

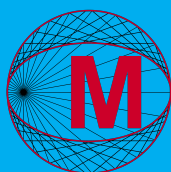
Jahrgang 42

Heft 152

Dezember 2022

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15. Februar 2023.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

55099 Mainz

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

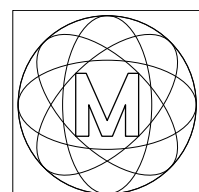
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis und am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



Aufgaben zum neuen Jahr

Vielfaches von 5^{2023}

Zeige: Das Produkt $(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^3 + 1) \dots (2^{8090} + 1)$ ist ein Vielfaches von 5^{2023} . (H.F.)

Irrationalzahlen mit der Summe 2023

Kann man den letzten Summanden in der Summe,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

so wählen, dass $S_n = 2023$ ist? (H.F.)

Ein Vielfaches von 2023

Es sei $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$, falls ungerade und $n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n$, falls n gerade ist. Dann ist $2022!! - 2021!!$ ein Vielfaches von 2023.

Hinweis: Es seien m, n und t , wobei $t \neq 0$, ganze Zahlen mit $m = at + r$ und $n = bt + s$ und a, b, r, s ganzzahlig. Dann gilt: $m \cdot n = ct + rs$, mit c ganzzahlig. (H.F.)

Welche Zahl ist größer?

Es seien

$$z_1 = \frac{2023^{2022} + 1}{2023^{2023} + 1} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{2023^{2023} + 1}{2023^{2024} + 1}.$$

Welche der beiden Zahlen z_1 und z_2 ist die größere? (H.F.)

Folglied gesucht

Gegeben sei die Zahlenfolge

$1, 2, 4, 3, 6, 9, 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 20, 25, \dots, n, 2n, 3n, \dots, n \cdot n, \dots$

Wie lautet die 2023-te Zahl in dieser Folge? (MG, nach H.F.)

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 41.

Vier Tage universitäre Mathematik

Die Mainzer Mathe-Akademie 2022

von Salvatore Ippolito

MMA – Was versteckt sich wohl hinter diesen drei Buchstaben? Manche meiner Altersgenossen, würden wohl spontan antworten: „Natürlich Mixed Martial Arts“. Also die berühmten Kampfsport-Kämpfe in Käfigen, die sich aktuell großer Beliebtheit bei jungen Zuschauern erfreuen. Im Herbst 2022 war ich vier Tage lang Teilnehmer bei der MMA, die in Mainz stattfand. In Käfige gesperrt wurde ich dort zum Glück aber nicht und auch mein Gesicht blieb heil. Gekämpft habe ich nämlich nur mit komplexen Zahlen und Formeln. Denn hinter der Abkürzung MMA versteckte sich in meinem Fall die *Mainzer Mathe-Akademie*. Das ist ein viertägiger Kurs an der berühmten Johannes Gutenberg-Universität, wo ich gemeinsam mit 29 anderen Schülern die Gelegenheit bekam, Uni-Luft zu schnuppern und mich intensiv mit der universitären Mathematik zu beschäftigen. So konnte ich meine Leidenschaft einmal ganz anders zu erleben, als ich es vom Schulunterricht gewohnt bin.

Am ersten Tag wurden uns Teilnehmern drei Themen vorgestellt: komplexe Zahlen, Fraktale und Spieltheorie, wovon wir uns ein Thema aussuchen durften. Bei Fraktalen analysiert man geometrische Muster, die meist selbstähnlich sind, das heißt sie bestehen aus kleineren Teilen von sich selbst. Das Sierpinski-Dreieck ist ein hervorragendes Beispiel für ein selbstähnliches Fraktal, egal wie nah man hinein zoomt, man findet immer eine kleinere Version des Sierpinski-Dreiecks wieder. In der Spieltheorie versucht man bei bestimmten Situationen die Strategie zu ermitteln, die das eigene Wohl oder das Wohl mehrerer Beteiligten maximiert. Ich entschied mich für komplexe Zahlen.

Entsprechend unseres gewählten Schwerpunkts wurden wir dann in drei Gruppen aufgeteilt. Unter der Leitung jeweils eines Professors beschäftigten wir uns mit unseren Themen. Am letzten Tag präsentierten wir dann unsere jeweiligen Ergebnisse den Schülern der anderen Gruppen, so dass wir gegenseitig von unserem neuen Wissen profitierten.

Die Grundlagen zu den komplexen Zahlen, fand ich ebenso interessant wie überraschend. Diese Zahlen wurden eingeführt, um Gleichungen höherer Ordnung zu lösen und ermöglichen auch das Wurzelziehen von negativen Zahlen, was in den reellen Zahlen nicht möglich ist. Es wird eine imaginäre Zahl i definiert über $i^2 = -1$, sodass letztendlich $i = \sqrt{-1}$ ist. Mit dieser Einheit i kann man weiterrechnen, auch wenn man sich die Zahl i nicht vorstellen kann, denn in unseren vertrauten reellen Zahlen gibt es keine Zahl, die beim Quadrieren -1 ergibt. Was mich hierbei überrascht hat, war die Aussage unseres Kursleiters Prof. Manuel Blickle, dass es nicht darum gehe, die Definition $i^2 = -1$ oder die Zahl $i = \sqrt{-1}$

zu verstehen, sondern man müsse die Definition erstmal einfach so hinnehmen und mit ihr Berechnungen durchführen. Die Sinnhaftigkeit der Definition ergebe sich dadurch, dass man nicht zu mathematischen Widersprüchen komme und brauchbare Ergebnisse erhalte. Erst dann könne man versuchen ein Verständnis aufzubauen. Das ist genau das Gegenteil meiner üblichen Vorgehensweise. Denn ich versuche immer zuerst die Problemstellung im Ganzen zu verstehen und danach meine Lösungswege zu finden. Hier habe ich zum ersten Mal gelernt, dass man auch andersherum vorgehen kann.

Selbstverständlich rechneten wir nicht nur oder bewiesen mathematische Sätze, sondern genossen auch ein vielfältiges Rahmenprogramm, das aus Spiele- und Kinoabenden, einer Führung durch die Universität, gemeinsamem Grillen und einer Führung durch das Mainzer Staatstheater bestand. Es gab immer etwas Neues zu erleben und es wurde nie langweilig. Jetzt weiß ich zum Beispiel, was alles hinter einer Theaterbühne abläuft, von der Herstellung der Masken und Kleiderstücke bis hin zur Vorbereitung und dem Transport von Requisiten. Nicht zuletzt haben wir auch Zeit bekommen, Mainz zu erkunden und dessen schöne Architektur und Sehenswürdigkeiten zu bewundern.

Die anderen Teilnehmer waren sympathisch und ich habe mich von Anfang an gut mit ihnen verstanden. Es war toll, mich mit anderen Mathematik-Begeisterten in meinem Alter auszutauschen, gemeinsam Sachen zu unternehmen und Spaß zu haben. Mit ihnen gemeinsam in einer Gruppe zu arbeiten, war eine ebenso neue wie positive Erfahrung für mich. Bis dahin habe ich mich nämlich immer nur selbständig mit Mathematik beschäftigt, sei es durch Aneignen neuen Wissens oder durch die Teilnahme am MONOID-Wettbewerb. Während der Mainzer Mathe-Akademie habe ich nun festgestellt, dass die Zusammenarbeit mit anderen sehr motivierend ist, denn man hat die Sicherheit, bei Schwierigkeiten nicht auf sich alleine gestellt zu sein. Natürlich gab es immer wieder mal mathematische Hürden, wo weder ich noch mein Partner weiterwussten, aber in solchen Situationen konnten wir uns auf die Hilfe des Professors oder der wissenschaftlichen Mitarbeiter verlassen.

Abschließend kann ich sagen, dass sich die Teilnahme an der Mainzer Mathe-Akademie gelohnt hat und die Erfahrung sehr bereichernd war. Ich habe nämlich viele Leute kennengelernt, viel Neues erlebt, gesehen und gelernt. Die MMA hat mir nicht nur Einblicke in anspruchsvolle mathematische Themengebiete ermöglicht, sondern mir auch gezeigt, wie viel Spaß die Zusammenarbeit mit Gleichgesinnten machen kann und wie der Alltag an einer Uni aussieht. Außerdem hatte ich die Gelegenheit, Professoren und wissenschaftlichen Mitarbeitern der Mathematik-Fakultät kennenzulernen und von ihnen jede Menge über ein Mathe-Studium zu erfahren. All diese Erfahrungen kann ich jedem Mathematikbegeisterten nur empfehlen.

Salvatore Ippolito besucht die Albert-Schäffle-Schule in Nürtingen und ist MONOID-L(o)eser.

Vielen Dank für den Bericht.

Die nächste Mainzer Mathe-Akademie findet vom 27. September bis zum 1. Oktober 2023 statt.

Wer von Euch Interesse an einer Teilnahme hat, kann sich den Termin schon einmal vormerken.

Wir werden in MONOID rechtzeitig auf die MMA hinweisen. Weitere Informationen findet Ihr unter

<https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma>.



Was uns über den Weg gelaufen ist Unerwartete Ziffern

von Hartwig Fuchs

Mathematik gilt weithin als eine trockene und emotionslose Angelegenheit. Und doch kann man in ihr manchmal seltsame Überraschungen erleben. Betrachten wir etwa die für alle natürlichen Zahlen n definierten Terme

$$T_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}.$$

Sie scheinen wenig bemerkenswert und schon gar nicht interessant zu sein. Aber der Schein trügt. Wenn wir nämlich für einige Zahlen n die Werte von T_n als Dezimalzahlen bis zur ersten Ziffer nach dem Komma auflisten, dann zeigt sich dabei eine verblüffende Regelmäßigkeit

$$n = 2: T_2 = \sqrt[3]{2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2} = 2,6 \dots$$

$$n = 3: T_3 = \sqrt[3]{3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3} = 3,6 \dots$$

$$n = 4: T_4 = \sqrt[3]{4^3 + 2 \cdot 4^2 + 4} = 4,6 \dots$$

$$n = 5: T_5 = \sqrt[3]{5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5} = 5,6 \dots$$

Zufall? Nein – tatsächlich gilt für jedes n mit $n = 2, 3, 4, \dots$, dass

$$(1) \quad T_n = \sqrt[3]{n^3 + 2 \cdot n^2 + n} = n,6 \dots$$

ist. Das soll nun bewiesen werden.

