2 - 1}{2}.$$

* Mehr dazu erfahrt ihr im Artikel „Vom Suchen und finden von Quadratzahlen" auf Seite 5 in diesem Heft

Das erklärt, warum die Zahlen bei dieser Art Berechnung – die Zahl c als neuen a-Wert zu verwenden – so schnell anwachsen: weil hier die zu vor verwendeten Parameter u und v quadriert werden. Nach 85 als Wert für a erhält man zum Beispiel als nächstes Tripel: $(3\,613, 6\,526\,884, 6\,526\,885)$.

Fassen wir zusammen: Was haben wir bereits entdeckt? Geht man vom kleinsten pythagoreischen Tripel aus, kann man mit dem c-Wert als neuen a-Wert unendlich viele weitere „besondere" Tripel generieren, wobei man auch leicht die jeweils neuen Parameter u und v findet, nämlich mit $u = \frac{c+1}{2}$ und $v = \frac{c-1}{2}$. Offen bleibt noch die Frage, wie es mit weiteren Tripel-Ketten aussieht, zum Beispiel wenn man mit $(7, 24, 25)$ beginnt. Kann man als Startwert für a jede ungerade Zahl wählen? Wenn ja, gibt es viel mehr „besondere" oder sonstige pythagoreische Tripel? Da beide Anzahlen unendlich sind (von den sonstigen Tripeln wissen wir es noch nicht), müssen wir klären, was mit „mehr Tripel" gemeint ist, denn mit Unendlich kann man nicht einfach rechnen wie mit Zahlen.

Wir wissen, dass die Zahl $a = u^2 - v^2$ ungerade sein muss und nach der dritten binomischen Formel darstellbar ist als $u = (u - v)(u + v)$ mit zwei ungleichen Faktoren. Gibt es nur eine solche Darstellung, gibt es auch nur ein pythagoreisches Tripel, das mit a beginnt, und wenn $u = v + 1$ ist, ist das Tripel sogar ein „besonderes".

Die ersten ungeraden Zahlen von 3 bis 13 lassen in der Tat nur eine Zerlegung in zwei ungerade ungleiche Faktoren zu. Erst für den Startwert $a = 15$ gibt es ein „besonderes" und ein sonstiges Tripel:

$15 = 1 \cdot 15 = (8 - 7)(8 + 7)$ ergibt das Tripel $(15, 112, 113)$,
$15 = 3 \cdot 5 = (4 - 1)(4 + 1)$ das Tripel $(15, 8, 17)$.

Variiert man nun auf beliebige Weise das Produkt von zwei ungeraden Faktoren, ist sofort klar, dass es unendlich viele solcher „besonderen" Tripel-Ketten geben muss, wie mit $(3, 4, 5)$ oder $(7, 24, 25)$ beginnend, und dass es auch unendlich viele sonstige Tripel gibt, das heißt bei denen $c > b+1$ ist. Und es gibt natürlich auch beliebig viele ungerade Startwerte a, für die es mehrere Tripel gibt, allerdings immer nur genau ein „besonderes" Tripel, nämlich mit den Parametern $v = \frac{a-1}{2}$ und $u = \frac{a+1}{2} = v + 1$:

$$(3) \quad b = 2\frac{a+1}{2} \cdot \frac{a-1}{2} = \frac{a^2-1}{2} \text{ und}$$
$$c = b + 1 = \frac{a^2+1}{2} = \left(\frac{(a+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right),$$

weil also der Wert von a wegen $c = b + 1$ zu genau einem Paar (u, v) führen kann.

Uns zeigt sich damit die interessante Vielfalt der pythagoreischen Tripel. Beschränkt man sich auf teilerfremde Tripel (a, b, c) gemäß den Formeln (2), lässt sich folgendes resümieren:

- Die Zahlen a und c sind ungerade, b ist gerade.
- Es gibt unendlich viele „besondere" Tripel mit $c = b + 1$.
- Von jedem solcher Tripel lassen sich Ketten von weiteren „besonderen" Tripeln bilden, bei denen jeweils die Zahl c des Vorgängers als neuer Startwert a fungiert.
- Die beiden Zahlen b und c können dabei direkt aus a gemäß der Formeln (3) berechnet werden.
- Betrachtet man alle denkbaren Faktorzerlegungen der ungeraden Zahlen a, lassen sich „besondere" und oft (nicht immer) sonstige Tripel mit Startwert a finden.
- Da sich jede ungerade Zahl a als Produkt zweier ungerader Zahlen darstellen lässt, gibt es mindestens ein „besonderes" pythagoreisches Tripel dafür; ist a eine Primzahl, gibt es nur dieses eine Tripel, ist a nicht prim, ist das Ergebnis nicht eindeutig, zum Beispiel für $a = 9$ gibt es auch nur ein pythagoreisches Tripel, nämlich ein „besonderes": $(9, 40, 41)$.

Zum Schluss noch eine Anregung zum eigenständigen Forschen: Seht Euch einmal die mittleren Zahlen b dieser „besonderen" Tripel-Ketten an, zum Beispiel $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(13, 84, 85)$, $(85, 3\,612, 3\,613)$, $(3\,613, 6\,526\,884, 6\,526\,885)$ und so weiter. Was stellt Ihr fest?

Lösung der Aufgabe

- Jede mittlere Zahl ergibt sich als Produkt der Zahl des Vorgängertripels multipliziert mit einer Zahl aus einer speziellen Folge: $a_n = 3, 7, 43, 1807, \ldots$, wobei $n > 0$ ist:

  $$4 = 2\cdot 2,\ 12 = 4\cdot 3,\ 84 = 12\cdot 7,\ 3\,612 = 84\cdot 43,\ 6\,526\,884 = 3\,612\cdot 1\,807, \ldots$$

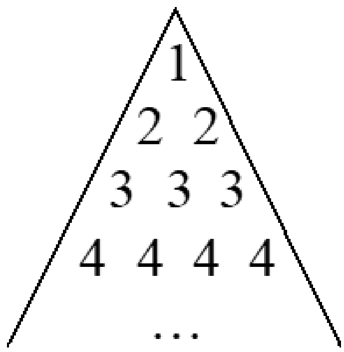
- Diese Folge erklärt das schnelle Wachstum in diesen Tripel-Ketten, denn es gilt: $a_1 = 3 = 2+1$, $a_2 = 7 = 2\cdot 3+1$, $a_3 = 43 = 2\cdot 3\cdot 7+1$, $a_4 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 43+1$, und so weiter oder allgemein $a_1 = 3$, $a_n = 2\cdot a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_{n-1}+1$ für $n > 1$ – für einen eingesandten Beweis bin Euch dankbar, da mir dieser nicht gelungen ist.

Nachbemerkung: Ihr könnt auch andere Tripel als „besonders" betrachten, etwa wenn b und c eine größere Differenz aufweisen, zum Beispiel 3, 5, 7 oder 9. Gibt es dann Lösungen und wenn ja, sind dann auch solche Tripel-Ketten möglich? Dem Forschergeist sind somit keine Grenzen gesetzt. Aufschlussreich ist bei den „besonderen" Tripeln auch, wie sich die Differenzen $c - a$ verhalten. Es zeigt sich generell, dass nicht alle möglichen Differenzen zwischen den Zahlen a, b und c vorkommen. Wir haben gezeigt wann $c = b + 1$ gilt, aber es gibt auch Tripel mit $b = a + 1$, zum Beispiel $(119, 120, 169)$. Anhand der Formeln (2) weist man schnell nach, dass für $c - a$ und $c - b$ ausschließlich doppelte bzw. einfache Quadratzahlen in Frage kommen, und sogar für alle möglichen solcher Differenzen. Allerdings ist die Differenz $a - b$ etwas „exotischer“: Treffer sind die absoluten Differenzen 1, 4, 7, 8, 9, 16, 17, 23, 25, 28, 31, 32, 36, 41, 47, 49, 56, 63, 64 und so weiter. Die Formeln (2) verraten, dass dies nur die Zahlen sein können, die gleich der Differenz einer doppelten und einer einfachen Quadratzahl sind, und dabei ist zum Beispiel 3 ausgeschlossen. Die Differenz $a - b$ ist je nach Wertunterschied von u und v positiv oder negativ, nämlich negativ bei geringerer Differenz von u und v. Vielleicht ist dies eine Anregung für Euch, weiter auf diesem Gebiet zu forschen?

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Als es wieder einmal sehr unruhig in der Mathematikstunde wurde, ließ der Lehrer die Schüler die abgebildete Zahlenpyramide ins Heft schreiben und nach unten fortsetzen. Damit nicht genug, musste die Klasse anschließend nacheinander die Summe aller Zahlen in der Pyramide ausrechnen, und zwar für immer größere Pyramiden mit jeweils einer Reihe mehr.



Mona stieß ihre Nachbarin Sina an: „Hast du auch die Summen 1, 5, 14 und 30 für die ersten vier Reihen ausgerechnet?“ – „Ja, und ich bin schon bis zur 9. Reihe fertig“, entgegnete Sina. „Aber nun habe ich etwas Merkwürdiges entdeckt. Bis jetzt kommt nämlich nach der 1 keine Quadratzahl und nach der 5 keine Primzahl mehr unter den Summen vor.“

1. Wie heißt die von Sina als nächstes auszurechnende Summe bis zur 10. Reihe?
2. Kommen tatsächlich nach der 1 und der 5 keine Quadratzahlen oder Primzahlen mehr unter den Summen vor? (Die Antworten sind zu begründen.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Dezember 2022 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 149

In Heft 149 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Eines Morgens erzählt Herr Pommer seiner Frau beim Frühstück, was er in dieser Nacht geträumt hatte: „Ich wurde auf einen fremden Planeten geholt, um den Rückgang der dortigen Apfelernte zu stoppen. Dort gibt es eine besondere Sorte von Würmern, mit denen sich der Boden in den Plantagen verbessern lässt. Diese Würmer wachsen gleichmäßig mit einer Rate von 10 cm pro Woche, aber sie wachsen nach Erreichen von 10 cm Länge nicht weiter. Darüber hinaus kann ein ausgewachsenes Exemplar dieser – übrigens völlig schmerzunempfindlichen – Tiere in zwei beliebig lange lebendige Würmer von der Gesamtlänge 10 cm zerschnitten werden, die dann wieder mit der gleichen Rate bis zur vollen Länge wachsen können. Man gab mir den letzten auf diesem Planeten verbliebenen Wurm und bat mich, innerhalb einer Woche zehn ausgewachsene Würmer für die Plantagen zu züchten.“ – „Und, konntest Du dem Planeten helfen?“, fragte Frau Pommer ihren Mann. Er entgegnete: „Ich weiß es nicht. Gerade als ich anfangen wollte, bin ich aufgewacht!“ Kann Herr Pommer den Auftrag erfüllen und die Apfelernte auf dem Planeten retten? Die Antwort ist zu begründen.

Lösung

Herr Pommer kann zehn (und sogar mehr) Würmer innerhalb einer Woche züchten. Dazu folgende Vorüberlegung: Wenn Herr Pommer den Ausgangswurm in der ersten Wochenhälfte in zwei Teile der Länge 5 cm zerschneidet, hat er am Ende der Woche zwei ausgewachsene Würmer. Wenn er im ersten Viertel der Woche seinen Wurm im Verhältnis 1 : 3 teilt, so wächst der kürzere Teil bis zum Ende der Woche zur vollen Länge heran. Der längere Teil ist bis zur Wochenmitte ebenfalls wieder ausgewachsen und kann dann wie vorher in zwei gleiche Hälften geteilt werden. Damit hat Herr Pommer am Ende der Woche drei ganze Würmer.

Allgemein führt das auf folgende Strategie: Herr Pommer teilt innerhalb des ersten Zeitabschnitts von $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ der Wochenlänge den Ausgangswurm im Verhältnis von $(\frac{1}{2})^n$ zu $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Der kürzere Abschnitt wächst bis zum Ende der Woche vollständig aus; der längere Abschnitt bereits bis zum Ende von $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$ der Wochenlänge. Dann wird er im Verhältnis von $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$ zu $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$ teilt, worauf sich am Ende von $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ der Wochenlänge die entsprechende Situation ergibt. Dies geht so weiter bis zur Wochenmitte, also bei $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-(n-1)}$ der Wochenlänge, wenn die letzte Zerschneidung in zwei gleich große Teile erfolgt.

Damit hat Herr Pommer am Ende der Woche $n + 1$ ausgewachsene Würmer erzeugt. Für $n = 9$ muss er die erste Zerschneidung innerhalb von $\frac{1}{512}$ der Wochenlänge vornehmen und erhält so zehn Würmer.
Vollständig richtige Lösungen wurden von Paulina Herber (Gymnasium Oberursel, Klasse 12), Salvatore Ippolito (Albert-Schäffle-Schule, Nürtingen, Kl. 12), Josefine Kaßner (Gymnasium Oberursel, Kl. 12) und Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, Kl. 9) eingesandt.

In der nächsten Nacht hat Herr Pommer den Traum weiter geträumt. Allerdings musste er erfahren, dass alle Wurmstücke, die kleiner als 5 cm waren, nur noch 90% der ursprünglichen Wachstumsrate erreichen konnten. Ließ dies immer noch die Zucht von zehn Würmern in einer Woche zu? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

David Acheson: Die Calculus-Story. Ein mathematisches Abenteuer

In 28 Kapiteln nähert sich der britische Mathematiker David Acheson von verschiedenen Seiten dem mathematischen Gebiet der Differential- und Integralrechnung. Anhand der bekannten Anekdote, dass Newton beim Beobachten eines vom Baum fallenden Apfels die Idee der Gravitationstheorie entwickelt haben soll, wird die grundlegende Idee der Veränderungen und auch der Prioritätsstreit zwischen Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz kurz angerissen.
Im zweiten Kapitel wird die deduktive Arbeitsweise von Mathematikern verdeutlicht, die beim Gewinnen neuer Erkenntnisse logische Schlüsse aus vorgegebenen Prämissen deduktiv ableiten und dabei auf Allgemeingültigkeit und eine schlüssige Begründung (Beweis) der neu gewonnenen Erkenntnisse Wert legen. Nach einem weiteren Kapitel mit Betrachtungen zur Unendlichkeit folgt die für einen Einstieg in die Analysis sinnvolle Betrachtung der Steigung des Graphen einer nicht-linearen Funktion.
Es folgen Kapitel über Optimierungsprobleme, Flächenbestimmungen, unendliche Reihen, Integration und wieder der Newtonsche Apfel als Einstieg in die Dynamik und Newtons berühmtes Buch „'Philosophiae Naturalis Principia Mathematica'" (Die mathematischen Grundlagen der Naturphilosophie). Es folgt eine nähere Betrachtung des Prioritätsstreits zwischen Newton und Leibniz, wer von beiden der Erstentdecker der Differentialrechnung war.
Weiteren Kapitel beschäftigen sich mit oszillierenden Funktionen, der Leibniz-

Reihe $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + - \frac{1}{7} + ...$, Differentialgleichungen, die Eulersche Zahl, bis hin zur schönsten Gleichung der Mathematik: $e^{i\pi} = -1$.
Das Buch „'Die Calculus-Story"' reißt verschiedene Themenfelder im Zusammenhang mit der Differentialrechnung an, so dass vor allem Oberstufenschüler, die sich im Unterricht gerade mit der Analysis beschäftigen viele spannende ergänzende Gesichtspunkte erfahren können. Hat man von den angesprochenen Inhalten noch gar nichts gehört, so erscheint die Darstellung an manchen Stellen etwas zu knapp, so dass es schwerfallen könnte, diese ohne weitere Hilfen vollständig nachvollziehen zu können.
Auch wenn „Die Calculus-Story" sich eher an ältere Schülerinnen und Schüler richtet, die bereits etwas in die Differentialrechnung eingestiegen sind, so können dennoch die ersten Kapitel auch schon ab Klasse 8 grundsätzlich interessante Gesichtspunkte liefern.

Fazit: Auch wenn für jemanden, der von der angesprochenen Thematik noch gar nichts gehört hat, an manchen Stellen schwerer nachzuvollziehen ist, so ist es doch ein schönes Buch für Oberstufler, oder Schülerinnen und Schüler, die am Ende der Mittelstufe darüber nachdenken, ob sie einen Mathematik-Leistungskurs wählen sollen.

Gesamtbeurteilung: gut ☺☺

Angaben zum Buch

Acheson, David: Die Calculus-Story. Ein mathematisches Abenteuer.
Anaconda 2018, ISBN 978-3-7306-0626-1, gebunden 216 Seiten
Art des Buches: Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau: verständlich
Altersempfehlung: ab 15 Jahren

Wachstum im Schneckentempo

von Hartwig Fuchs

Es sei $V(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler einer natürlichen Zahl n mit $n \geq 2$. Die Werte von $V(n)$ für verschiedene n schwanken beträchtlich.

Beispiel 1: Besondere $V(n)$-Werte

a) Für die 6002-ziffrige Primzahl $n = 2^{19937} - 1$ gilt $V(n) = 1$.
Überhaupt gilt für jede Primzahl n und für jede ihrer Potenzen n^k mit $k > 1$, dass $V(n) = V(n^k) = 1$ ist.

b) Für das Produkt der ersten 2000 Primzahlen 2, 3, 5, ..., 17389 ist $V(n) = 2000$. Entsprechend gilt für das Produkt n von k verschiedenen Primzahlen, dass $V(n) = k$ ist, wobei k beliebig groß werden kann.

Trotz der „chaotischen“ Verteilung der Werte von $V(n)$ lassen sich einige Informationen über das Wachstumsverhalten von $V(n)$ finden, wenn man der Frage nachgeht: Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl $D(n)$ der verschiedenen Primteiler aller $n-1$ Zahlen m, wobei $1 < m \leq n$, wie groß ist also

$$D(n) = \frac{1}{n-1}(V(2) + V(3) + \ldots + V(n)),$$

kurz

$$D(n) = \frac{1}{n-1}S(n).$$

Beispiel 2: Die $D(n)$-Werte für $2 \leq n \leq 15$ (gerundet)

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$V(n)$	1	1	1	1	2	1	−1	1	2	1
$S(n)$	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12
$D(n)$	1	1	1	1	1,20	1,17	1,14	1,13	1,22	1,20

n	12	13	14	15
$V(n)$	2	1	2	2
$S(n)$	14	15	17	19
$D(n)$	1,27	1,25	1,31	1,36

Die Tabelle zeigt, dass die $D(n)$-Werte ununterbrochen größer werden mit wachsendem n. Das führt zu der Frage: Welche Elemente der Folge $D(n)$ mit $n = 2, 3, 4, \ldots$, kleiner sind als ihre unmittelbaren Vorgänger?

Beispiel 3: Einige $D(n)$ mit $D(n) > D(n+1)$.

Nach der Tabelle gilt etwa

$$D(6) > D(7), D(10) > D(11), D(12) > D(13),$$

aber auch

$$D(7) > D(8), D(8) > D(9),$$

was die Vermutung nahelegt:

(1) Es sei $n+1$ eine Primzahl oder eine Primzahl-Potenz und $n \geq 6$. Dann ist $D(n) > D(n+1)$ und daher $D(n) - D(n+1) > 0$.

Nachweis von Vermutung (1):
Vorweg: Es ist $V(n+1) = 1$, weil $n+1$ eine Primzahl oder eine Primzahl-Potenz ist, ferner ist $S(n+1) = S(n) + V(n+1) = S(n) + 1$ und $S(n) > n - 1$.

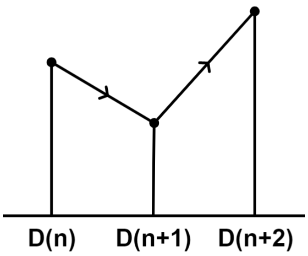
Dann gilt

$$\begin{aligned} D(n) - D(n+1) &= \frac{1}{n-1} S(n) - \frac{1}{n} S(n+1) \\ &= \frac{nS(n) - (n-1)S(n+1)}{(n-1)n} \\ &= \frac{S(n) - (n-1)}{(n-1)n}. \end{aligned}$$

Die in Vermutung (1) beschriebenen „Abstiege" in der Folge $D(n)$, mit $n = 2, 3, 4, \ldots$, von einem Element $D(n)$ zu seinem Nachfolger $D(n+1)$ wird oft wettgemacht durch einen darauf folgenden „Aufstieg" von $D(n+1)$ zu $D(n+2)$:

(2) Es sei $n+2$ weder eine Primzahl noch eine Primzahl-Potenz. Dann ist $D(n+1) < D(n+2)$ und daher $D(n+1) - D(n+2) < 0$, mit $n+1 \geq 1$.

Nachweis der Abschätzung (2):



$$\begin{aligned} &D(n+1) - D(n+2) \\ =&\frac{1}{n} S(n+1) - \frac{1}{n+1} S(n+2) \\ =&\frac{(n+1)(S(n+2) - V(n+2) - nS(n+2)}{n(n+1)} \\ =&\frac{S(n+2) + (n-1)V(n+2)}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

wegen $S(n+2) > n+1$ und $V(n+2) \geq 2$.

Bemerkung: Der Beweis von Abschätzung (2) verlangt nicht, dass $n+1$ eine Primzahl oder Primzahl-Potenz ist.

In der Tabelle oben ist $D(15) = 1{,}36$ das größte D-Element der Sequenz $D(2)$, $D(3)$, ..., $D(15)$. Eine Sequenz mit diesen Eigenschaften nennen wir abgeschlossen.

Beispiel 4: Abgeschlossene Sequenzen

Die Zahlen $D(6)$, $D(10)$, $D(12)$, $D(15)$ sind jeweils das größte Element einer abgeschlossenen Sequenz.

Bei jeder Fortsetzung der Tabelle oben zeigt sich, dass es immer wieder abgeschlossene Sequenzen in der Folge $D(n)$, mit $n = 2, 3, 4, \ldots$ gibt. Möglicherweise gilt daher die Vermutung

(3) Jede abgeschlossene Sequenz ist Anfangsstück einer längeren abgeschlossenen Sequenz (wir beweisen dies nicht).

Wenn „Abstiege" $D(n) > D(n+1)$ wie in der Abschätzung (2) vermutlich das Größerwerden der Folge der D-Werte im Sinne von Vermutung (3) nicht verhindern können, worauf auch die numerischen Ergebnisse in der zweiten Zeile der Tabelle unten hindeuten, so bremsen sie doch den Wachstumsprozess derart massiv, dass er gewissermaßen im Schneckentempo abläuft.

Wie überaus zeitlupenartig das Wachstum der Zahlen $D(n)$ abläuft, zeigt sich erst richtig, wenn man es mit dem als sehr langsam geltenden der harmonischen Folge 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, ..., $k(n) = 1+\frac{1}{2}+ ... +\frac{1}{n}$ vergleicht, siehe die nachfolgende Tabelle.

Beispiel 5: Vergleich von Wachstumsprozessen

n	10	20	100	10^8	$2{,}7 \cdot 10^8$	$1{,}5 \cdot 10^{43}$	10^{100}
D(n)	1,22	1,37	1,71	2,90			5,4
ln(n)	2,9		5,2		20	100	
ln(ln(n))	0,83	1,12	1,53	2,91			5,44

Die letzte Zeile der Tabelle gibt einen Hinweis, wie man den Wachstumsprozess der Folge $D(n)$, mit $n = 2, 3, 4, ...$, für große n möglicherweise näherungsweise beschreiben kann.

(4) Tatsächlich gilt:
für große n sind die Werte von $D(n)$ und $ln(ln(n))$ näherungsweise gleich.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 150

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Quersumme und -produkt

Ihr haltet gerade das Monoid-Heft 150 in den Händen.

Gebt jeweils die kleinste Zahl an,

a) deren Quersumme 150 ist.

b) deren Querprodukt (also das Produkt aller ihrer Ziffern) 150 ist.

(MG)

Lösung:

a) Es ist $150 = 16 \cdot 9 + 6$ ist. Die gesuchte Zahl beginnt also mit einer Ziffer 6 gefolgt von 16 Ziffern 9, also 69 999 999 999 999 999 (gelesen: 69 Billiarden 999 Billionen und so weiter).

b) Die Zahl 150 hat die Primfaktorzerlegung $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Daher hat die gesuchte Zahl die Ziffern 2, 3 und 5 oder Produkte dieser Zahlen. Da $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$ und $5 \cdot 5$ aber jeweils größer als 10 und daher keine Ziffern mehr sind, lässt sich lediglich mit dem Produkt $2 \cdot 3 = 6$ eine Stelle einsparen. Die kleinste Zahl mit dem Querprodukt 150 ist also 556.

II. Quersumme, Stellenanzahl und Ziffernanzahl

Die Zahl 2022 hat folgende Eigenschaften: Die Quersumme beträgt 6, die Anzahl der Stellen 4, die Anzahl der verschiedenen Ziffern 2.
Wie viele weitere (echte) Zahlen gibt es mit genau diesen Eigenschaften?
Anmerkung: „Echt“ heißt, dass nur die Zahl 6000, aber nicht 0600 zählen soll. (GS)

Lösung:
Mögliche Kombinationen der Quersumme 6 aus genau zwei Ziffern:

$6+0+0+0$:	6000					
$3+3+0+0$:	3300,	3030,	3003			
$3+1+1+1$:	3111,	1311,	1131,	1113		
$2+2+2+0$:	2220,	2202,	2022			
$2+2+1+1$:	2211,	2121,	2112,	1221,	1212,	1122

Es gibt also 17 solcher Zahlen.