Für jedes $n \geq 1$ gilt $n^3 < n^3 + 2n^2 + n = n(n+1)^2 < (n+1)^3$, woraus folgt $n < T_n < n+1$, und das bedeutet:

- (2) Für jedes $n \geq 2$ steht in der Dezimaldarstellung von T_n links vor dem Komma stets die Zahl n – vgl. Formel (1) und auch die Liste der vier Beispiele.

Die Behauptung (1) schreiben wir nun so: $n + \frac{6}{10} < T_n < n + \frac{7}{10}$ und danach

(3) $5n + 3 < 5T_n$ sowie

(4) $10T_n < 10n + 7$.

Nun gilt Ungleichung (3'), also $(5n + 3)^3 < 125T_n^3$, also auch wegen Gleichung (1), dass $125n^3 + 225n^2 + 135n + 27 < 125n^3 + 250n^2 + 125n$ und daher $27 < 25n^2 - 10n$, weil $27 < 5n(5n - 2)$ zutrifft für jedes $n \geq 2$. Daraus folgt Ungleichung (3') und damit Ungleichung (3). Ferner gilt (4'): $1000T_n^3 < (10n + 7)^3$ für $n \geq 2$, denn es ist tatsächlich $1000T_n^3 = 1000n^3 + 2000n^2 + 1000n < 1000n^3 + 2100n^2 + 1470n + 343$, was aus $0 < 100n^2 + 470n + 343$ folgt. Aus (4') ergibt sich (4).

Die Gültigkeit von (3) und (4) beweist, dass (1) zutrifft.

Die Aussage (1) bestätigt nun die unerwartete Ziffernregelmäßigkeit der Terme T_n :

- (5) Für jedes n , wobei $n \geq 2, 3, 4, \dots$, steht in der Dezimaldarstellung von $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}$ links vor dem Komma stets die Zahl n und auf der ersten Stelle rechts nach dem Komma stets die Ziffer 6.

Ergänzung: Ab $n = 17$ ist die zweite Nachkommastelle eine 6, ab $n = 167$ die dritte, ab $n = 1667$ die vierte und ab $n = 16667$ die fünfte Nachkommastelle. Dies legt nahe, dass ab $n = 1666 \dots 67$ auch die k -te Nachkommastelle eine 6 ist, wobei die Anzahl der Ziffern 6 in der Zahl n gleich $k - 2$ ist. Anders ausgedrückt: $T(n)$ und $n,666 \dots$ scheinen äquivalent zu sein für n gegen Unendlich.

Ein Satz über Mittelpunktswinkel und Peripheriewinkel

Beweis mit und ohne Worte

von Hartwig Fuchs

Es sei A ein Punkt eines Kreises mit Mittelpunkt M und Durchmesser BC .

Dann gilt:

(1) $\sphericalangle CMA = 2\sphericalangle CBA$.

Beweis (Figur 1)

Das Dreieck ABM ist gleichschenkelig wegen $|MA| = |MB|$. Daraus folgt

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MBA = \sphericalangle CBA.$$

Es gilt daher

$$\sphericalangle AMB = 180^\circ - 2\sphericalangle CBA.$$

Dann ist

$$\sphericalangle CMA = 180^\circ - \sphericalangle AMB = 180^\circ - (180^\circ - 2\sphericalangle CBA) = 2\sphericalangle CBA.$$

Der Satz gilt aber auch dann noch, wenn keine zwei der Punkte A , B , C Endpunkte eines Durchmessers sind: Wenn die Punkte A , B und C auf einem Kreis mit Mittelpunkt M liegen, dann gilt

$$(2) \quad \sphericalangle CMA = 2\sphericalangle CBA.$$

Wegen Satz (1) sei vorausgesetzt, dass weder AB noch AC noch BC ein Durchmesser des Kreises sei. Dann sind zwei Fälle möglich:

Fall 1: M liegt im Innengebiet des Winkels $\sphericalangle CBA$;

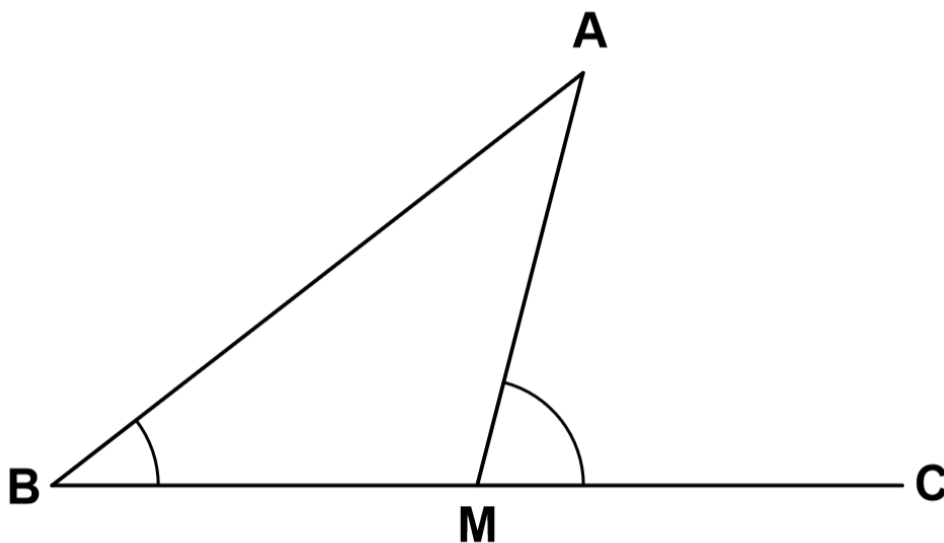
Fall 2: M liegt im Außengebiet des Winkels $\sphericalangle CBA$.

Dabei sei BD der Durchmesser des Kreises.

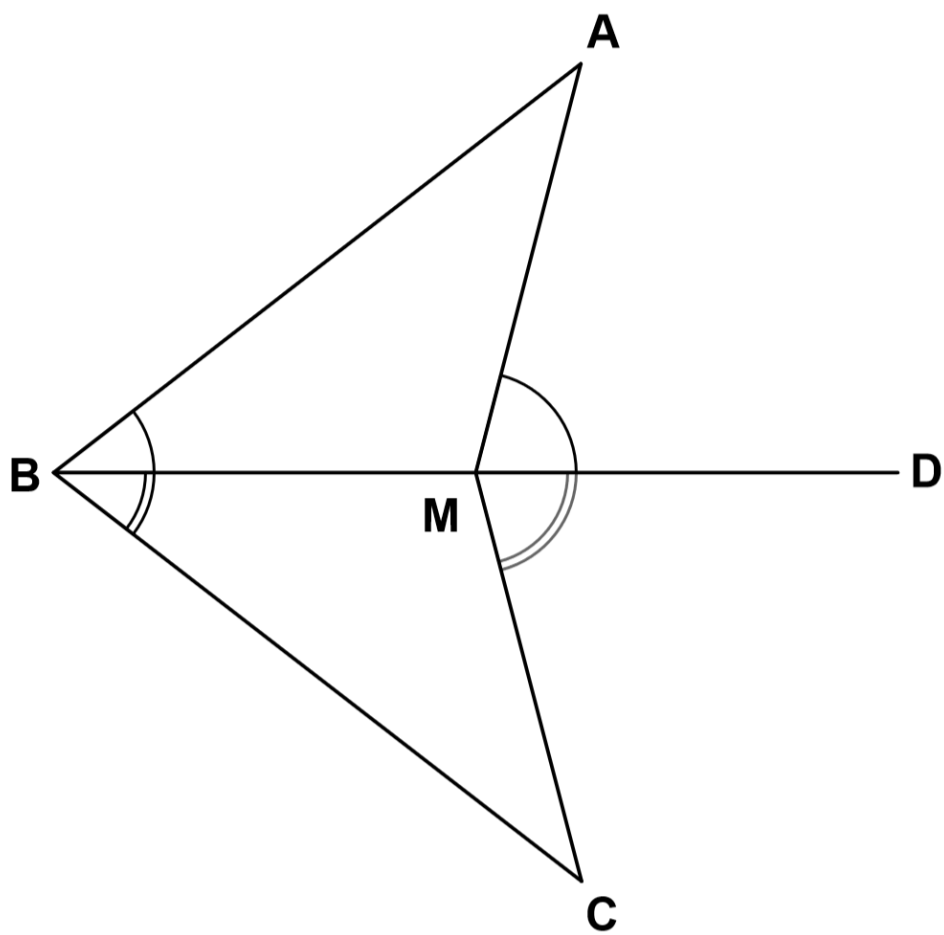
Beweis von Satz (2) ohne Worte

Fall 1: siehe Figur 2.