III. Jahreszahlen und Ziffernanzahl

Die Jahreszahl 2022 hat nur zwei verschiedene Ziffern.

a) In welchem Jahr hat die Jahreszahl beim nächsten Mal vier verschiedene Ziffern, wann das nächste Mal wieder nur zwei verschiedene Ziffern?

b) Wie viele vierstellige Jahreszahlen* mit vier verschiedenen Ziffern gibt es?

c) Wie viele Jahreszahlen mit nur zwei verschiedenen Ziffern gibt es in diesem, also dem 21. Jahrhundert?
Hinweis: Das 21. Jahrhundert umfasst bekanntlich die Jahre 2001 bis 2100.

(MG)

Lösung:

a) Im Jahr 2031 hat die Jahreszahl das nächste Mal vier verschiedene Ziffern, im Jahr 2111 das nächste Mal nur zwei verschiedene Ziffern.

b) Für die erste Stelle (Tausenderstelle) kann jede Ziffer von 1 bis 9 ausgewählt werden, es gibt also neun Möglichkeiten.

* Die Zahlen sollen also keine führende Nullen haben.

Für die zweite Stelle können die Ziffern 0 bis 9 ausgewählt werden, allerdings nicht die Ziffer, die schon an der ersten Stelle steht. Es bleiben also wieder neun Ziffern.
Für die dritte und vierte Stelle kann wieder aus den Ziffern 0 bis 9 ausgewählt werden, jedoch nicht die schon verwendeten Ziffern der ersten beiden bzw. ersten drei Stellen. Es bleiben also acht bzw. sieben Ziffern zur Auswahl.
Somit gibt es insgesamt $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ verschiedene vierstellige Jahreszahlen mit vier verschiedenen Ziffern.

c) Die Jahreszahlen im 21. Jahrhundert beginnen entweder mit 20 oder mit 21, wobei die letzte mögliche Jahreszahl 2100 drei verschiedene Ziffern hat und somit ausscheidet.
Für die Jahreszahlen, die mit 20 beginnen sind die erlaubten Ziffern vorgeben, sodass auch die letzten beiden Stellen nur die Ziffern 0 oder 2 sein dürfen. Dies führt zu den Jahreszahlen 2002, 2020 und 2022.
Es gibt im 21. Jahrhundert also nur drei Jahreszahlen mit nur zwei verschiedenen Ziffern.

IV. LALL...

In der Gleichung

$$LALL - LAL + LAA - LAAA + A = 20$$

bezeichnen die Buchstaben L und A jeweils Ziffern.
Zeige: Es gibt genau ein Zahlenpaar L und A, für das die Gleichung gültig ist.
(HF)

Lösung:
Für die Einerziffer der Zahlen in der Gleichung gilt $L - L + A - A + A = 0 + 0 + A = A = 0$. Es ist also $A = 0$.
Damit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} L0LL - L0L + L00 - L000 + 0 &= 20 \\ \iff (1000L + 10L + L) - (100L + L) + 100L - 1000L &= 20 \\ \iff 10L &= 20. \end{aligned}$$

Also ist $L = 2$ und somit lautet die einzige mögliche Gleichung

$$2022 - 202 + 200 - 2000 + 0 = 20.$$

V. Eine Teilbarkeitsregel

Sei p eine Primzahl.
Zeige: Für alle $p > 3$ gilt entweder ist $p + 1$ oder $p - 1$ durch 6 teilbar.
(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:
Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
Teilbarkeit durch 2: Da alle $p > 2$ ungerade sind, ist sowohl $p+1$ als auch $p-1$ gerade bzw. durch 2 teilbar.
Teilbarkeit durch 3: Es handelt sich um drei aufeinanderfolgende Zahlen $p-1$, p, $p+1$, wobei p kein Vielfaches von 3 ist. Also muss eine der Zahlen $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar sein.
Insgesamt folgt: Der Vorgänger oder der Nachfolger ist durch 6 teilbar.

VI. Ein römisches Testament

Die folgende Aufgabe geht wohl zurück auf Salvius Julianus (ca. 110–170; genannt Julian der Jurist), der in seinem Hauptwerk Libri XC digestorum*, einer Sammlung realer und hypothetischer Rechtsfälle, die Grundlage für eine Systematik des römischen Rechts entwickelte.*
Ein reicher Römer legte in seinem Testament die Verteilung seines Besitzes auf seine Ehefrau und ihr noch ungeborenen Kind so fest: Falls ihm ein Sohn geboren wird, soll er doppelt so viel erben wie seine Mutter. Eine Tochter aber sollte nur halb so viel erhalten wie ihre Mutter. Was der Römer nicht bedacht hatte: Seine Ehefrau gebar Zwillinge,

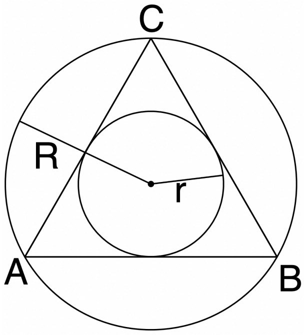
a) zwei Söhne.
b) einen Sohn und eine Tochter.

Wie war das Erbe aufzuteilen? (HF)

Lösung:
Der Besitz des Römers sei mit B, das Erbe seiner Frau mit F, eines Sohnes mit S und einer Tochter mit T bezeichnet.
Dann gilt: $S = 2F$ und $T = \frac{1}{2}F$.

a) Wegen $B = F + 2S = 5F$ sind $F = \frac{1}{5}B$ und $S = \frac{2}{5}B$.
b) Wegen $B = F + S + T = F + 2F + \frac{1}{2}F = \frac{7}{2}F$ sind $F = \frac{2}{7}B$ und $S = \frac{4}{7}B$ und $T = \frac{1}{7}B$.

VII. Ungleichungen am Dreieck



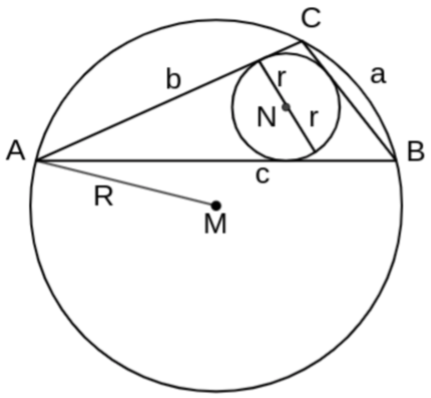
Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c. Ferner sei R der Radius des Umkreises und r der Radius des Inkreises von ABC.

Überprüfe die Ungleichungen:

$$r < \frac{a+b+c}{6} < R.$$

(HF)

Lösung:



M und N seien die Mittelpunkte des Umkreises und des Inkreises.

Aus $|AM| + |MB| \geq |AB|$ folgt $2R \geq c$. Ebenso gelten $2R \geq b$ und $2R \geq a$, wobei nur bei maximal einer der drei Ungleichungen auch Gleichheit bestehen kann.

$(*)$ Deshalb ist $6R > a + b + c$.

Es gilt: $2r < a$ und $2r < b$ sowie $2r < c$.

$(**)$ Daher ist $6r < a + b + c$.

Aus beiden Ungleichungen folgt insgesamt die Behauptung.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Dezember 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

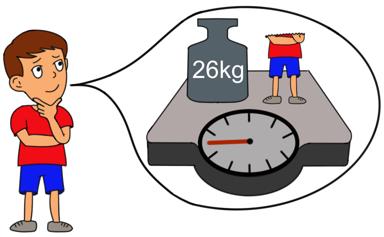
I. Jahreszahlen

Welche der Zahlen 2020, 2021, 2022, 2023 ist als eine Summe von vier aufeinander folgenden (natürlichen) Zahlen darstellbar?

II. Eine unerwartete Quersumme

Wie groß ist die Quersumme von $10^{226} - 3$? (H.F.)

III. Rätselhaftes Gewicht



Paul sagt: „Mein Gewicht beträgt 26 kg und die Hälfte meines Gewichts.“

Michael meint deshalb: „Du wiegst also $(26 + 13)\,\text{kg} = 39\,\text{kg}$.“

Hat Michael recht?

(HF)

IV. Ein Verteilungsproblem

Die Mühlenbesitzer A aus Mühlacker, B aus Mühlhausen und C aus Mühlbach erstehen auf einer Getreideauktion gemeinsam eine große Menge Roggen. Sie einigen sich auf folgende Methode der Aufteilung: Zunächst erhält A $\frac{2}{5}$ der Gesamtmenge, dann B $\frac{1}{3}$ der übrigen Menge und dann C die Hälfte des Restes. Diese Art des Teilens wird dann in gleicher Weise weitergeführt, das heißt A, B und C erhalten nacheinander jeweils $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ der jeweils noch verbleibenden Menge.

a) Wie viel Roggen geht nach Mühlacker?

b) Wie viel bekommt B, wie viel C?

(WJB)

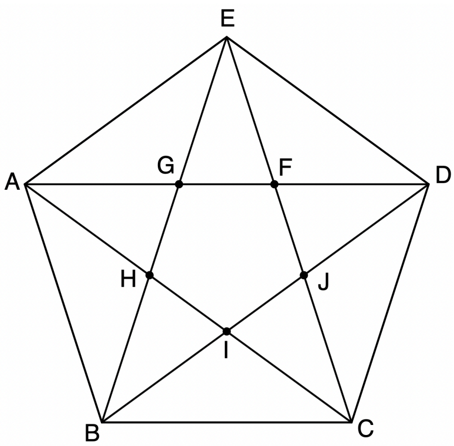
V. Vier Primzahlen

a) Zeige, dass es für $n \geq 1$ nie mehr als vier Primzahlen zwischen $12n$ und $12(n+1)$ gibt, genauer mit $12n < p < 12(n+1)$.

b) Finde zwei Beispiele, in denen es tatsächlich vier Primzahlen gibt, und ein Beispiel mit weniger als vier Primzahlen.

(WJB)

VI. Streckenlänge im regelmäßigen 5-Eck



Zeige, dass im regelmäßigen Fünfeck gilt:

$$|AE| = |AF|.$$

(GS)

VII. Zum Jahresende

$$\begin{array}{rr} & ABCD \\ & BCD \\ & CD \\ + & D \\ \hline & 2022 \end{array}$$

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern $\neq 0$ so, dass eine korrekte Addition entsteht – dabei sind verschiedene (gleiche) Buchstaben jeweils verschiedenen (gleichen) Ziffern zuzuordnen.

(H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Dezember 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1303: Sechsstellige Zahlen

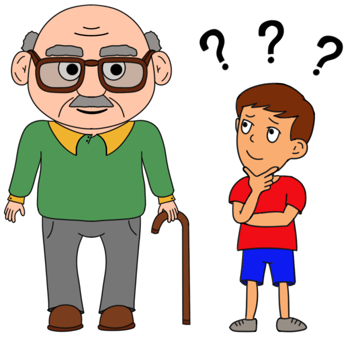
a) Wie viele sechsstellige Zahlen gibt es, in denen zwei Mal die Ziffer 1 und jede der Ziffern 2, 3, 5, 6 ein Mal vorkommt?

b) Wie viele dieser Zahlen sind kleiner als 121653?

c) Du würfelst sechs Mal und schreibst die gewürfelten Augenzahlen in der erwürfelten Reihenfolge hin. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die entstehende Zahl kleiner ist als 121653?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1304: Wie alt bin ich?



Einen Monat vor meinem letzten Geburtstag fragte mich ein Enkelkind nach meinem Alter. Ich gab ihm folgende Auskünfte über mein Alter in Monaten:

a) Mein Alter minus 2 ist nicht durch 3 teilbar.

b) Teilst du mein Alter durch 5, so ist der Rest kleiner als 3.

c) Teilst du es durch 7, so ist der Rest nicht 6.

d) Teilst du durch 8, so ist der Rest größer als 3.

e) Die Reste bei Division durch 5 und durch 8 sind verschieden.

Alle diese Auskünfte waren falsch. Wie alt bin ich in Jahren?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1305: Nullstellen zweier Polynome
Zeige:

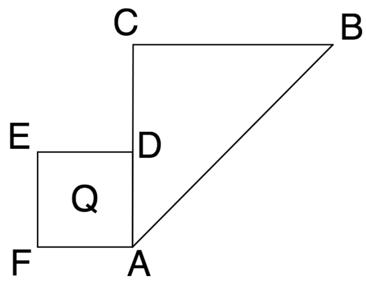
a) Ein Polynom P von Grad 78, dessen Koeffizienten alle ganzzahlig und vom Betrag echt kleiner als 40 und paarweise verschieden sind, hat mindestens eine Nullstelle.
b) Das Gleiche gilt für ein Polynom von Grad 79.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1306: Teilbarkeit durch 6
Zeige, dass $A_n = 12n^4 + n^3 + 6n^2 - n - 6$ für jedes n durch 6 teilbar ist.
(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1307: Kürzester Abstand

In der Figur ist $Q = ADEF$ ein Quadrat der Seitenlänge 1 und ABC ist ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck der Kantenlängen 3. Wie groß ist der Abstand der Punkte E und B?