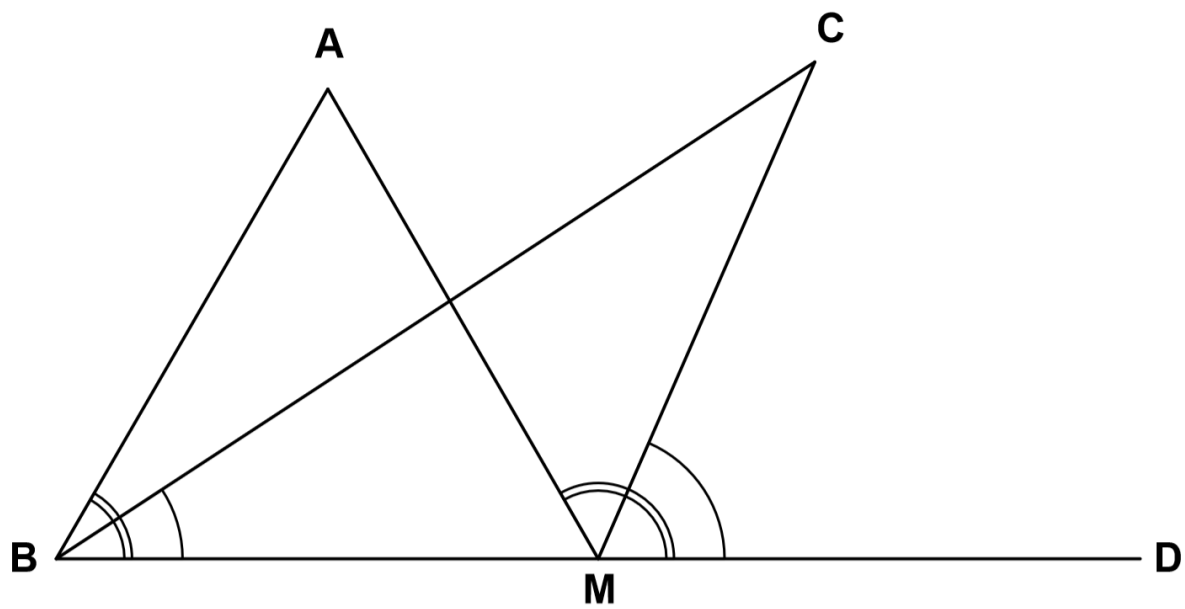
Fall 2: siehe Figur 3.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Zu Besuch bei Thales vom Milet

von Martin Mattheis

Sehr geehrter Herr Thales, wo lebten und wirkten Sie?

Sage bitte ganz formlos „Thales“ zu mir. Geboren wurde ich in eurer Zeitrechnung um das Jahr 624 vor Christus. Gelebt und gewirkt habe ich in der bedeutenden griechischen Handelsstadt des östlichen Mittelmeers Milet an der kleinasiatischen Küste, die in eurer Zeit zur Türkei gehört. Dort war ich auch als Kaufmann tätig. Deutlich lieber war mir jedoch die Beschäftigung mit Astronomie und Mathematik. In Milet bin ich dann auch um das Jahr 547 v. Chr. verstorben.

Was war ihre bedeutendste Entdeckung?

Bekannt geworden bin ich vor allem dadurch, dass ich durch astronomische Beobachtungen und mathematische Berechnungen die Sonnenfinsternis des Jahres 585 v. Chr. voraussagen konnte. In eurer Zeit ist diese mathematisch-astronomische Großtat jedoch weitgehend unbekannt.

Dafür kennt fast jedes Kind in eurer Zeit den nach mir benannten geometrischen „Satz des Thales“: Nimmt man die beiden Endpunkte des Durchmessers eines Kreises und einen dritten Punkt irgendwo auf der Kreislinie, dann hat das durch diese drei Punkten gebildete Dreieck bei dem dritten Punkt immer einen rechten Winkel.



Welches gedruckte Werk von Ihnen hatte den größten Einfluss auf die Mathematik?

Was genau meint ihr mit „gedruckt“? Was hat die physikalische Größe „Druck“ damit zu tun, wenn Bücher per Hand abgeschrieben werden? Drückt man dabei zu sehr, so geht die Schreibfeder kaputt.

Von meinen Werken selbst hat es leider keines in eure Zeit geschafft. Praktisch für Kaufleute war auf jeden Fall mein Buch über die Navigation.

Manche Menschen behaupten wegen meines methodisch-abstrakten Vorgehens, ich wäre der Erfinder der modernen Mathematik. Mir wäre es in der Geometrie wichtig gewesen, Erkenntnisse nicht nur an konkreten Beispielen zu gewinnen, sondern mathematische Fragestellungen möglichst abstrakt und allgemein zu formulieren, zu lösen und zu verifizieren. Dazu, ob dies wirklich stimmt, möchte ich mich hier nicht äußern.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?

Am ehesten noch in dem Band „5000 Jahre Geometrie“ von Christoph J. Scriba und Peter Schreiber. Außer der Tatsache, dass ich als Kaufmann aus einer wohlhabenden Familie stammte, ist über mein Leben allerdings nicht allzu viel bekannt. Außer mit Geometrie und Astronomie habe ich mich vor allem mit der Naturphilosophie beschäftigt. Hier bin ich bekannt dafür, dass ich versucht habe die Erscheinungen der Welt aus natürlichen Ursachen zu erklären.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern mit auf den Weg geben?

Wenn man älter wird, stellt man sich im Leben die Frage, welches Bild die Nachwelt von einem haben wird. Nun, da ich bereits im 4. Jahrhundert vor Christus zu den sieben Weisen der griechischen Antike gezählt wurde und außerdem nach mir seit 1857 mit der „Thalesia rubrivenia“ eine Weinrebe und seit 1935 ein Mondkrater benannt sind, wird sich die Nachwelt immer an mich erinnern.

Lieber Thales, wir danken Ihnen für dieses aufschlussreiche Gespräch!

Sind alle Katzen grau?

von Hartwig Fuchs

Der Mathematiker Prof. Quaoar liebte es, seine Studenten mit scheinbar einfachen Aussagen auf logisches Glatteis zu führen. So behauptete er kürzlich in seiner Vorlesung, er könne die offensichtlich falsche Aussage

(1) Alle Katzen sind von der gleichen Farbe

auf mathematisch exaktem Weg als wahr nachweisen.

Darauf der Student Talentino: „Ich glaube zu wissen, wie Sie das wohl machen werden. Bekanntlich gilt: Nachts sind alle Katzen grau, womit ja schon gewissermaßen eine „Hälfte“ Ihrer Behauptung erwiesen ist. Und daraus leiten Sie dann mit einem Ihrer Tricks die ganze Behauptung (1) her.“

Quaoars Antwort: „Ich beweise (1) mit der bewährten Methode der Induktion, also ganz ohne Tricks.“ – Und das machte er so:

Quaoars Beweis

Wenn $K(m)$ eine beliebige Menge von m Katzen ist, dann bezeichne $A(m)$ die Aussage, die nun hergeleitet werden soll:

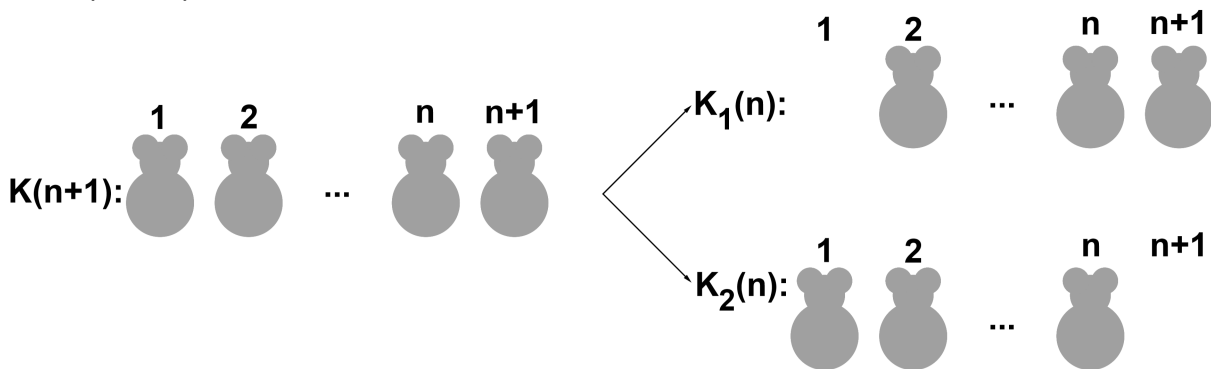
(1') Alle Katzen in $K(m)$ sind von der gleichen Farbe.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $A(1)$. Denn in $K(1)$ befindet sich genau eine Katze. Daher sind alle Katzen in $K(1)$ von gleicher Farbe.

Induktionsvoraussetzung – Man mache die Induktionsannahme: Für ein $n \geq 1$ ist bewiesen, dass $A(n)$ für jede n -elementige Menge $K(n)$ gilt.

Induktionsschritt – Man zeige, dass $A(n+1)$ für jede Menge $K(n+1)$ zutrifft. Dazu denke man sich jede der $n+1$ Katzen einer Menge $K(n+1)$ in einen Käfig gesetzt; die Käfige seien mit $1, 2, \dots, n, n+1$ nummeriert.

Nun betrachte man die Mengen $K_1(n)$ und $K_2(n)$, die man erhält, wenn man im ersten Fall die Katze aus dem ersten Käfig und im zweiten Fall die Katze aus dem $(n+1)$ -ten Käfig entfernt:



Nach der Induktionsannahme befinden sich in $K_1(n)$ und in $K_2(n)$ jeweils nur Katzen von gleicher Farbe.

Da es nun Katzen gibt, die sowohl in $K_1(n)$ als auch in $K_2(n)$ vorkommen, sind diese Katzen von gleicher Farbe.

Daraus folgt: Alle Katzen in $K_1(n) \cup K_2(n) = K(n+1)$ sind gleichfarbig – es gilt also $A(n+1)$.

Mit dieser Induktion ist die Behauptung (1) für jedes $n \geq 1$ bewiesen. Q.e.d.