(HF)

Aufgabe 1308: Folge von Gleichungen

$$6^2 - 3^2 = 3^3, 10^2 - 6^2 = 4^3, 15^2 - 10^2 = 5^3,$$

Errate, wie diese Folge von Gleichungen fortgeführt werden kann und beweise die Richtigkeit deiner Vermutung. (Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1309: Flächen im rechtwinkligen Dreieck
Bestimme im rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Seitenlängen 15, 20, 25 die Flächen F_1 und F_2 der Dreiecke ADC und DBC. (HF)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 150
Klassen 9–13

Aufgabe 1296: Kugeln und Jahreszahlen
Die Oberfläche A und das Volumen V einer Kugel seien ganzzahlige Vielfache von π. Wie groß ist dann der Radius r der kleinsten (der größten) Kugel, wenn für sie

$$A < 2022\pi < V$$

gelten soll?

Hinweis: Es ist $A = 4\pi r^2$ und $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. (HF)

Lösung:

Aus $A = 4\pi r^2 < 2022\pi$ folgt $r^2 < \frac{1}{4} \cdot 2022$, also $r \leq 22$.
Aus $V = \frac{4}{3}\pi r^3 > 2022\pi$ folgt $r^3 > \frac{3}{4} \cdot 2022$ und schließlich $r \geq 12$.
Somit gilt zunächst: $12 \leq r \leq 22$.
Damit $\frac{4}{3}r^3$ eine ganze Zahl ist, muss r ein Vielfaches von 3 sein also $r \in \{12, 15, 18, 21\}$.
Der Radius r der kleinsten Kugel ist somit 12, der Radius r der größten Kugel ist 21.

Aufgabe 1297: Gefärbte Strecken

In der Ebene seien n Punkte so verteilt, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Je zwei Punkte sind durch genau eine farbige Strecke verbunden, wobei genau fünf Farben benutzt wurden.

a) Wie viele Punkte sind gegeben, wenn sie durch 2043231 Strecken verbunden sind?

b) Wie viele gleich gefärbte Strecken gibt es mindestens?

(HF)

Lösung:

a) Da jede der n Punkte mit $n-1$ anderen Punkten verbunden ist, gilt für die Anzahl der Strecken* $\frac{1}{2}n(n-1) = 2043231$.
Die positive Lösung der quadratischen Gleichung $n^2 - n - 4086462 = 0$ ist $n = 2022$.

b) Man kann 2020 Strecken so färben, dass man fünf Gruppen mit $\frac{2020}{5} = 404$ Mitgliedern gleicher Farbe erhält. Die Mindestanzahl gleich gefärbter Strecken ist somit $404 + 1 = 405$.

Aufgabe 1298: Wo liegt der Fehler?

Es soll

$$x_n = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \Bigg\}, \quad n\text{-mal die } 2$$

berechnet werden.

Dazu überlege ich mir $x_{n+1} = 2^{x_n}$ und $x_{n+1} = {x_n}^2$. Also muss x_n Lösung der Gleichung $x^2 = 2^x$ sein. Ich überzeuge mich, dass diese Gleichung zwei Lösungen besitzt, nämlich $x = 2$ und $x = 4$. Demnach müsste für jedes n gelten $x_n = 2$ oder $x_n = 4$. Das kann aber nicht sein, es ist ja schon $x_3 = 2^{2^2} = 16$.

* Gibt man die Anzahl der Strecken mit $n(n-1)$ an, so hat man dabei jede Strecke – z.B. $\overline{AB}$ und $\overline{BA}$ – doppelt gezählt.

Wo liegt also mein Fehler? (Wolfgang J. Bühler, Diez)

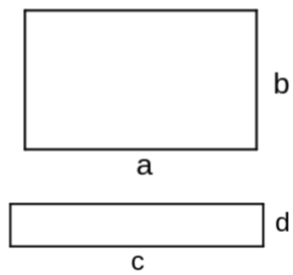
Lösung:

Mit $x_1 = 2$, $x_2 = 2^2 = 4$ und $x_3 = (2^2)^2 = 4^2 = 2^4 = 2^{(2^2)} = 16$ fängt alles richtig an, aber danach kommt man durch Klammern $\left(2^{2^{\cdot^{2}}}\right)^2 \neq 2^{\left(2^{2^{\cdot^{2}}}\right)}$ zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Aufgabe 1299: Treffen einander zwei Rechtecke

Finde zwei Rechtecke, deren Seitenlängen natürliche Zahlen sind, auf die dieser Dialog zutrifft. (Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:



R_1 sei das Rechteck mit den Seitenlängen a und b und dem doppelten Flächeninhalt:

R_2 sei das Rechteck mit den Seitenlängen c und d und dem doppelten Umfang:

Dann muss gelten:

(1) $ab = 2cd$

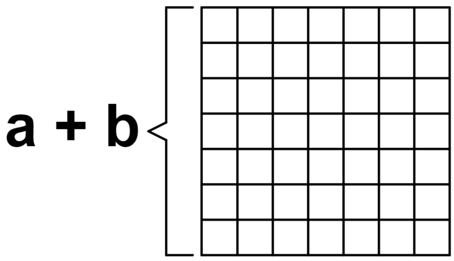
(2) $2(a + b) = c + d$

Isoliert man c in Gleichung (2) und setzt den gefundenen Term in Gleichung (1) ein, so entsteht folgende quadratische Gleichung:

(3) $d^2 - (2a + 2b)d + \frac{1}{2}ab = 0$

$$d_{\frac{1}{2}} = a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - \tfrac{1}{2}ab}$$

Betrachten wir nun die Diskriminante, sie muss eine Quadratzahl ergeben. Stellen wir uns die Quadratzahl $(a + b)^2$ graphisch dargestellt vor, so könnte sie folgendermaßen aussehen:



Würde man nun die obere Zeile und die rechte Spalte entfernen, so würde wieder eine Quadratzahl entstehen, nämlich $(a+b-1)^2$. Wäre also der rechte Term der Diskriminante $\frac{1}{2}ab = 2(a+b)-1$, so ergäbe sich eine Quadratzahl, durch Umformen ergibt sich.

$$a = \frac{4b-2}{b-4}.$$

Hier sieht man, dass $b=5$ eine Lösung ist (und $b=6$ auch).
Also ergeben sich

$a=18$	$b=5$	$c=1$	$d=45$	bzw.
$a=11$	$b=6$	$c=1$	$d=33$	als Lösungen.

Aufgabe 1300: Produkte, die keine Quadratzahlen sein können

Zeige die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

a) Ist p eine Primzahl, so kann

$$p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$$

keine Quadratzahl sein.

b) Ist n eine natürliche Zahl mit $n \leq 100$, so kann

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

keine Quadratzahl sein.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

a) Für $p=2$ und $p=3$ sind die Produkte $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$ und $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ jeweils durch 5 teilbar, aber nicht durch 5^2, da nur genau einer der Faktoren durch 5 teilbar ist. Daher können sie keine Quadratzahlen sein.**
Für Primzahlen $p \geq 5$ ist das Produkt $p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$ durch p teilbar, aber nicht durch p^2, da $p+4 < 2p < p^2$.

b) Für $1 \leq n \leq 4$ sind die Produkte $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ jeweils durch 5 teilbar, aber nicht durch 5^2, da nur genau einer der Faktoren durch 5 teilbar ist. Analog können wir uns überlegen, dass für $n=5$ das entsprechende Produkt durch 7, aber nicht durch 7^2 teilbar ist.

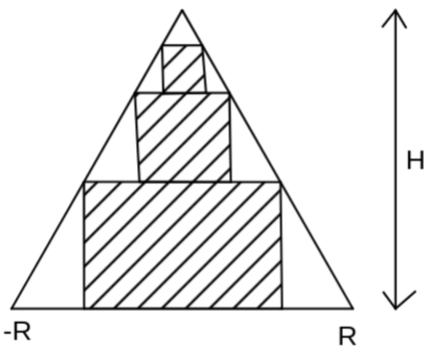
** Alternativ können wir auch die Produkte berechnen und sehen an $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$ und $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 2520$, dass sich keine Quadratzahlen ergeben.

Sei nun $6 \leq n \leq 100$. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Primzahlen unter 100 beträgt höchstens 6, mit einziger Ausnahme der Lücke zwischen den Primzahlen 89 und 97.
Wir betrachten nun zunächst den Bereich, in dem der Abstand zwischen zwei benachbarten Primzahlen höchstens 6 beträgt.
Es ist also $6 \leq n \leq 100$ oder $n + 5 \geq 97$, wobei letzteres äquivalent zu $n \geq 92$ ist. Dann ist mindestens eine der sechs aufeinanderfolgenden Zahlen n, $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$, $(n+4)$ und $(n+5)$ eine Primzahl und daher das Produkt der Zahlen durch diese Primzahl p teilbar aber nicht durch das Quadrat p^2 dieser Primzahl, denn wegen $6 \leq n \leq p$ und $p \leq n+5$ gilt $6 < p \leq n+5 < n+6 \leq 2n \leq 2p < p^2$.
Es bleiben noch die beiden Fälle $n = 90$ und $n = 91$. Die beiden Produkte $90 \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95$ und $91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96$ sind jeweils durch den Primfaktor 7 (als Teiler von 91) teilbar, aber nicht durch 7^2. Daher können diese Produkte ebenfalls keine Primzahlen sein.

(MG, nach WJB)

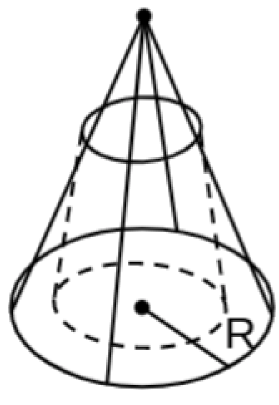
Aufgabe 1301: Turm

a) Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite $[-R, R]$ und Höhe H.



Über der mittleren Hälfte der Grundseite (also $[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$) wird ein Rechteck einbeschrieben. Das gleiche Verfahren wird im Dreieck über diesem Rechteck wiederholt und so weiter.
Bestimme die Fläche des so konstruierten „Turms“.

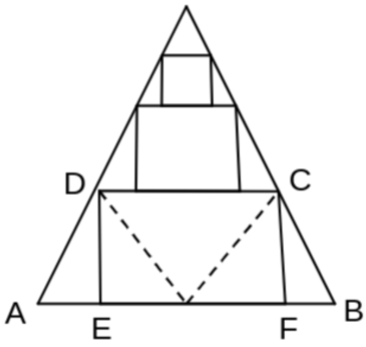
b) Ähnlich wie in Teil *a* konstruieren wir einen Turm in einem Kegel der Höhe H über einem Kreis mit Radius R, indem wir einen Zylinder mit Radius $\frac{R}{2}$ einbeschrieben und dieses Verfahren mit der Kegelspitze über diesem Zylinder wiederholen und so weiter.
Bestimme das Volumen des Turms.



(Wolfgang J. Bühler, Diez)

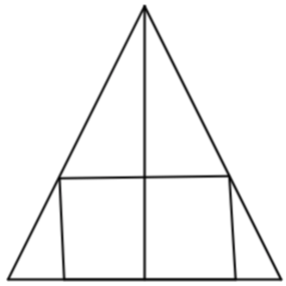
Lösung:

a) Betrachte die Abbildung mit den in der Lösung verwendeten Bezeichnungen.



Die beiden Dreiecke AED und FBC haben zusammen die halbe Fläche des Rechtecks $EFCD$. Das Rechteck hat $\frac{2}{3}$ der Fläche des Trapezes $ABCD$.
In jeder folgenden Schicht ist wieder die Rechtecksfläche $\frac{2}{3}$ der Fläche des zugehörigen Trapezes, das heißt, insgesamt ist die Fläche des Turms gleich $\frac{2}{3}$ der Dreiecksfläche, also gleich $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2RH = \frac{2}{3}RH$.

b) Wir betrachten den Querschnitt.



Daraus ist zu erkennen, dass die Höhe des untersten Zylinders gleich $h = \frac{H}{2}$ ist. Der oben verbleibende Kegel hat einen Grundkreis mit Radius $\frac{R}{2}$ und Höhe h.
Der unterste Zylinder hat das Volumen $Z = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{8}R^2H$.

Erste Lösung (ähnlich wie in Teil a)*:* Das Volumen S des Kegelstumpfs ist $S = K - K_0$, wobei K das Volumen des gesamten Kegels und K_0 das des oberen Kegels ist. Also gilt

$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 2h - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{3}R^2 h \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7\pi}{12}\right) R^2 h.$$

Somit ist $\frac{Z}{S} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$.
Also ist auch $T = \frac{3}{7}K = \frac{1}{7}\pi R^2 H$.