Quaoars Frage: „Wo liegt der Fehler?“

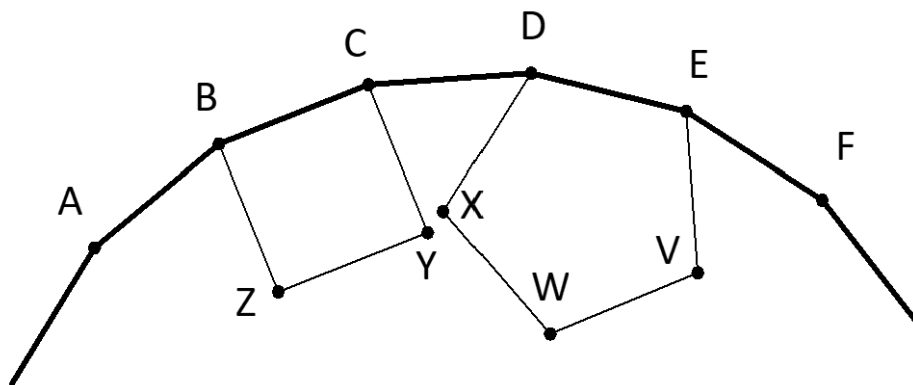
Lösung

Wenn man wie oben aus einer Menge $K(2)$ von zwei Katzen die Mengen $K_1(1)$ und $K_2(1)$ bildet, dann gibt es keine Katzen, die den beiden Mengen $K_1(n)$ und $K_2(n)$ angehören. Deshalb kann man nicht wie oben herleiten, dass alle Katzen aus $K_1(n) \cup K_2(n) = K(2)$ von gleicher Farbe sind. Damit ist die Annahme im zweiten Beweisschritt oben nicht immer zutreffend und daher ist auch die Folgerung im dritten Beweisschritt nicht immer wahr. Also ist Prof. Quaoars Behauptung (1) falsch – sein „Beweis“ ist daher kein Beweis.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Tessa kommt zu Besuch und findet ihre Freundin Mila am Schreibtisch vor, konzentriert über ein Blatt Papier gebeugt. „Was hast Du denn da Tolles gezeichnet?“, fragt sie Mila. „Wir haben gelernt, wie groß die Innenwinkel regelmäßiger Vielecke sind, und damit will ich ein regelmäßiges 20-Eck zeichnen“, entgegnet diese. „Außerdem habe ich über einer der Seiten nach innen ein Quadrat und über der übernächsten Seite nach innen ein regelmäßiges Fünfeck konstruiert“, fährt Mila fort. Tessa betrachtet sich die Figur eine Weile und meint dann: „Es sieht so aus, als ob die Verlängerung der einen Fünfecksseite genau durch die Ecke des Quadrats geht. Oder ist das nur fast richtig?“



Hat Tessa mit ihrer Vermutung Recht, dass Y auf der Verlängerung von DX liegt? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Ihr könnt eure Lösungen bis zum 15. Februar 2023 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 150

In Heft 150 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Peter und Paul wiederholen gemeinsam die Bruchrechnung. Damit es nicht zu langweilig wird, verwenden sie Terme für Zähler und Nenner.

Schließlich sagt Peter: „Ich habe hier den Bruch $\frac{21n+4}{14n+3}$ “

Paul entgegnet sofort: „Den kann man bestimmt nicht mit 7 kürzen, denn im Zähler bleibt Rest 4 und im Nenner Rest 3 bei Division durch 7, egal welche natürliche Zahl man für n einsetzt.“ Darauf Peter: „Aber ich lade dich ins Kino ein, wenn du ihn mit einer anderen Zahl kürzen kannst. Du musst mir nur sagen, was du für n eingesetzt hast.“

Paul nimmt natürlich die Wette an und beginnt zu suchen.

Gibt es eine natürliche Zahl n , für die sich der oben angegebene Bruch kürzen lässt? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl t mit $t \geq 2$ und $t|21n+4$ sowie $t|14n+3$. Dann gilt auch $t|2 \cdot (21n+4) = 42n+8$ sowie $t|3 \cdot (14n+3) = 42n+9$. Aber $42n+8$ und $42n+9$ sind als aufeinanderfolgende Zahlen offensichtlich teilerfremd. Daher gibt es keinen gemeinsamen Teiler $t \geq 2$ von Zähler und Nenner, mit dem gekürzt werden könnte.

Vollständig richtige Lösungen wurden von Paulina Herber (Gymnasium Oberursel, 12. Klasse), Josefine Kaßner (Gymnasium Oberursel, 12. Klasse) und Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, 9. Klasse) eingesandt.

Paul hat sich kurz über die verlorene Wette geärgert, aber danach überlegt, ob Peter überhaupt zwei verschiedene Summanden anstelle der 4 und der 3 hätte wählen können, für die der Bruch dann kürzbar wäre. Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Monoidale Knotelei

von Hartwig Fuchs

$$(1) \quad \begin{array}{rcccc} & M & M & M & \\ + & O & O & O & \\ + & N & N & N & \\ \hline A & B & C & E & \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{rcccc} & O & O & O & \\ + & I & I & I & \\ + & D & D & D & \\ \hline A & B & C & E & \end{array}$$

Man ersetzt in (1) und (2) gleiche oder verschiedene Buchstaben durch gleiche oder verschiedene Ziffern, wobei $A \neq O$ sowie $M > I > D$ sei und (1) sowie (2) korrekte Additionen sind. Welche Zahl stellt dann das Wort MONOID dar?

Lösung

Zunächst gilt:

$$(3) \quad MMM = M \cdot 111, OOO = O \cdot 111, \text{ usw. sowie}$$

$$(4) \quad M + O + N \leq 9 + 8 + 7 = 24.$$

Bei der Summe (4) entsteht ein Additionsübertrag von höchstens 2 in der Addition (1). Daraus folgt: $A = 1$ oder $A = 2$.

Es sei $A = 1$. Wegen (3) gilt für Addition (1): $(M + O + N) \cdot 111 = 1000 + BCE$, so dass $10 \leq M + O + N \leq 18$.

Für $M + O + N = 10, 11, \dots, 18$ erhält man dann jeweils $B = C$, was nicht erlaubt ist. Daher hat unser Problem keine Lösung für $A = 1$.

Es sei $A = 2$. Dann gilt:

$$(5) \quad (M + O + N) \cdot 111 = 2000 + BCE,$$

so dass $19 \leq M + O + N \leq 27$ ist.

Für $M + O + N = 20, 21, \dots, 27$ ist dann jeweils $B = C$ in Gleichung (5), was nicht möglich ist.

Für $M + O + N = 19$ ist wegen (5) schließlich $19 \cdot 111 = 2019 = ABCE$. Daraus folgt: Für die Ersetzung der Buchstaben M, O, N, I, D sind die Ziffern 0, 1, 2 und 9 ausgeschlossen.

Annahme: Die den Buchstaben M, O, N entsprechenden Ziffern sind sämtlich ≤ 7 .

Dann ist $M + O + N \leq 7 + 6 + 5 < 19$. Daher ist einer der drei Buchstaben gleich 8. Ganz entsprechend ergibt sich: Die den Buchstaben O, I, D in Addition (2) zuzuordnenden Ziffern sind sämtlich ≤ 8 , einer der Buchstaben ist 8.

Da O sowohl in Addition (1) als auch in Addition (2) vorkommt, setzen wir $O = 8$. Daher sind $M + N = 7 + 4$ und $I + D = 6 + 5$ oder $M + N = 6 + 5$, $I + D = 7 + 4$ – oder die vier Gleichungen mit vertauschten numerischen Summanden – möglich.

Es sei $M \leq 6$. Dann ist $I \leq 5$ und $D \leq 4$ wegen $M > I > D$. Daher gilt $O + I + D \leq 8 + 5 + 4 < 19$: ein Widerspruch!

Also ist $M = 7$ und daher $N = 4$ sowie $I = 6$ und $D = 5$ wegen $I > D$.

Somit ist $\text{MONOID} = 784865$.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Im Science-Center *Experimenta* in Heilbronn werden die Besucher an einer der Stationen aufgefordert, schwarze Holzscheiben auf einer großen quadratischen Fläche zufällig zu verteilen. Das Ergebnis wird dann von einer Kamera aufgenommen und von einem Computer statistisch analysiert. Es ist gar nicht so einfach, hier ein gutes Ergebnis zu erzielen. Viele Besucher verteilen die Steine zu gleichmäßig, zu ungleichmäßig oder zu regelmäßig.

Die statistische Auswertung, die dort vorgenommen wird, ist einigermaßen kompliziert und basiert zum Beispiel auf den typischen Abständen zum nächsten Nachbarn, die bei einer zufälligen Verteilung vorliegen. Wir wollen hier eine viel einfachere Situation anschauen, in der sich ein Mensch Münzwurfresultate *ausdenkt* und diese vom Computer auf Zufälligkeit untersucht werden sollen.

Konkret soll der Mensch an der Tastatur in jedem Schritt „W“ für *Wappen* eingeben oder „Z“ für *Zahl*. Der Computer rät vorab die Eingabe. Wenn die W und Z tatsächlich rein zufällig kämen, dann könnte der Computer eine Trefferquote von etwa 50% nicht übertreffen. Bei einem Menschen, der sich zufällige

Ergebnisse ausdenkt, ist dies durchaus möglich. Die Quote für korrekte Vorhersagen des Computers stellt also ein Maß für die Zufälligkeit der ausgedachten Münzwürfe dar.

Ein ganz einfaches Verfahren für die Vorhersage sieht so aus: Das Programm führt Buch darüber, wie häufig der Mensch W oder Z gewählt hat, wenn die vier Eingaben davor beispielsweise WWWW waren. Wurde häufiger W gewählt, so tippt der Computer auf W, falls die letzten vier Eingaben WWWW waren. War es häufiger Z, so wählt der Computer Z. Bei Gleichstand wählt der Computer zufällig W oder Z. Ebenso wird über die Eingaben W und Z Buch geführt bei allen 16 Möglichkeiten WWWW, WWWZ, WWZW, ..., die als letzte vier Eingaben möglich sind.

Die Aufgabe hier besteht darin, das entsprechende Computerprogramm zu schreiben und auszuprobieren.

- Das Programm soll eine Tastatureingabe akzeptieren (W oder Z, bzw. Q für Abbruch). Es soll vor jeder Eingabe die kommende Eingabe erraten (aber zunächst geheimhalten) und nach der Eingabe mitteilen, ob es richtig geraten hat. Zudem soll die Quote richtig vorhergesagter Eingaben in Prozent nach jeder Eingabe mit ausgegeben werden.
- Wenn Euch ein pfiffigeres Verfahren zur Vorhersage einfällt, seid Ihr eingeladen, dieses zu programmieren und einzusenden.
- Welche Trefferquote erzielt Euer Programm bei den folgenden 100 ausgedachten Münzwürfen? Sendet auch diese Prozentzahl mit ein.

ZWWZW ZZZZW WWZZW ZWZWZ ZZWZW
WWZZZ WZWZW WWZWZ ZZWZW WZWZW
WZWZW WWZZZ WWZWZ ZWWZW WWZWZ
WZWWW ZWWWZ WZZZW ZWWZW WZWWW

Wenn Euch über Weihnachten langweilig wird, könnt Ihr die Verwandtschaft auffordern, sich Münzwürfe auszudenken, während Ihr den jeweils nächsten Vorschlag mit dem Computer vorhersagt. Welche Trefferquote könnte Ihr damit erzielen?