Zweite Lösung: Der obere Kegel (und entsprechend der darin enthaltene Teil des Turms) ist in allen drei Dimensionen halb so groß wie der Gesamtkegel. Also hat der dreidimensionale Turm $\frac{1}{8}$ des Volumens des Gesamtturmes, also ist $T = Z + \frac{1}{8}T$, woraus folgt $8T = 8Z + T$, also $T = \frac{8}{7}Z = \frac{8}{7}\left(\frac{\pi}{8}\right) R^2 H = \left(\frac{\pi}{7}\right) R^2 H$.
Dritte Lösung: Berechne das Volumen des Zylinders oberhalb des ersten. Es ergibt sich $Z_2 = \frac{1}{8}Z$ und daher

$$T = Z \left(1 + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + ...\right) = \frac{8}{7}Z.$$

Aufgabe 1302: Teiler-Anzahlen

Für welche Zahlen $z = 2^m \cdot 3^n$ mit $m \geq 1$ und $n \geq 1$ gilt: Die Anzahl der Teiler von z^3 ist fünfmal so groß wie die Anzahl der Teiler von z? (HF)

Lösung:

Die Anzahl der Teiler von $z = 2^m \cdot 3^n$ ist $(m+1)(n+1)$; die Anzahl der Teiler von $z^3 = 2^{3m} \cdot 3^{3n}$ ist $(3m+1)(3n+1)$.

Nach Voraussetzung gilt also

$$
\begin{aligned}
&(3m+1)(3n+1) = 5(m+1)(n+1)\\
\iff\ & 9mn + 3m + 3n + 1 = 5mn + 5m + 5n + 5\\
\iff\ & 4mn - 2m - 2n + 1 = 5\\
\iff\ & (2m-1)(2n-1) = 5
\end{aligned}
$$

Also sind $2m-1$ und $2n-1$ Teiler von 5.

Da 5 eine Primzahl ist, muss $2m-1 = 1$ und dann $2n-1 = 5$ oder $2m-1 = 5$ und dann $2n-1 = 1$ sein. Also sind $m = 1$ und $n = 3$ oder $m = 3$ und $n = 1$, sodass $z = 2^1 \cdot 3^3 = 54$ oder $z = 2^3 \cdot 3^1 = 48$ gilt.

Mathematische Entdeckungen

Läuferecke 2

Im MONOID-Heft 149 habe ich Euch das Läuferecke-Problem vorgestellt. Dabei geht ein Läufer in einem $n \times m$-Feld auf den schwarzen Feldern beginnend in der Ecke 0 bis er wieder in einer Ecke landet, siehe Abbildung 1 für $n = 7$ und $m = 5$.

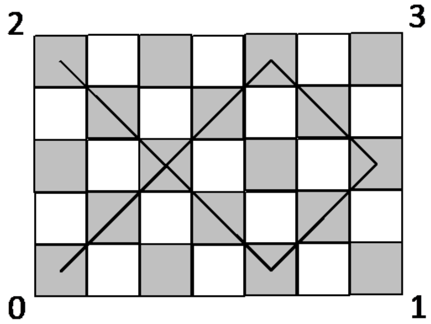
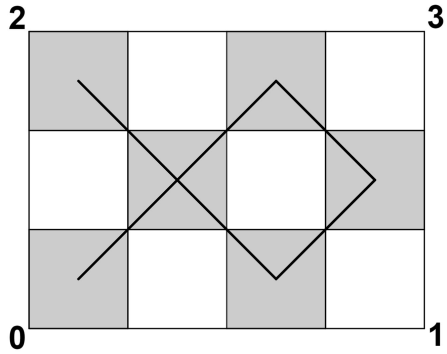


Abbildung 1: Die Läuferzüge im 7×5-Feld

Bei dem Problem gibt es aber noch mehr zu entdecken. Sei $\nu_2(n, m)$ die Anzahl der Schritte von der Startecke bis zur Zielecke. Aus Abbildung 1 sehen wir $\nu_2(7, 5) = 12$.

a) Finde eine Formel zur Berechnung von $\nu_2(n, m)$. Stelle dir dazu vor, dass man von den Kästchen am Rand des Schachbretts jeweils die Hälfte abschneidet. Man erhält ein Rechteck der Größe $(n-1) \times (m-1)$, in dem sich der Läufer wie eine Billard-Kugel bewegt. Wenn man diese Rechtecke unendlich oft passend aneinander legt und die Kugel an einer Randkante einfach geradeaus weiterlaufen lässt, so bewegt sich die Kugel in der Ebene entlang der Winkelhalbierenden. Wann kommt sie dann wieder in eine Ecke?

b) Wir können den Läufer auch in einem beliebigen anderen schwarzen Feld starten lassen. Landet er nicht in einer Ecke, so landet er wieder in seinem Startfeld. Benutze die Methode aus Aufgabe 1, um die Anzahl Schritte zu bestimmen, die er dann zurückgelegt hat.
In Abbildung läuft der Läufer „genauso" wie in Abbildung 1.



Die Läuferzüge im 4×3-Feld

c) Wann könnt Ihr Felder verkleinern und der Läufer läuft genauso? Wie verhalten sich die Funktionen λ_2 und ν_2 unter dieser Verkleinerung?

(Stephan Rosebrock, Pädagogische Hochschule Karlsruhe)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Dezember 2022 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 149

Im Heft 149 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

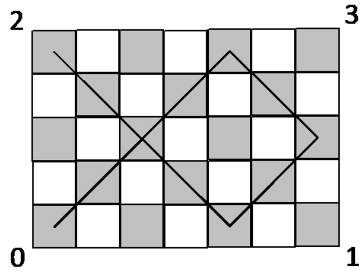
Bei meiner Mutter im Bad liegt ein Teppich wie im Bild.

Man kann sich fragen: Wenn ein Läufer in der linken unteren Ecke startet, wo landet er, wenn er an den Wänden wie eine Billardkugel abprallt?

Genauer: Ein Läufer kann auf einem Schachbrett nur diagonal ziehen. Ist ein Läufer also auf einem schwarzen Feld, bleibt er auf schwarz. Gegeben sei ein Schachbrett mit Kantenlängen $n > 1$ und $m > 1$ und ein Läufer in der linken unteren Ecke.

Diese Startecke bekomme die Bezeichnung 0 und die sei im Folgenden grundsätzlich schwarz. Entgegen dem Uhrzeigersinn sollen die Ecken 0, 1, 3, 2 heißen (siehe Abbildung 2).

Wir lassen den Läufer in der Startecke starten und soweit laufen, bis er an eine Randkante stößt. Dort verlässt er mit der anderen möglichen Richtung die Kante wieder, bis er an die nächste Kante stößt, und so weiter (siehe nebenstehende für das 7×5-Feld). Das Ganze endet in einer Ecke.



Sei $\lambda_2(n, m)$ die Ecke in der er landet. Aus Abbildung 2 entnehmen wir, dass: $\lambda_2(7, 5) = 2$. Zeichne Dir auf Karopapier den Weg des Läufers im $n \times m$-Feld für einige Paare (n, m).

Untersuche die folgenden Eigenschaften:

a) Was ist $\lambda_2(n, n)$?

b) Der Läufer endet nie in der Ecke 0. Warum?

c) Finde eine Symmetrie, also einen Zusammenhang von $\lambda_2(n, m)$ mit $\lambda_2(m, n)$.

d) Welchen Wert hat $\lambda_2(n, m)$ wenn n und m gerade sind? In welchen Fällen ist die Bestimmung von $\lambda_2(n, m)$ noch einfach?

e) Bestimme die Eckennummer, in der der Läufer landet, in Abhängigkeit davon, wie oft der Läufer die Wände oben/unten und rechts/links trifft, bevor er in seiner Ecke landet.

(Stephan Rosebrock, Pädagogische Hochschule Karlsruhe)

Lösung

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Jasmin Borrmann (Gymnasium Oberursel, Kl. 7), Paulina Herber, Josefine Kaßner (beide Gymnasium Oberusel, Kl. 12), Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, Kl. 9).

a) Alle, die Lösungen einschickten, fanden hier die richtige Lösung: Ein $n \times n$ – Feld ist ein Quadrat. Der Läufer läuft in die gegenüberliegende Ecke, also in die Ecke 3.

b) Auch hier haben alle den Grund gesehen: Josefine Kaßner schreibt zum Beispiel: Es gibt nur genau eine Route, die zur Ecke 0 führt und das ist die, die der Läufer anfangs andersrum gelaufen ist. Um zur Ecke 0 zurückzukehren, muss er also „umdrehen“, das geht nur über eine Ecke. Da endet aber der Läufer.

c) Auch hier haben alle gesehen: Das $n \times m$-Feld lässt sich durch Spiegeln in das $m \times n$-Feld überführen. Auch der Weg des Läufers wird dabei mitgespiegelt. Die Eckennummern werden aber nicht gespiegelt. Deshalb gilt:

$$\lambda_2(m,n) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \lambda_2(n,m) = 2 \\ 2 & \textit{falls} \quad \lambda_2(n,m) = 1 \\ 3 & \textit{falls} \quad \lambda_2(n,m) = 3. \end{cases}.$$

d) Fast alle eingesandten Lösungen sahen: Sind n, m gerade, dann ist, außer der Ecke 0, nur die Ecke 3 schwarz und deshalb muss der Läufer dort landen. Ist n gerade und m ungerade ist nur die Ecke 2 schwarz und für n ungerade und m gerade ist nur die Ecke 1 schwarz.

e) Dieser Aufgabenteil war am schwersten, aber auch hier gab es schöne Lösungen. Zum Beispiel schreibt Oscar Su: Die Differenz von der Anzahl der Treffen an der rechten Wand (r) und der linken Wand (l) ist 0 oder 1. Analoges für Treffen oben (o) und unten (u). Er folgert daraus:

- $o - u = 1$ und $r - l = 0$: der Läufer landet in 1,
- $o - u = 0$ und $r - l = 1$: der Läufer landet in 2,
- $o - u = 0$ und $r - l = 0$: der Läufer landet in 3.

Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 2022
Runde 2

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, die die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$ab + dc = 8, \tag{1.1}$$

$$abdc = 8 + a + b + c + d. \tag{1.2}$$

Lösung

Behauptung: Das Quadrupel $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$ ist das einzige, das die beiden Gleichungen (1.1) und (1.2) erfüllt.

Beweis: Das Quadrupel $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$ positiver reeller Zahlen erfüllt wegen $ab = cd = 4$, $a + b + c + d = 8$ und $4^2 = 16 = 8 + 8$ beide Gleichungen (1.1) und (1.2). Wir zeigen nun, dass dieses Quadrupel die einzige Lösung ist.

Für nichtnegative reelle Zahlen x, y gilt wegen $0 \leq \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2 \cdot \sqrt{xy}$, dass

$$x + y \geq 2 \cdot \sqrt{xy} \text{ und } x + y = 2 \cdot \sqrt{xy} \Leftrightarrow x = y \tag{1.3}$$

(Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel). Wegen $a, b, c, d > 0$, lassen sich aus (1.1) bzw. (1.2) mit einmaliger bzw. zweimaliger Anwendung von (1.3) die folgenden Ungleichungen ableiten

$$8 = ab + cd \geq 2 \cdot \sqrt{abcd} \Leftrightarrow \sqrt{abcd} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt[4]{abcd} \leq 2, \tag{1.4}$$

$$abcd = 8 + a + b + c + d \geq 8 + 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right) \geq 8 + 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}. \tag{1.5}$$

Aus (1.4) und (1.5) schließen wir

$$0 \leq 8 - 4 \cdot \sqrt[4]{abcd} \leq abcd - 8 \cdot \sqrt[4]{abcd} \Leftrightarrow 8 \leq (\sqrt[4]{abcd})^3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt[4]{abcd}$$

zusammen mit (1.4) folgt weiter, dass

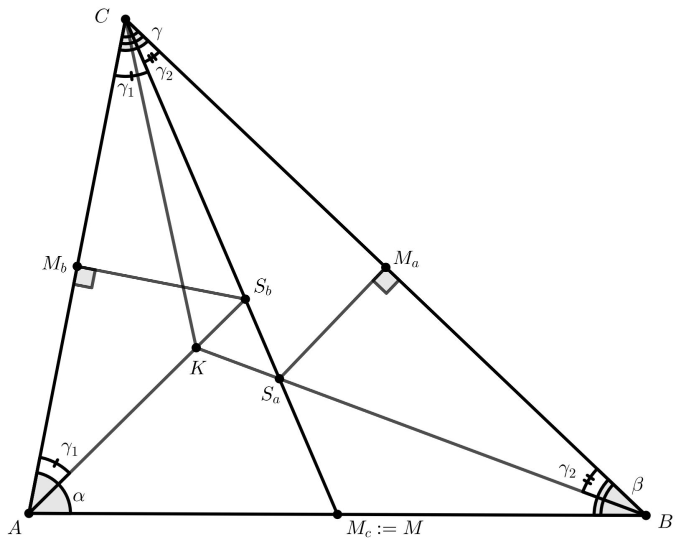
$$\sqrt[4]{abcd} = 2 \tag{1.6}$$

und damit Gleichheit in allen Ungleichungen von (1.4) und (1.5) gelten muss. Daraus folgt nach (1.3) $a = b, c = d$ und $a^2 = ab = cd = c^2$, also $a = b = c = d = 2$ wegen (1.6).
Das beweist die Behauptung der Aufgabe. □

Aufgabe 3

Im spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AC} < \overline{BC}$ seien m_a und m_b die Mittelsenkrechten auf den Seiten BC bzw. AC, ferner M_c der Mittelpunkt der Seite AB. Die Seitenhalbierende CM_c schneide m_a im Punkt S_a und m_b im Punkt S_b; die Geraden AS_b und BS_b schneiden sich im Punkt K.
Beweise $\sphericalangle ACM_c = \sphericalangle KCB$.