(Ack)

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 150

In Heft 150 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Gedichte aufräumen

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOO
oo
tt
Sssssssssssssssssss
MMMMMMMMMMmmmmmm
pppppppppppp
KKkkkkk
Fffff
hhhhh
rrrrr
lll
gg
zz
b
c

Welches Gedicht haben wir hier für Euch aufgeräumt?

Der Schweizer Künstler Ursus Wehrli hat sich einen Namen gemacht durch sein Projekt „Kunst aufräumen“, bei dem er beispielsweise bekannte Gemälde *auf-räumt*: In vielen dieser aufgeräumten Werke sind die dargestellten Gegenstände nach Größe, Farbe oder Form sortiert aufgestapelt, so dass das ursprüngliche Bild kaum noch zu erahnen ist. Eine kleine Internet-Suche liefert sehr amüsante Bilder.

Während aufgeschlossene Kunstlehrer mittlerweile ihre Klassen nach dem selben Schema Gemälde aufräumen lassen, ist diese Kunstform in der Lyrik noch sträflich vernachlässigt worden. Erkennt Ihr das Gedicht, das wir hier für Euch aufgeräumt haben? So viele unterschiedliche Vokale kommen ja nicht drin vor... In der Aufgabe für den Computerfan aus Heft 150 forderten wir Euch auf, ein Programm zu schreiben, das Gedichte aufräumt und so darstellt, wie im Beispiel. Etwas genauer soll das Programm folgendes tun:

- Als Eingabe erhält das Programm einen Text eines Gedichtes, am besten mit allen Leerzeichen, Satzzeichen, Zeilenumbrüchen. So lässt es sich am einfachsten aus den üblichen Quellen herauskopieren.
- Als Ausgabe gibt das Programm einen Text aus nach folgenden Regeln.

- In der ersten Zeile ist der häufigste Buchstabe des Textes zu finden, und zwar so oft, wie er im Text vorkommt.
- Zuerst werden zu jedem Buchstaben die Großbuchstaben ausgegeben (entsprechend ihrer Anzahl) und dann die Kleinbuchstaben, also z. B. EEEeeeeee, wenn in dem Text drei große E und sechs kleine e auftauchen.
- Bei Gleichstand gilt die alphabetische Reihenfolge aäbcdefghijklmnoöpqrßtuüvwxyz.
- Die Umlaute ä, ö und ü und die Ligatur ß gelten als eigenständige Buchstaben.
- Leerzeichen werden nicht ausgegeben.
- Satzzeichen haben wir nicht mit ausgegeben.

Neben dem Programm reicht Ihr bitte zusätzlich eine aufgeräumte Fassung von Goethes Erlkönig mit ein. Den Text findet Ihr z. B. auf Wikipedia.

Als Zusatznutzen habt Ihr gleich ein Projekt für den Kunst- oder Deutschunterricht erledigt. Ein paar interessante Interpretationen Eures Werkes als Kritik am Poststrukturalismus der Gegenwartskunst fallen Euch bestimmt dazu ein.

Lösung im Python-Code

```
def aufräumen(text):
    klein = "aäbcdefghijklmnoöpqrßtuüvwxyz"
    gross = "AÄBCDEFGHIJKLMNOPQRSTUÜVWXYZ"
    zeile = [""] * len(klein)
    maximal = 0
    for stelle in range(0, len(text)):
        for letter in range(0, len(klein)):
            if text[stelle] == klein[letter]:
                zeile[letter] = zeile[letter] + klein[letter]
            if text[stelle] == gross[letter]:
                zeile[letter] = gross[letter] + zeile[letter]
            if len(zeile[letter]) > maximal:
                maximal += 1
    while maximal > 0:
        for letter in range(0, len(klein)):
            if (len(zeile[letter]) == maximal):
                print(zeile[letter])
        maximal -= 1
```

Zunächst werden die Listen der Klein- und Großbuchstaben definiert. Für das ß wird als Großbuchstabe ein Dollarzeichen genommen, das hoffentlich in einem Gedicht nicht vorkommt.

Dann werden leere Textzeilen `zeile` definiert - für jeden Buchstaben eine. Jetzt wird in einer Schleife jedes Zeichen des Textes untersucht. Dazu wird jeweils bei jedem Buchstaben aus der Liste geprüft, ob es dieser ist, und der Buchstabe wird hinten an die Zeile angefügt, falls es ein Kleinbuchstabe ist, und vorne, falls es ein Großbuchstabe ist. Gleichzeitig wird in der Variablen `maximal` Buch darüber geführt, wie lang die aktuell längste Zeile ist.

Ist das Erzeugen der Zeilen abgeschlossen, werden die Zeilen ausgegeben, und zwar zunächst alle Zeilen, die die Länge `maximal` haben, in der Reihenfolge, in der die Buchstaben in `klein` gespeichert sind. Danach wird `maximal` um eins erniedrigt und alle Zeilen ausgegeben, die diese Länge haben. Dies wird wiederholt, bis nur noch Zeilen der Länge null übrig sind.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 151

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Jahreszahlen

Welche der Zahlen 2020, 2021, 2022, 2023 ist als eine Summe von vier aufeinander folgenden (natürlichen) Zahlen darstellbar?

Lösung:

Wenn es eine Summendarstellung des vorgegebenen Typs gibt, dann sei n ihr kleinster Summand. Für die vier aufeinanderfolgenden Zahlen gilt dann:

$$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 4(n + 1) + 2.$$

Weil nun nur 2022 von der Form $4(n + 1) + 2$ ist, wobei $n = 504$ ist, ist 2022 die gesuchte Zahl. Tatsächlich gilt: $2022 = 504 + 505 + 506 + 507$.

II. Eine unerwartete Quersumme

Wie groß ist die Quersumme von $10^{226} - 3$?

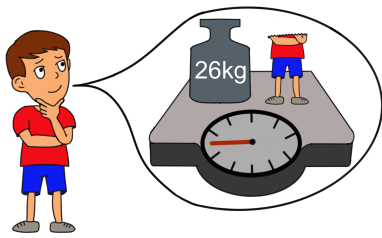
(H.F.)

Lösung:

Es sei $Q(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n . Dann gilt:

$$Q(10^{226} - 3) = Q(\underbrace{999 \dots 9}_{225 \text{ Ziffern } 9} 7) = 225 \cdot 9 + 7 = 2022$$

III. Rätselhaftes Gewicht



Paul sagt: „Mein Gewicht beträgt 26 kg und die Hälfte meines Gewichts.“

Michael meint deshalb: „Du wiegst also $(26 + 13) \text{ kg} = 39 \text{ kg}$.“

Hat Michael recht? (H.F.)

Lösung:

Pauls Gewicht sei $x \text{ kg}$. Dann gilt die Gleichung $26 \text{ kg} + \frac{x}{2} \text{ kg} = x \text{ kg}$, also $\frac{x}{2} \text{ kg} = 26 \text{ kg}$ und somit $x = 52 \text{ kg}$.

Paul wiegt also 52 kg – Michael hat also Unrecht.

IV. Ein Verteilungsproblem

Die Mühlenbesitzer A aus Mühlacker, B aus Mühlhausen und C aus Mühlbach erstehen auf einer Getreideauction gemeinsam eine große Menge Roggen. Sie einigen sich auf folgende Methode der Aufteilung: Zunächst erhält A $\frac{2}{5}$ der Gesamtmenge, dann B $\frac{1}{3}$ der übrigen Menge und dann C die Hälfte des Restes. Diese Art des Teilens wird dann in gleicher Weise weitergeführt, das heißt A , B und C erhalten nacheinander jeweils $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ der jeweils noch verbleibenden Menge.

- a) Wie viel Roggen geht nach Mühlacker?
- b) Wie viel bekommt B , wie viel C ?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

- a) In der ersten Teilungsrunde erhalten A , B und C $\frac{2}{5}$, $(1 - \frac{2}{5}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ und $(1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ der Gesamtmenge. Danach ist noch $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ übrig. Dies wird in den gleichen Verhältnissen geteilt wie die ursprüngliche Menge. Daraus ergibt sich für den Anteil a , der nach Mühlacker geht $a = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}a$, also $a = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$.
- b) In der ersten Runde, und deshalb insgesamt, erhalten B und C gleich viel. Also ergibt sich $b = c = \frac{1-a}{2} = \frac{1}{4}$ für deren Anteile.

V. Vier Primzahlen

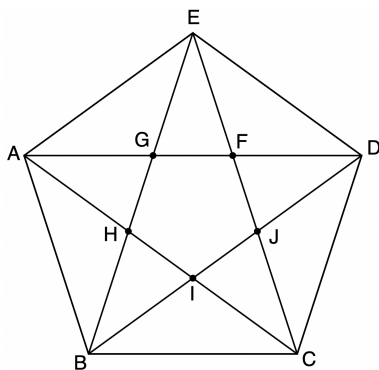
- a) Zeige, dass es für $n \geq 1$ nie mehr als vier Primzahlen zwischen $12n$ und $12(n+1)$ gibt, genauer mit $12n < p < 12(n+1)$.
- b) Finde zwei Beispiele, in denen es tatsächlich vier Primzahlen gibt, und ein Beispiel mit weniger als vier Primzahlen.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

- a) Unter den zwölf Zahlen m mit $12n \leq m < 12(n+1)$ sind sechs gerade; von den ungeraden sind zwei durch 3 teilbar. Es bleiben also vier Zahlen, von denen nicht alle Primzahlen sein müssen.
- b) 13, 17, 19, 23 zwischen 12 und 24; 37, 41, 43, 47 zwischen 36 und 48.
Zwischen 24 und 36 gibt es nur die zwei Primzahlen 29 und 31.

VI. Streckenlänge im regelmäßigen 5-Eck



Zeige, dass im regelmäßigen Fünfeck gilt:

$$|AE| = |AF|.$$

(GS)

Lösung:

Die Winkelsumme im Fünfeck beträgt 540° . Daher hat jeder Winkel 108° . Beim Dreieck ADE handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck aufgrund der Drehsymmetrie. Daher gilt für den Winkel GAE : $(180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$.

Analog oder über die Symmetrieeigenschaften zeigt man, dass auch der Winkel BAH gleich 36° ist. Dann gilt für den Winkel $DAC = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$. Die Diagonalen teilen also jeden Winkel in drei gleichgroße Winkel mit je 36° .

Somit gilt für den Winkel AEF , dass dieser $2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ ist.

Für den Winkel EFA gilt: $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$.

Damit gilt: $AEF = EFA$ und die beiden Winkel bilden die Basiswinkel des Dreiecks EAF . Dieses Dreieck ist gleichschenkelig und daher gilt die Behauptung: $\overline{AE} = \overline{AF}$.

VII. Zum Jahresende

$$\begin{array}{r}
 ABCD \\
 BCD \\
 CD \\
 + \quad D \\
 \hline
 2022
 \end{array}$$

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern $\neq 0$ so, dass eine korrekte Addition entsteht – dabei sind verschiedene (gleiche) Buchstaben jeweils verschiedenen (gleichen) Ziffern zuzuordnen. (H.F.)

Lösung:

Es sei zy eine zweiziffrige Zahl. Ihre Zehnerziffer z nennen wir U_y – etwa: Für 78 ist $U_8 = 7$.

Aus $4D = z2$ (4. Spalte) folgt $4D = 12$, also $D = 3$ und $U_3 = 1$ oder $4D = 32$ mit $D = 8$, $U_8 = 3$.

Aus $D = 8$, $U_8 = 3$ folgt $3C + 3 = z2$, was nur für $z2 = 12$ und damit für $C = 3$, $U_2 = 1$ möglich ist.

Dann ist $2B + U_2 = z0$ und $z0$ ist eine gerade Zahl – ein Widerspruch wegen $U_2 = 1$.

Für $D = 3$ und $U_3 = 1$ gilt $3C + 1 = z2 = 22$. Daher ist

$C = 7$ und $U_1 = 2$, woraus folgt: $2B + U_2 = 10$ mit $B = 4$, 1473

$U_4 = 1$ oder $2B + U_2 = 20$ mit $B = 9$, $U_9 = 2$. 473

Im letzten Fall gilt: $A + U_2 = 2$, sodass $A = 0$ ist – ein Widerspruch. 73

Für $B = 4$, $U_4 = 1$ ist $A = 1$. + 3

Damit lautet die Lösung: $A = 1$, $B = 4$, $C = 7$ und $D = 3$. 2022

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

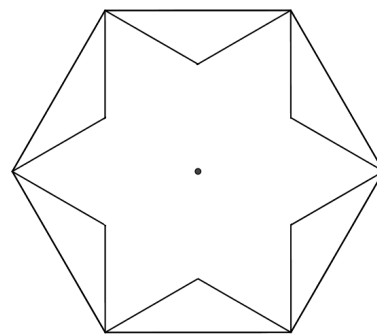
I. Weihnachtsgeschenke

Oma Kajas kauft Weihnachtsgeschenke für ihre Enkel. In ihrem Portemonnaie hat sie zehn Geldscheine und zwar nur 50-Euro-Scheine und 5-Euro-Scheine.

Im ersten Geschäft gibt sie für Geschenke die Hälfte ihres Geldes aus, im zweiten die Hälfte des Restes und im dritten Geschäft wieder die Hälfte des verbliebenen Betrages. Bei keinem ihrer Einkäufe erhält sie Münzen als Wechselgeld. Wie viel Geld hat Oma Kajas ausgegeben? (WJB; MG, CHA)

II. Bastel-Abfall

Karin schneidet aus einem regelmäßigen Sechseck vom Flächeninhalt $F = 6 \text{ cm}^2$ sechs kongruente Dreiecke (vergleiche Figur) heraus und erhält so einen symmetrischen sechszackigen Stern. Die Seiten der ausgeschnittenen Dreiecke liegen dabei genau auf den Verbindungslinien zwischen Eckpunkten des Dreiecks und den jeweils übernächsten Eckpunkten im Sechseck.



Ist die Fläche des Sterns zweimal oder mehr oder weniger als zweimal so groß wie die Grundfläche der ausgeschnittenen Dreiecke? (H.F.)

III. Ein Zahlendreieck

```

      1
    3 4 5
  7 8 9 10 11
13 14 15 16 17 18 19
.....

```

- Gib die siebte Zeile an.
- Berechne die Summe der n -ten Zeile.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

IV. Multiplikative-magische Quadrate

128	1	32
4	16	64
8	256	2

Figur 1

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Figur 2

Ein Zahlenquadrat heißt *multiplikativ-magisch*, wenn die Produkte der Zahlen einer jeder seiner Zeilen, seiner Spalten und seiner Diagonalen einen gleichen Wert m haben; m heißt das *magische Produkt*.

- Überprüfe selbst, dass das 3×3 -Quadrat der Figur 1 multiplikativ-magisch und dass $m = 16^3$ ist.
- Zeige: Wenn das 3×3 -Quadrat multiplikativ-magisch ist, dann gilt für sein magisches Produkt $m = e^3$ (vgl. Figur 2).

(H.F.)

V. Einer zahlt nicht

Fünf Freunde P , Q , R , S und T verbringen einen Abend im Gasthaus. Als sie aufbrechen wollen, entsteht die Frage, wer von ihnen – wie bei ihnen üblich – die Rechnung von 68 Euro bezahlen soll.

P sagt: „ Q hat heute mehr als 100 Euro in der Tasche – er könnte daher zahlen.“

R sagt: „ Q hat doch nie Geld im Beutel.“

S sagt: „Aber diesmal hat Q mindestens 68 Euro dabei.“

T sagt: „ R lügt.“

Von diesen fünf Aussagen ist nur eine wahr.

Kann Q die Rechnung bezahlen oder nicht? (H.F.)

VI. Fahrradtour

Die Zwillingsschwestern Jorina und Ricarda wollen mit ihren Fahrrädern zu einer 40 km entfernten Jugendherberge fahren. Vor der geplanten Abfahrt um 8 Uhr stellen sie fest, dass ihr Cousin Torben ungefragt mit Ricardas Rad weggefahren ist. Zunächst wollen beide zu Fuß gehen, aber Jorina glaubt, eine bessere Idee zu haben: „Ich fahre eine Stunde lang und stelle das Fahrrad dann ab. Wenn Du die Stelle erreichst, nimmst Du das Rad und fährst eine Stunde lang, während ich zu Fuß gehe. So wechseln wir uns ab, bis wir am Ziel sind. Dieses erreichen wir dann schneller.“

- a) Stimmt Jorinas Behauptung?
- b) Wann erreicht Jorina das Ziel und wann Ricarda, wenn sie zu Fuß 5 km und mit dem Fahrrad 10 km in der Stunde schaffen? (Wolfgang J. Bühler, Diez)

VII. Drei Zahlenrätsel

Finde jeweils die zweiziffrigen Zahlen, für die gilt:

- a) Die Zahl a ist dreimal so groß wie die Summe ihrer Ziffern.
- b) Die Zahl b ist doppelt so groß wie das Produkt ihrer Ziffern.
- c) Die Summe aus c und der Spiegelzahl* von c ist eine Quadratzahl.

Begründe Deine Lösungen. (H.F.)

* 95 ist Spiegelzahl von 59 und so weiter.

Neue Aufgaben

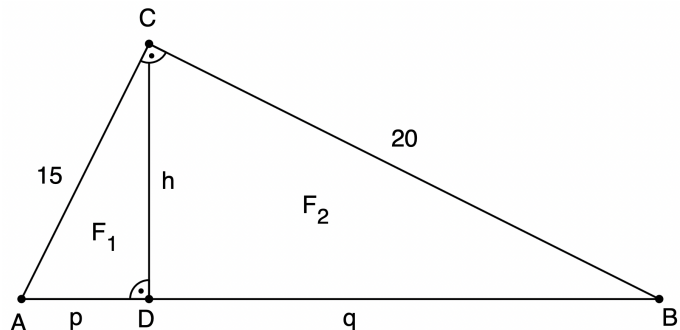
Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

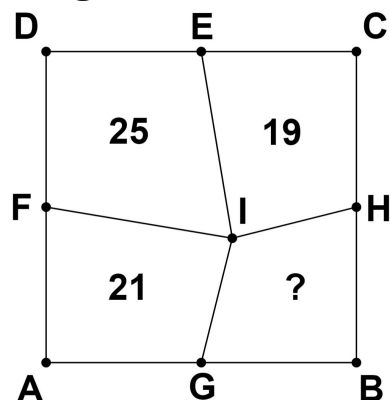
Leider hat in der Aufgabenstellung der Aufgabe 1309 eine wichtige Angabe gefehlt, sodass die Aufgabe nicht lösbar war. Daher stellen wir Euch die Aufgabe hier noch einmal, damit Ihr auch hier knobeln und Punkte sammeln könnt:

Aufgabe 1309: Flächen im rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 20$, $b = 15$ und $c = 25$. Ferner sei D der Höhenfußpunkt der Höhe auf die Seite c . Bestimme die Flächeninhalte der Dreiecke ADC und DBC . (H.F.)



Aufgabe 1310: Flächeninhalt einer Teilfläche



$ABCD$ ist ein Quadrat. E , F , G und H sind die Seitenmitten (Bild nicht maßstäblich). Punkt I im Inneren des Quadrats bildet mit je zwei zueinander benachbarten Seitenmitten und dem dazwischen liegenden Eckpunkt vier Vierecke, von denen drei Flächeninhalte angegeben sind.

Wie groß ist der vierte Flächeninhalt?

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Aufgabe 1311: Eine Froschgleichung

$$\sqrt{QUAK} = Q + UA + K,$$

wobei $K = Q + 5$, und $Q \neq 0$ ist.

Ersetze in der Gleichung gleiche (ungleiche) Buchstaben durch gleiche (ungleiche) Ziffern so, dass eine korrekte Zahlengleichung entsteht.

Die Aufgabe ist ohne Computer zu lösen.

(H.F.)