Vorbemerkung: Wie in der Skizze führen wir zusätzlich diese Bezeichnungen ein: M_a, M_b seien die Fußpunkte der Mittelsenkrechten m_a, m_b; den Mittelpunkt M_c von AB kürzen wir mit M ab. Die Winkel im Dreieck $\triangle ABC$ bezeichnen wir mit $\alpha := \sphericalangle BAC, \beta := \sphericalangle CBA$ sowie $\gamma_1 := \sphericalangle ACM$, $\gamma_2 := \sphericalangle MCB$ und $\gamma := \sphericalangle ACB = \gamma_1 + \gamma_2$.



Aus dem Sinussatz in dem Dreiecken $\triangle AMC$ bzw. $\triangle MBC$ folgt $\overline{AM} : \sin\gamma_1 = \overline{CM} : \sin\alpha$ bzw. $\overline{CM} : \sin\beta = \overline{BM} : \sin\gamma_2$, also zusammen mit dem Sinussatz im Dreieck $\triangle ABC$ und der Voraussetzung $\overline{AC} < \overline{BC}$ schließlich

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} > 1. \tag{3.1}$$

Die äußere Ungleichung ist wegen $0^\circ < \gamma_1, \gamma_2 < 90^\circ$ äquivalent zu $\gamma_2 < \gamma_1$.
In den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle S_bCM_b$ bzw. CS_aM_a ist $\overline{CS_b} \cdot \cos\gamma_1 = \overline{M_bC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$ bzw. $\overline{CS_a} \cdot \cos\gamma_2 = \overline{M_aC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$. Zusammen mit (3.1) folgt hieraus

$$\frac{\overline{CS_a}}{\overline{CS_b}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2} = \frac{\sin(2\gamma_1)}{\sin(2\gamma_2)} > 1, \tag{3.2}$$

wobei die Ungleichung nutzt, dass $2\gamma_2 < 2\gamma_1$ nach (3.1) und $2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 2\gamma < 180^\circ$ im spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$. Die Punkte C, S_b, S_a, M liegen also in dieser Reihenfolge auf der Seitenhalbierenden CM. Damit folgt nach Konstruktion der Aufgabenstellung auch, dass die Punkte K, B in unterschiedlichen Halbebenen bezüglich der Geraden (CM) liegen.

Erster Beweis (Winkeljagd in den Dreiecken $\triangle BCK, \triangle CAK$)
Die Dreiecke $\triangle CAS_b$ bzw. $\triangle BCS_b$ sind nach Konstruktion achsensymmetrische, also gleichschenklige Dreiecke, für deren Basiswinkel demnach die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sphericalangle KAC &= \sphericalangle S_bAC = \sphericalangle ACS_b = \sphericalangle ACM = \gamma_1, \qquad (3.3)\\ \sphericalangle CBK &= \sphericalangle CBS_a = \sphericalangle S_aCB = \sphericalangle MCB = \gamma_2 \end{aligned}$$

gelten. Damit lassen sich mit den Bezeichnungen und Überlegungen der Vorbemerkung die Gleichungen aus (3.1) mit den Sinussätzen in den Dreiecken $\triangle CAK$, $\triangle BCK$ fortführen zu

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CK}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{AC}} = \frac{\sin\sphericalangle BKC}{\sin\sphericalangle CBK} \cdot \frac{\sin\sphericalangle KAC}{\sin\sphericalangle CKA} = \frac{\sin\sphericalangle BKC}{\sin\sphericalangle CKA} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Die Gleichungskette besagt nach Kürzen des Faktors $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, dass $\sin\sphericalangle BKC = \sin\sphericalangle CKA$ und weil $0 < \sphericalangle BCK, \sphericalangle CKA < 180^\circ$ mit $\sphericalangle BKC + \sphericalangle CKA = 360^\circ - \sphericalangle AKB > 180^\circ$, folgt hieraus $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CKA$: Die Winkel mit Scheitel K in den Dreiecken $\triangle BCK, \triangle CAK$ sind gleich groß! Die Summe der beiden jeweils anderen Winkel stimmt dann auch überein,

$$\sphericalangle CBK + \sphericalangle KCB = 180^\circ - \sphericalangle BKC = 180^\circ - \sphericalangle CKA = \sphericalangle ACK + \sphericalangle KAC; \tag{3.4}$$

außerdem ist nach den Beziehungen (3.3) die Winkelumme

$$\sphericalangle KAC + \sphericalangle CBK = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACK + \sphericalangle KCB. \tag{3.5}$$

Aus (3.4) und (3.5) schließen wir

$$\begin{aligned} \sphericalangle KCB - \sphericalangle KAC &= \sphericalangle KCB + \sphericalangle CBK - (\sphericalangle KAC + \sphericalangle CBK)\\ &= \sphericalangle ACK + \sphericalangle KAC - (\sphericalangle ACK + \sphericalangle KCB)\\ &= \sphericalangle KAC - \sphericalangle KCB, \end{aligned}$$

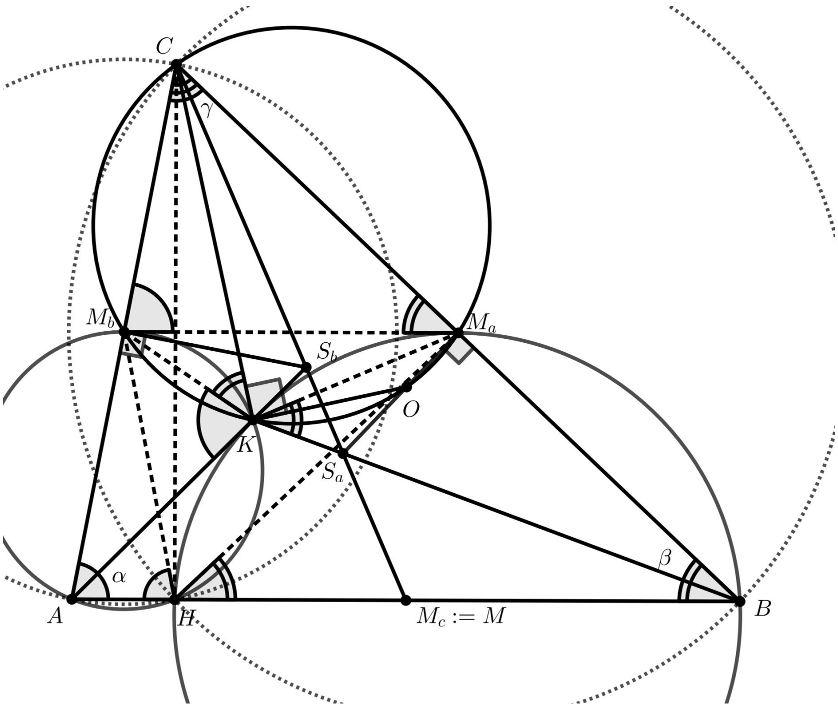
und $\sphericalangle KCB - \sphericalangle KAC = \sphericalangle KAC - \sphericalangle KCB$ ist äquivalent zu $\sphericalangle KCB = \sphericalangle KAC$.

Mit (3.3) folgt

$$\sphericalangle KCB = \sphericalangle KAC = \gamma_1 = \sphericalangle AMC, \tag{3.6}$$

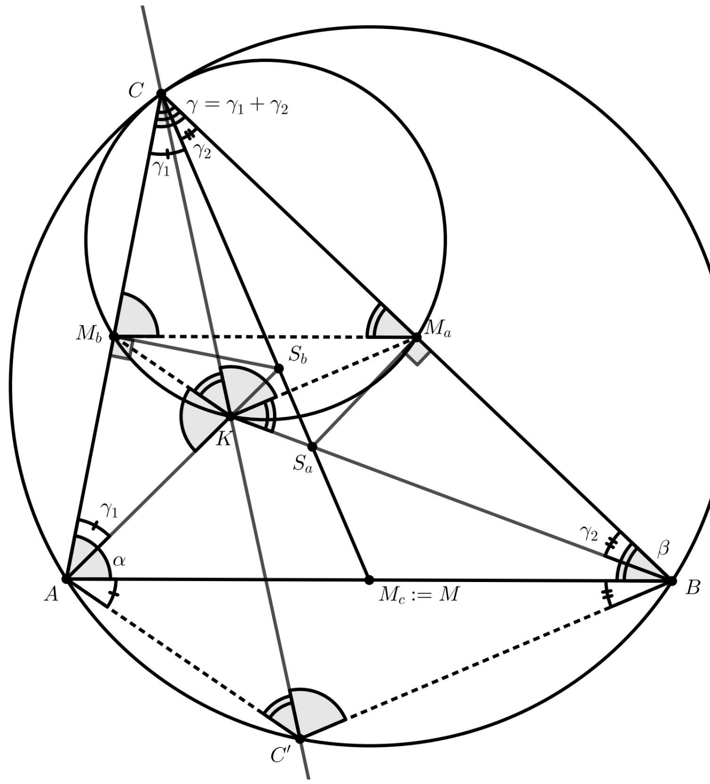
und das beweist die Behauptung der Aufgabe. $\square$

Bemerkungen: Der Beweis zeigt, dass die Dreiecke $\triangle BCK, \triangle CAK$ ähnlich sind ($W : W : W$) mit $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CKA = 180° - \gamma_1 - \gamma_2 = \alpha + \beta$. Wegen $\overline{BM_a} : \overline{CM_b} = \overline{BC} : \overline{AC}$ sind auch die Dreiecke $\triangle BM_aK, \triangle CM_bK$ ähnlich ($S : W : S$) mit $\sphericalangle KM_BC = \sphericalangle KM_aB = 180° - \sphericalangle CM_aK$.
Also ist $\square M_bKM_aC$ ein Sehnenviereck im Umkreis des Dreiecks $\triangle M_bM_aC$, auf dem auch der Umkreismittelpunkt O des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt. Im Sehnenviereck $\square KOM_aC$ schließen wir $\sphericalangle OKC = 180° - \sphericalangle CM_aO = 90°$. Weil $M_aM_b \parallel AB$, folgt zusammen mit dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel $\alpha = \sphericalangle M_aM_bC = \sphericalangle M_aKC$ und $\beta = \sphericalangle CM_aM_b = \sphericalangle CKM_b$, also $\sphericalangle M_bKA = \sphericalangle CKA - \sphericalangle CKM_b = \alpha$ und $\sphericalangle BKM_a = \beta$. Aus diesen Überlegungen können wir auch folgern: Wird im Dreieck $\triangle ABC$ der Fußpunkt der Höhe durch C auf AB mit H bezeichnet, dann schneiden sich die Umkreise der Dreiecke $\triangle M_bAH, \triangle BM_aH$ sowohl im Punkt H als auch im Punkt K; siehe nächste Skizze.



Ist C' der Schnittpunkt von (CK) mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, siehe nachfolgende Skizze (Seite 39), so folgt aus dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel $\sphericalangle BC'C = \sphericalangle BAC = \alpha, \sphericalangle CC'A = \sphericalangle CBA = \beta$ und nach dem vorstehenden Beweis $\sphericalangle C'AB = \sphericalangle C'CB = \gamma_1, \sphericalangle ABC' = \sphericalangle ACC' = \gamma_2$. Damit sind die Dreiecke $\triangle AC'K, \triangle C'BK$ ähnlich zueinander (Ähnlichkeitssatz W:W:W), also $\overline{AK} : \overline{C'K} = \overline{C'K} : \overline{BK}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle BCK, \triangle CAK$ folgt $\overline{KC} : \overline{BK} = \overline{AK} : \overline{KC}$, zusammen $\overline{C'K}^2 = \overline{AK} \cdot \overline{BK} = \overline{KC}^2$, also

$\overline{C'K} = \overline{KC}$: Der Punkt K halbiert also die zugehörige Sehne CC'.