Aufgabe 1312: Beim Bowling

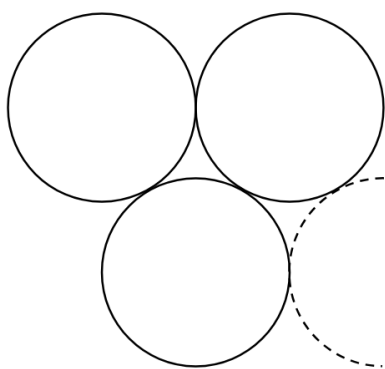
Tatjana und Martina besuchen einen Bowling-Club. Sie verabreden, dort nach ihrer eigenen Gewinn-Regel zu kegeln. Sie kegeln abwechselnd; gewonnen hat wer als Erste mit nur einem Wurf „Alle Zehn“ (kurz: AZ) wirft. Jede von ihnen erzielt AZ mit 50% Wahrscheinlichkeit (kurz $p = 50\%$).

Wenn Tatjana oder Martina als Erste die Kugel wirft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit,

- a) dass Tatjana mit ihrem n -ten Wurf, wobei $n \geq 1$, gewinnt?
- b) dass Tatjana spätestens mit ihrem n -ten Wurf gewinnt?

(H.F.)

Aufgabe 1313: Eine Parkettierung der Ebene



Die Ebene sei vollständig überdeckt mit Kreisen vom Radius r , von denen sich jeweils drei von außen berühren, sowie mit den von drei solcher Kreise begrenzten Gebieten.

Welcher Prozentsatz $p\%$ der Ebene wird nicht von den Kreisen überdeckt?

(H.F.)

Aufgabe 1314: Zehnerziffer einer Zahl

Begründe, dass die Zehnerziffer jeder Potenz 3^n , für $n \geq 3$, gerade ist. (H.F.)

Aufgabe 1315: ? gesucht

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x^3 + y^3 &= 3 \\x^5 + y^5 &= ?\end{aligned}$$

Vorsicht: Die „optisch schöne“ Gleichung $x^5 + y^5 = 5$ ist falsch.

Hinweis: $1 = 1^3 = 1^5$.

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Aufgabe 1316: Quadrat und Haus vom Nikolaus

Ein Quadrat soll mit höchstens vier Schnitten in Dreiecke zerlegt werden, die zu einem Fünfeck („Haus vom Nikolaus“, siehe Grafik) verschoben werden können.

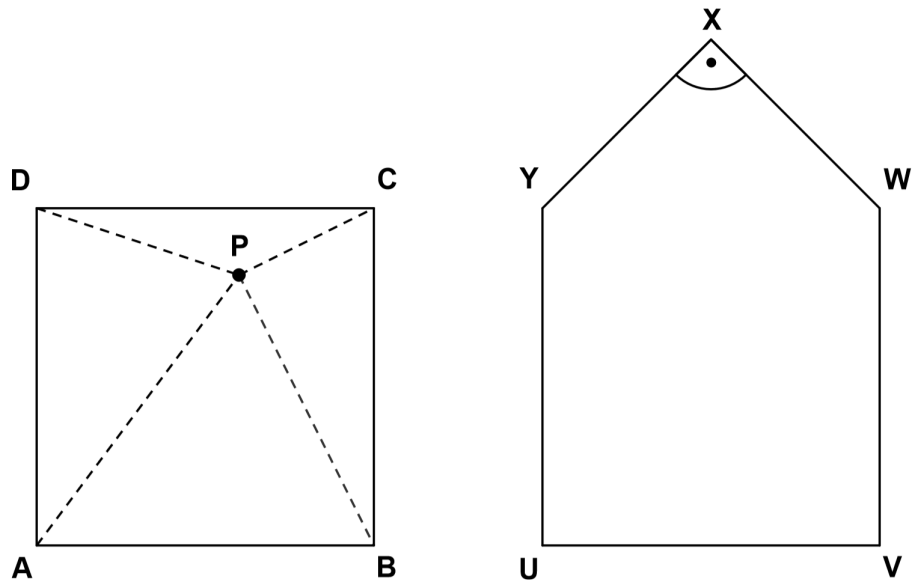
Anleitung:

1. Zeichne ein Quadrat $ABCD$
2. Markiere einen geschickt gewählten Punkt P im Quadrat. Das Problem besteht im Wesentlichen aus der geschickten Wahl.
3. Ziehe die Linien PA , PB , PC und PD . Schneide entlang der Linien das Papier.

4. Die vier Dreiecke ABP , BCP , CDP und DAP werden jetzt so gedreht und geschoben, dass ein Fünfeck $UVWXY$ entsteht, das den Umriss des „Haus vom Nikolaus“ bildet.

Wie muss man P wählen und wie muss man die Dreiecke schieben und drehen, damit das klappt?

Hinweis: „Das Haus vom Nikolaus“ ist das Fünfeck $UVWXY$ mit den Eigenschaften: $UVWY$ ist ein Quadrat, WXY ist ein gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei X .



(AcK)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 151

Klassen 9–13

Aufgabe 1303: Sechsstellige Zahlen

- Wie viele sechsstellige Zahlen gibt es, in denen zweimal die Ziffer 1 und jede der Ziffern 2, 3, 5, 6 einmal vorkommt?
- Wie viele dieser Zahlen sind kleiner als 121653?
- Du würfelst sechsmal und schreibst die gewürfelten Augenzahlen in der erwürfelten Reihenfolge hin. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die entstehende Zahl kleiner ist als 121653?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

- Wir bilden die Zahl, indem wir zuerst der 2 eine der sechs Stellen zuordnen, dann der 3 eine der fünf noch freien Stellen, der 5 eine der vier verbliebenen Stellen, der 6 eine der drei restlichen Stellen und schließlich die noch freien

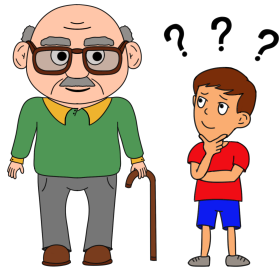
beiden Stellen jeweils mit 1 belegen, das heißt es gibt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ solche Zahlen.

- b) Kleinere Zahlen ergeben sich, wenn die ersten beiden Ziffern 11 lauten. Für die anderen Ziffern haben wir dann $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten. Ebenfalls kleiner sind die Zahlen mit Anfangsziffern 121 und vierte Ziffer kleiner als 6, davon gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Schließlich haben wir noch die Zahl 121635, insgesamt also $24 + 4 + 1 = 29$ Fälle.
- c) Wir orientieren uns an der Fallunterscheidung in Aufgabenteil b: Zwei Anfangsziffern 1 hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. Drei Anfangsziffern 121 und vierte Ziffer kleiner als 6 tritt mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ auf. Dazu kommt die Zahl 121635 mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^6$. Insgesamt ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(6^4 + \frac{5^4}{6} + 1\right) \approx 0,0317.$$

Bemerkung: Wählt man eine der nach Aufgabenteil a möglichen Zahlen zufällig aus, so ist diese mit Wahrscheinlichkeit $\frac{29}{360} = 0,081$ kleiner als 121653.

Aufgabe 1304: Wie alt bin ich?



Einen Monat vor meinem letzten Geburtstag fragte mich ein Enkelkind nach meinem Alter. Ich gab ihm folgende Auskünfte über mein Alter in Monaten:

- a) Mein Alter minus 2 ist nicht durch 3 teilbar.
- b) Teilst du mein Alter durch 5, so ist der Rest kleiner als 3.
- c) Teilst du es durch 7, so ist der Rest nicht 6.
- d) Teilst du durch 8, so ist der Rest größer als 3.
- e) Die Reste bei Division durch 5 und durch 8 sind verschieden.

Alle diese Auskünfte waren falsch. Wie alt bin ich in Jahren?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

- Da b, d und e falsch sind, ist der Rest bei Division durch 8 jeweils 3, also auch bei Division durch $8 \cdot 5 = 40$.
- Da a falsch ist, reduziert sich dies zu 83, $83 + 3 \cdot 40$, $83 + 6 \cdot 40$, ..., das heißt 83, 203, 323, 443, 563, 683, 803, 923, 1043, 1163. Größere Zahlen in dieser Folge dürfen wir vergessen, da ich nicht über 100 Jahre alt bin.

3. Die einzigen der in b gefundenen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 6 Besitzen sind $83 = 11 \cdot 7 + 6 = 40 \cdot 2 + 3 = 6 \cdot 12 + 11$ und $923 = 131 \cdot 7 + 6 = 29 \cdot 44 + 3 = 76 \cdot 12 + 11$. Ich bin also jetzt 77 Jahre alt.

Aufgabe 1305: Nullstellen zweier Polynome

Zeige:

- Ein Polynom P vom Grad 78, dessen Koeffizienten alle ganzzahlig und vom Betrag echt kleiner als 40 und paarweise verschieden sind, hat mindestens eine Nullstelle.
- Das Gleiche gilt für ein Polynom vom Grad 79.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

- Die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{78}$ sind die Zahlen $-39, -38, \dots, 38, 39$. Also ist $P(1) = a_0 + \dots + a_n = 0$.
- 79 ist ungerade. Deshalb gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

Hinweis: Dies gilt nur, wenn der Koeffizient vor dem Glied mit Grad 79 positiv ist. Ist dieser Koeffizient negativ, so drehen sich die Grenzwerte um. In beiden Fällen muss es dazwischen eine Nullstelle geben.

Aufgabe 1306: Teilbarkeit durch 6

Zeige, dass $A_n = 12n^4 + n^3 + 6n^2 + 17n - 6$ für jedes n durch 6 teilbar ist.
(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

A_n ist genau dann durch 6 teilbar, wenn $B_n = n^3 + 17n$ durch 6 teilbar ist.
Ist $n = 2m$, also n gerade, so gilt

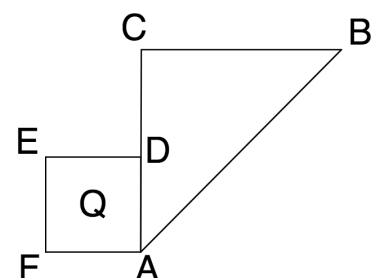
$$B_n = 2m(4m^2 + 17) = 2m((2m + 1)(2m - 1) + 1 + 17)$$

und von den Faktoren $2m$, $(2m + 1)$ und $2m - 1$ ist einer durch 3 teilbar.