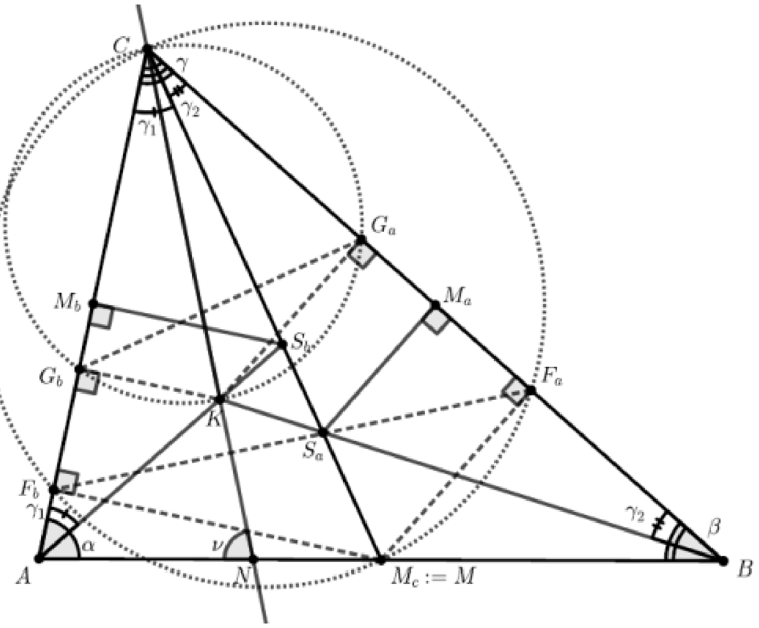


Die Beziehung in (3.6) bedeutet gerade, dass

$$\sphericalangle ACK = \sphericalangle ACB - \sphericalangle KCB = \gamma - \gamma_1 = \gamma_2 = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB,$$

das heißt, die Geraden (CK) und die Seitenhalbierende (CM) gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch C in $\triangle ABC$ ineinander über, (CK) ist damit der sogenannte *Symmedian* durch C im Dreieck $\triangle ABC$. Entsprechend kann man Symmediane in $\triangle ABC$ definieren, die durch A, B verlaufen. Die drei Symmediane schneiden sich im sogenannten Lemoine-Punkt; siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Symmediane`. Die Bemerkung nach dem dritten Beweis zeigt mittels des Tangentendreiecks auf, wie die drei Symmediane und der Lemoine-Punkt in einem spitzwinkligen Dreieck alternativ konstruiert werden können.

Zweiter Beweis (Winkelhalbierendensatz im Dreieck $\triangle ABK$)
Wie in der Skizze seien G_a bzw. G_b die Fußpunkte der Senkrechten durch K auf die Seiten BC bzw. AC , N sei der Schnittpunkt der Geraden (CK) mit der Seite AB . Es sei $\nu := \sphericalangle KNA$. Nach Konstruktion sind die Dreiecke $\triangle CAS_b$ bzw. $\triangle BCS_a$ achsensymmetrisch, also gleichschenklig, mit $\sphericalangle S_bAC = \sphericalangle ACS_b = \sphericalangle ACM = \gamma_1$ und $\sphericalangle BAK = \alpha - \gamma_1$ bzw. $\sphericalangle CBS_a = \sphericalangle S_aCB = \sphericalangle MCB = \gamma_2$ und $\sphericalangle KBA = \beta - \gamma_2$.



Damit können wir

$$\sphericalangle AKB = 180^\circ - \sphericalangle BAK - \sphericalangle KBA = 180^\circ - (\alpha + \beta) + \gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma \quad (3.7)$$

schließen. Wir zeigen, dass KN den Winkel $\sphericalangle AKB$ im Dreieck $\triangle ABK$ halbiert; das ist äquivalent zum Nachweis von $\overline{AN} : \overline{BN} = \overline{AK} : \overline{BK}$ (Winkelhalbierendensatz).
Wir formulieren die Gleichung in (3,1) um zu

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} \cdot \sin \gamma_1}{\overline{BC} \cdot \sin \gamma_2} = 1. \quad (3.8)$$

Wir nutzen nun, dass $\overline{AN} : \overline{BN}$ das Verhältnis der Grundflächen der Dreiecke $\triangle ANC$, $\triangle NBC$ bzw. $\triangle ANK$, $\triangle NBK$ ist, die jeweils dieselbe Höhe durch C bzw. K haben, also $\overline{AN} : \overline{BN} = |\triangle ANC| : |\triangle NBC| = |\triangle ANK| : |\triangle NBK|$.
Damit können wir schließen, dass

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AN} \cdot (\overline{NC} - \overline{NK}) \cdot \sin \nu}{\overline{BN} \cdot (\overline{NC} - \overline{NK}) \cdot \sin (180 - \nu)} = \frac{|\triangle ANC| - |\triangle ANK|}{|\triangle NBC| - |\triangle NBK|}$$

$$= \frac{|\triangle CAK|}{|\triangle BCK|} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{KG_b}}{\overline{BC} \cdot \overline{KG_a}}, \quad (3.9)$$

wobei die letzte Gleichung in (3.9) benutzt, dass die Strecken KG_b bzw. KG_a nach Konstruktion Höhen in den Dreiecken $\triangle CAK$ bzw. $\triangle BCK$ durch K sind. In den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle AKG_b$ bzw. $\triangle KBG_a$ gilt $\sphericalangle KAG_b = \sphericalangle S_bAC = \gamma_1$ bzw. $\sphericalangle G_aBK = \sphericalangle CBS_a = \gamma_2$, also $\frac{\overline{KG_b}}{\overline{KG_a}} = \frac{\overline{AK} \cdot \sin \gamma_1}{\overline{BK} \cdot \sin \gamma_2}$. Damit folgt aus (3.9) mit der Beziehung rechts in (3.8), dass

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{KG_b}}{\overline{BC} \cdot \overline{KG_a}} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin \gamma_1}{\overline{BC} \cdot \sin \gamma_2} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BK}},$$

also nach dem Winkelhalbierendensatz und (3.7), dass $\sphericalangle AKN = \sphericalangle NKB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AKB = \gamma$.
Damit ist $\sphericalangle BNK = \alpha - \gamma_1 + \gamma = \sphericalangle BNC$, und im Dreieck $\triangle NBC$

$$\sphericalangle KCB = \sphericalangle NCB = 180^\circ - \sphericalangle CBN - \sphericalangle BNC = 180^\circ - \beta - \alpha - \gamma + \gamma_1 = \gamma_1 = \sphericalangle ACM; \tag{3.10}$$

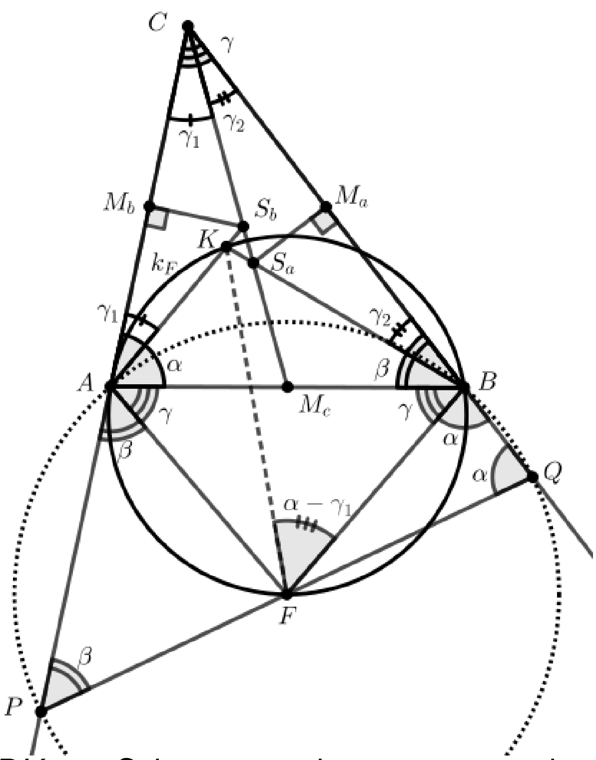
das beweist die Behauptung der Aufgabe. □

Bemerkung: Der Beweis besagt $\sphericalangle ACN = \gamma_2$, $\sphericalangle NCB = \gamma_1$, also folgt mit dem Sinussatz in den Dreiecken $\triangle ANC$ bzw. $\triangle NBC$ und mit (3.8)

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin \gamma_2}{\sin \nu} \cdot \frac{\sin(180^\circ - \nu)}{\overline{BC} \cdot \sin \gamma_1} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin \gamma_2}{\overline{BC} \cdot \sin \gamma_1} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}.$$

Tatsächlich ist die Aussage $\overline{AN} : \overline{BN} = \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ äquivalent zum Nachweis von (3.10). Denn aus (3.9) folgt unter dieser Vorraussetzung $\overline{KG_b} : \overline{KG_a} = \overline{AC} : \overline{BC}$, und wenn F_a bzw. F_b die Fußpunkte der Senkrechten durch $M_c = M$ auf die Seiten BC bzw. AC des Dreiecks $\triangle ABC$ sind, so folgt aus $|\triangle AMC| = |\triangle MBC|$, dass $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{MF_a} : \overline{MF_b}$. In den Sehnenvierecken $\square G_bKG_aC$, $\square F_bMF_aC$ gilt $\sphericalangle F_aMF_b = 180^\circ - \gamma = \sphericalangle G_aKG_b$. Also sind die Dreiecke $\triangle G_aG_bK$, $\triangle F_aF_bM$ ähnlich (S:W:S). Es folgt $\sphericalangle KCB = \sphericalangle KG_bG_a = \sphericalangle F_bF_aM = \sphericalangle ACM$.

Dritter Beweis (Antiparallele zu AB): Die Dreiecke $\triangle CAS_b$ bzw. $\triangle BCs_a$ sind achsensymmetrisch, also gleichschenklig, mit Basiswinkeln $\sphericalangle ACS_b = \sphericalangle S_bAC = \gamma_1$ und $BAK = \alpha - \gamma_1$ bzw. $\sphericalangle S_aCB = \sphericalangle CBS_a = \gamma_2$ und $\sphericalangle KBA = \beta - \gamma_2$. Über die Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABK$ können wir schließen, dass $\sphericalangle AKB = 180^\circ - \alpha - \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma$. Wir errichten über AB wie in der Sizze eine gleichschenkliges Dreieck $\triangle BAF$ mit Basiswinkeln $\sphericalangle FAB = \sphericalangle ABF = \gamma$.



Weil damit $\sphericalangle BFA = 180^\circ - 2\gamma$, ist $\square AFBK$ ein Sehnenviereck; wir nennen den zugehörigen Umkreis k_F. Aus dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel in k_F folgt weitergehend $\sphericalangle AKF = \sphericalangle ABF = \gamma$. Wir verlängern die Seiten AC und BC von $\triangle ABC$ durch Strahlen $[CA$ und $[CB$. Der Kreis um F mit dem Radius $\overline{AF} = \overline{FB}$ möge (AC) neben A auch in P und (BC) neben B auch in Q

schneiden; siehe Skizze.

Die Dreiecke $\triangle APF$ bzw. $\triangle QBF$ sind gleichschenklig mit $\sphericalangle FPA = \sphericalangle PAF = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = \beta$ bzw. $\sphericalangle BQF = \sphericalangle FBQ = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha$. Der Punkt F liegt damit auf der Geraden (PQ), denn

$$\sphericalangle QFP = \sphericalangle AFP + \sphericalangle BFA + \sphericalangle QFB = 3 \cdot 180^\circ - (2\beta + 2\gamma + 2\alpha) = 180^\circ.$$

(Zwei Geraden wie (AB), (PQ) mit $\sphericalangle QPC = \beta = \sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle CQP = \alpha = \sphericalangle BAC$ werden *antiparallel* genannt.) Damit sind die Dreiecke $\triangle PQC$ und $\triangle ABC$ ähnlich, weil sie in drei Winkeln übereinstimmen (Ähnlichkeitssatz WWW).

Weil F nach Konstruktion der Mittelpunkt der Strecke PQ und M_c der Mittelpunkt der Strecke AB sind, sind auch Dreiecke $\triangle FQC$ und $\triangle AM_cC$ ähnlich wegen $\overline{FQ} : \overline{AM_c} = \overline{PQ} : \overline{AB} = \overline{CQ} : \overline{AC}$ (S:W:S), insbesondere

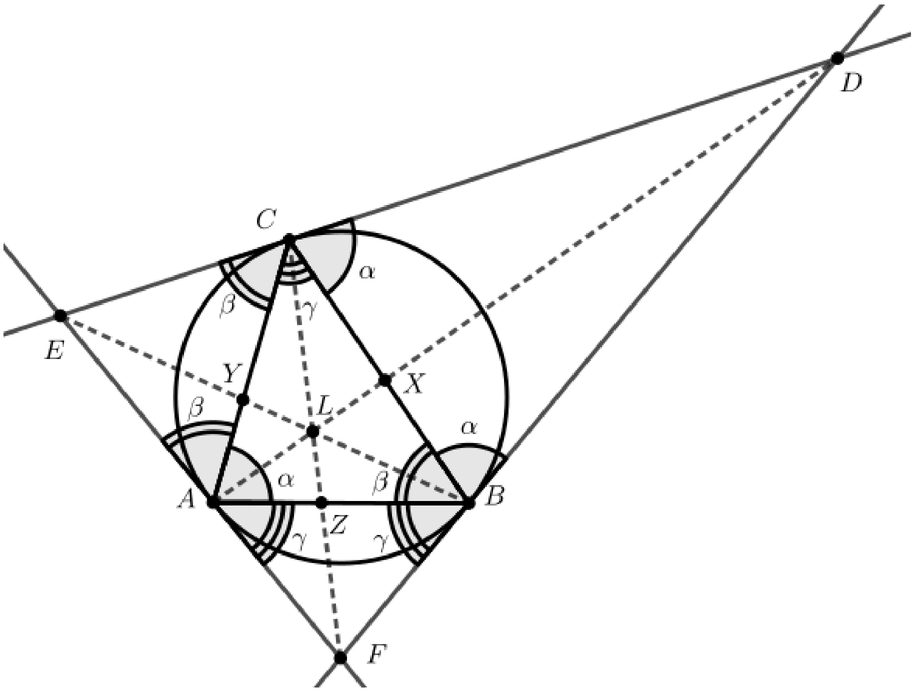
$$\sphericalangle ACM_c = \sphericalangle FCQ = \sphericalangle FCB. \tag{3.11}$$

Es genügt noch zu zeigen, dass K auf der Geraden (CF) liegt. Dies ist der Fall, wenn $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BFK$. Über die Winkelsumme im Dreieck $\triangle FBC$ und (3.11) ergibt sich

$$\sphericalangle BFC = 180^\circ - \sphericalangle CBF - \sphericalangle FCB = 180^\circ - (\beta + \gamma) - \sphericalangle ACM_c = \alpha - \gamma_1,$$

und im Kreis k_F erhält man mit dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel $\sphericalangle BFK = \sphericalangle BAK = \alpha - \gamma_1$, also tatsächlich $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BFK$.
Das beweist die Behauptung der Aufgabe. $\square$

Bemerkungen: Zum spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ und $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle ACB$ betrachten wir das Tangentendreieck, dessen Seiten aus den Tangenten an den Umkreis vin $\triangle ABC$ in den Punkten A, B, C gebildet wird. Weil $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, existiert ein solches Tangentendreieck $\triangle DEF$, und der Umkreis von $\triangle ABC$ ist der Inkreis von $\triangle DEF$. Dabei seien die Bezeichnungen der Eckpunkte D, E, F wie in der Skizze.



Die Geraden (AD), (BE) und (CF) schneiden sich in einem Punkt L. Denn nach dem Sehnentangentenwinkelsatz sind

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle DBC = \alpha, \sphericalangle CAE = \sphericalangle ECA = \beta \text{ bzw. } \sphericalangle ABF = \sphericalangle FAB = \gamma,$$

die Dreiecke $\triangle CBD$, $\triangle ACE$ bzw. $\triangle BAF$ sind also jeweils gleichschenklig mit

$$\overline{BD} = \overline{DC}, \overline{EA} = \overline{CE} \text{ bzw. } \overline{FB} = \overline{AF}.$$

Weil damit $\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{BD}} = 1$, folgt aus der Umkehrung des Satzes von Ceva, dass sich die Geraden (AD) (BE) und (CF) in einem Punkt schneiden, den wir L nennen.

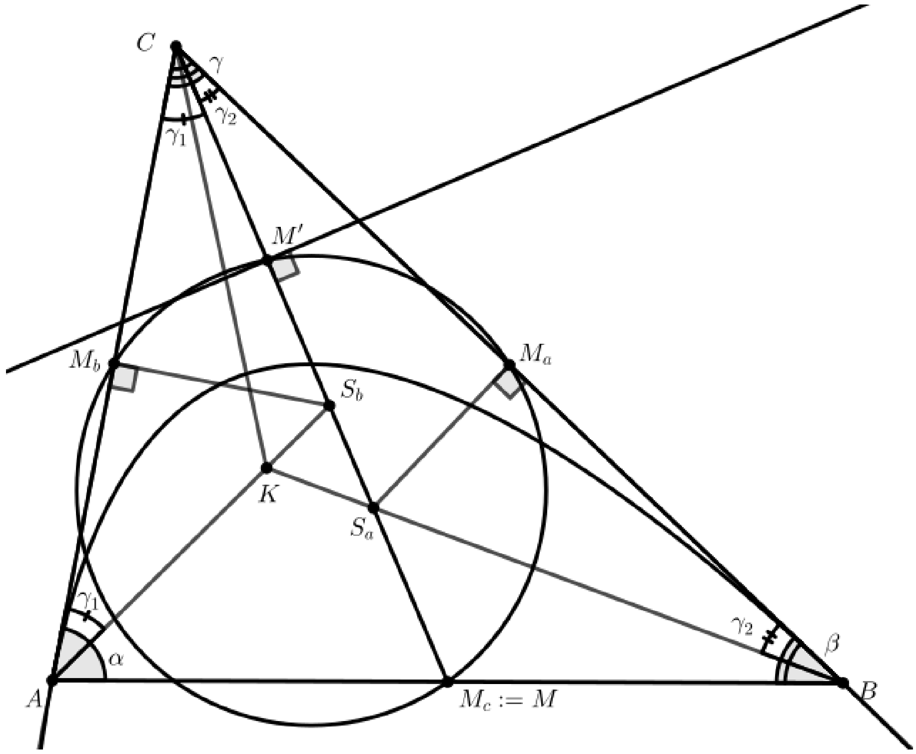
Bezeichnen wir die Fußpunkte der Geraden (AL), (BL) bzw. (CL) auf BC, AC bzw. AB mit X, Y bzw. Z, so ist

$$\overline{BX} : \overline{XC} = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2, \overline{CY} : \overline{AY} = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 \text{ bzw. } \overline{AZ} : \overline{ZB} = \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2,$$

weil beispielsweise wegen $\overline{FB} = \overline{AF}$ und mit dem Sinussatz im Dreieck $\triangle ABC$

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{|\triangle FCA|}{|\triangle CFB|} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AF} \cdot \sin(180^\circ - \beta)}{\overline{BC} \cdot \overline{FB} \cdot \sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin\beta}{\overline{BC} \cdot \sin\alpha} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2};$$

die anderen Nachweise verlaufen analog. Die Geraden (AD), (BE) bzw. (CF) sind damit die Symmediane im Dreieck $\triangle ABC$ durch A, B bzw. C. Ihr Schnittpunkt L ist der Lemoine-Punkt.



Der Punkt K ist außerdem Brennpunkt einer Parabel, die im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ verläuft und die Geraden (AC) bzw. (BC) in A bzw. B berührt. (Eine Parabel bezüglich einer speziellen Geraden, der *Brennlinie*, und eines speziellen Punktes, dem *Brennpunkt*, ist definiert als der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstand zum Brennpunkt gleich dem Abstand zur Brennlinie ist.)
Schneidet der Kreis durch die M_a, M_b, M_c die Seitenhalbierende (CM_c) in M_c und im Punkt M'; so ist die zu (CM_c) senkrechte Gerade, die durch M' verläuft, die Brennlinie der Parabel.
Wir danken Herrn StD a.D. Fegert und Herrn OStR Dr. Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 147

Altlötting, Staatliche Berufsschule:
Kl. 10: Lena Baumgartner 23.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 9: Oscar Su 137,5;
Kl. 12: Lukas Born 29.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 5: Silas Salloch 1;
Kl. 6: Yousef Mehana 5,5;
Kl. 7: Linus Saloch 28,5, Mika Schäfer 47, Hagen Hohbein 12.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 8: Philippos Dimitriou 116.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:
Kl. 5: Felix Lang 3, Julia Hans 4, Nina Petry 4;
Kl. 11: Therese Horstkötter 4.

Hof, Johann-Christian-Reinhart-Gymnasium:
Kl. 8: Finja Weiß 17.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Jabir Aouzi 51;
Kl. 6: Tejas Shivakumar 8;
Kl. 8: Sarah Markhof 37, Mark Garkuscha 20.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 11: Pascal Bohlinger 34,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 7: Victor Mayer 19;
Kl. 12: Raphael Mayer 11.

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 5: Ioan Salaru 27.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 12: Salvatore Ippolito 61.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 7: Jasmin Borrmann 28;
Kl. 8: Dóra Emilia Mézáros 22, Louisa Lukowiak 10,5;
Kl. 9: Emilie Borrmann 23;
Kl. 12: Kathrin Borrmann 42,5, Josephine Kaßner 54, Paulina Herber 74.

Schrobenhausen, Gymnasium
Kl. 8: Luca Sindel 28.

Simbach am Inn, Tassilo-Gymnasium:
Kl. 8: Alexander Koblbauer 26.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 7: Mai Linh Dang 44;
Kl. 10: Tu Sam Dang 64,5;
Kl. 12: Miriam Büttner 90.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 10: Philipp Lörcks 90.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:
Kl. 8: Marie Baumgartner 35,5.

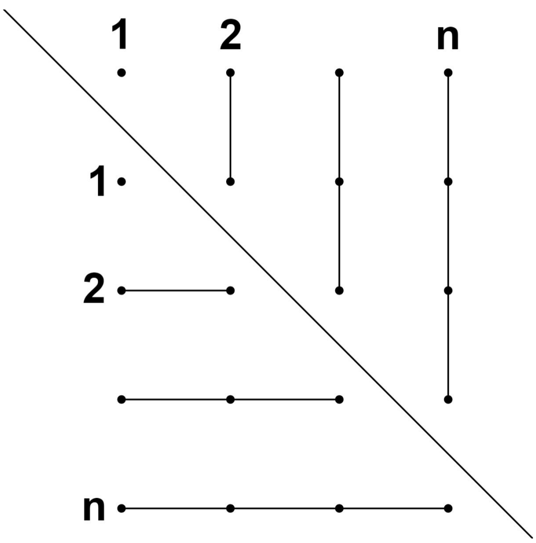
Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:
Kl. 8: Greta Waldmüller 54.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 6: Emma Schubert 6, Greta Schubert 6, Luis Krampez 9.

Errata

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal kleine Fehler in MONOID ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken. So auch im Heft 150:

- **Beweis ohne Worte (Seite 5)**
  Innerhalb der für diesen Beweis notwendigen Abbildung sind uns unglücklicherweise die Positionen der Zahlen 1, 2, ..., n verrutscht. Natürlich muss die Figur mit der 1 beginnen. Die berichtigte Figur sieht wie folgt aus:



$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

- **Zu Besuch bei Galileo Galilei (Seite 11 ff.)**
  Leider hat sich in das fiktive Interview der Fehlerteufel eingeschlichen und im Text zweimal fälschlicherweise „Johannes Kepler“ statt richtig „Nikolaus Kopernikus“ gemacht. Wir bitten das zu entschuldigen, denn selbstverständlich wurde das 1543 gedruckte grundlegende Werk „De revolutionibus orbium coelestium“ von Nikolaus Kopernikus geschrieben. Das hätte Galilei natürlich auch korrekt gewusst und widergegeben. Außerdem ist es auch nicht richtig, dass Galilei 1597 den „Vorarbeiten der Astronomen Johannes Kepler und Tycho Brahe“ gefolgt sei. Es gab zu dieser Zeit wohl schon Briefe Keplers an Galilei, aber Kepler hatte seine bahnbrechenden Entdeckungen noch gar nicht gemacht.
  Vielen Dank unserem aufmerksamen Leser Manuel Schiffer für die Hinweise.

Mitteilungen

- **Einladung zur Monoid-Feier:** Alle Freunde und Förderer von Monoid sind herzlich eingeladen, an der Monoid-Feier 2022 teilzunehmen. Es werden Preise an erfolgreiche Löserinnen und Löser des Schuljahres 2021/22 vergeben. Die Feier findet am

  Samstag, den 19. November 2022,
  ab 10 Uhr
  in der Alten Mensa der Universität Mainz

  statt. Den Festvortrag „Über die Exponentialfunktion" wird Jun.-Prof. Dr. Patrick Tolksdorf halten.
- **Nachruf:** Am 28. Juli 2022 verstarb unser langjähriges Redaktionsmitglied Dr. Klaus Gornik, der nach seiner Pensionierung bei Monoid einstieg. Unsere Anteilnahme gilt seiner Familie.
- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2022/23 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

(MG)

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Frank Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Georg Sahliger, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Alina Gehlhaar, Benjamin Landgraf
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)

Jahrgang 42 | Heft 151 | Oktober 2022

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.
Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`