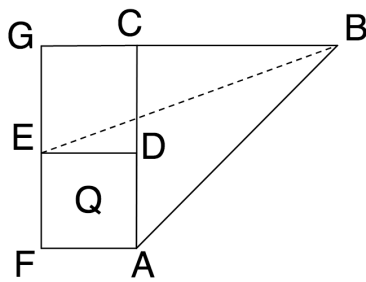
Ist $n = 2m + 1$, so ist $B_n = (2m + 1)((2m + 1 + 1)(2m + 1 - 1) + 1 + 17)$ und wieder haben wir ein Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen.

Aufgabe 1307: Kürzester Abstand

In der Figur ist $Q = ADEF$ ein Quadrat der Seitenlänge 1 und ABC ist ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck dessen Schenkel die Länge 3 besitzen. Wie groß ist der Abstand der Punkte E und B ?
(H.F.)



Lösung:



Ergänze die Figur durch die Strecken CG auf der Geraden CB und GE auf der Geraden EF . Dann sind $|GE| = |CA| - |AD| = 3 - 1 = 2$ und $|BG| = |BC| + |DE| = 3 + 1 = 4$. Daraus folgt:

$$|BE|^2 = |BG|^2 + |GE|^2 = 4^2 + 2^2 = 20.$$

Also ist $|BE| = \sqrt{20}$.

Aufgabe 1308: Folge von Gleichungen

$$6^2 - 3^2 = 3^3, \quad 10^2 - 6^2 = 4^3, \quad 15^2 - 10^2 = 5^3, \dots$$

Errate, wie diese Folge von Gleichungen weiter geht, und beweise die Richtigkeit Deiner Vermutung. (Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

Es gilt $3 = \binom{3}{2}$, $6 = \binom{4}{2}$, $10 = \binom{5}{2}$, $15 = \binom{6}{2}$.

Man kommt damit zu der Vermutung $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = n^3$ und beweist die Richtigkeit durch Nachrechnen.

Aus $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ und $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ folgt

$$\binom{n+1}{2}^2 - \binom{n}{2}^2 = \frac{1}{4} ((n^4 - 2n^3 + n^2) - (n^4 + 2n^3 + n^2)) = \frac{1}{4} \cdot 4n^3 = n^3.$$

Die besondere Aufgabe

Can't stop!

von Achim Klenke

Beim beliebten Würfelspiel *Can't stop!* werden vier Würfel geworfen und dann in beliebiger Weise zu zwei Paaren zusammengestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wurf, aus dem wenigstens ein Paar mit einer Augensumme von sieben gebildet werden kann?

Lösung

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$p = \frac{139}{216} = 64,35 \dots \%$$

Um dies zu zeigen, definieren wir zunächst die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_6$. Und zwar beschreibt A_i das Ereignis, dass wenigstens ein Würfel die Augenzahl i zeigt. Zusätzlich definieren wir noch die Ereignisse B_1, B_2 und B_3 durch

$$B_i = A_i \cap A_{7-i}.$$

Das heißt, B_i tritt ein, wenn wenigstens ein Würfel i Augen zeigt und wenigstens ein Würfel $7 - i$ Augen. Das gesuchte Ereignis ist

$$C = B_1 \cup B_2 \cup B_3,$$

nämlich, dass wenigstens eines der B_i eintritt. (Beachte, dass wir B_4 , B_5 und B_6 nicht brauchen, weil diese Ereignisse gleich B_3 , B_2 und B_1 sind.) Das Gegenereignis B_i^c besteht aus allen Würfeln, so dass keiner der vier Würfel i Augen zeigt oder keiner $7 - i$ Augen:

$$B_i^c = A_i^c \cup A_{7-i}^c.$$

Wir gehen davon aus, dass die vier Würfel unterscheidbar sind, sagen wir mit kleinen Nummern an einer Ecke. Dann ist jedes Ergebnis der vier Würfel durch die Augenzahlen W_1, W_2, W_3, W_4 beschrieben und für jede Augenzahl gibt es sechs Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $6^4 = 1296$ gleich wahrscheinliche Ausgänge des Experimentes. Wir müssen nur noch die Anzahl der Ausgänge bestimmen, bei denen die Augensumme 7 bei einem Paar auftritt.

Die Anzahl der Möglichkeiten für B_i^c ist

$$\#B_i^c = \#A_i^c + \#A_{7-i}^c - \#(A_i^c \cap A_{7-i}^c).$$

Der Subtrahend kommt daher, dass wir bei der Summe das Ereignis, dass weder i noch $7 - i$ geworfen werden, doppelt gezählt haben. Damit A_i^c eintritt, darf jeder Würfel jede Zahl außer i zeigen. Insgesamt ist also $\#A_i^c = 5^4 = 625$ für jedes i . Genauso erhalten wir $\#(A_i^c \cap A_{7-i}^c) = 4^4 = 256$, also

$$\#B_i = 1296 - \#B_i^c = 1296 - 2 \cdot 625 + 256 = 302.$$

Nun bestimmen wir die Anzahl der Elemente von C :

$$\#C = \#B_1 + \#B_2 + \#B_3 - \#(B_1 \cap B_2) - \#(B_1 \cap B_3) - \#(B_2 \cap B_3).$$

Die Subtrahenden kommen wieder daher, dass wir diese Ereignisse in der Summe doppelt gezählt haben. Im Prinzip haben wir jetzt noch $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ einmal zu oft abgezogen, aber dieses Ereignis ist unmöglich, weil es sechs verschiedene Augenzahlen verlangt. Wir haben aber nur vier Würfel.

Das Ereignis $B_1 \cap B_2$ tritt genau dann ein, wenn die Würfel die Augenzahlen 1, 2, 5 und 6 zeigen. Dafür gibt es $4! = 24$ Möglichkeiten (Reihenfolgen). Das Gleiche gilt für $B_1 \cap B_3$ und $B_2 \cap B_3$. Insgesamt haben wir also

$$\#C = 3 \cdot 302 - 3 \cdot 24 = 834.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$p = \frac{\#C}{1296} = \frac{834}{1296} = \frac{139}{216}.$$

Aus den Archiven der Mathematik

Thales und der Tunnel von Samos

von Hartwig Fuchs

Der Tunnelbauer Thales

Thales (642/625 bis zwischen 548 und 544 v. Chr.), aus der damals wichtigen antiken Handelsstadt Milet an der kleinasiatischen Küste – heute eine imposante Ruinenstätte – war ein weitgereister, erfolgreicher Kaufmann. Im fortgeschrittenen Alter jedoch gab er sein bisheriges Leben auf und widmete sich fortan hauptsächlich seinen wissenschaftlichen Interessen. Dabei gelangte er als Begründer der antiken Naturphilosophie und mehr noch für die Mathematik zu großer Bedeutung. Denn er war vermutlich der Erste, der nach den Ursachen für die Gültigkeit mathematischer Aussagen fragte, wodurch er eine Entwicklung anstieß, die letztendlich zu der Mathematik mit ihrer Grundforderung „Beweise es!“ geführt hat, die wir heute kennen.

Thales war aber nicht nur ein Theoretiker – er hat seine Erkenntnisse auch bei der Lösung praktischer Probleme verwendet. So berichtet der griechische Historiker Herodot (um 484–425 v. Chr.) von hervorragenden Ingenieurleistungen des Mileters – eine davon soll hier beschrieben werden.

Der Tunnelbau auf der Insel Samos

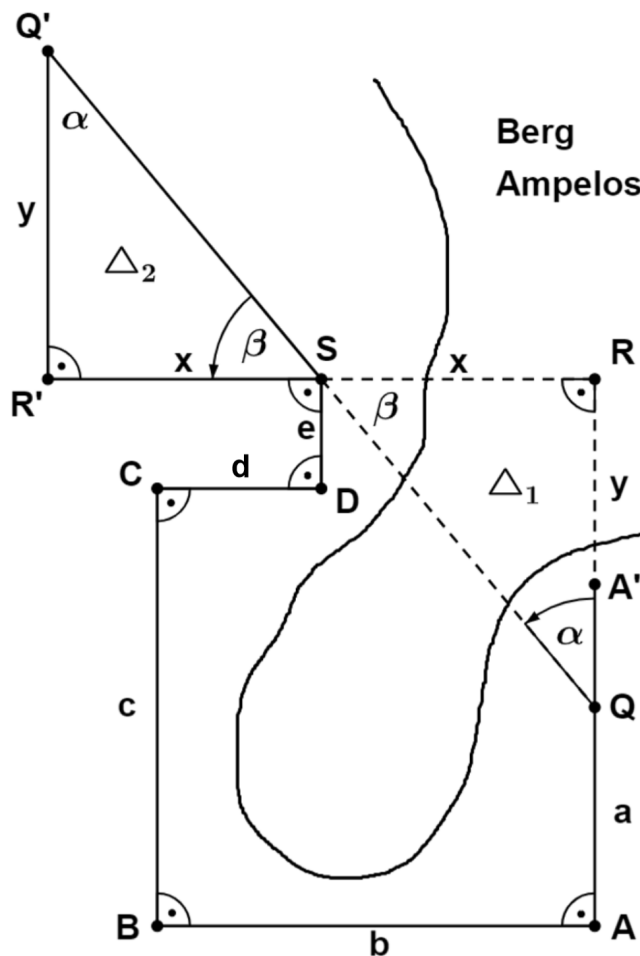
Die Bürger der Stadt Samos auf der gleichnamigen Insel, am Berg Ampelos gelegen, beauftragten Thales, einen Tunnel zu konstruieren, durch den man Wasser von einer Quelle jenseits des Berges in ihre Stadt leiten konnte. Der Tunnel wurde tatsächlich gebaut, denn Archäologen haben ihn 1882 entdeckt – ich war selbst mal drin.

Das Bemerkenswerte am ungefähr 1000 m langen Thalestunnel ist, dass er von seinen beiden Enden her gegraben wurde und dass sich die Bergleute in der Mitte nur um 10 m in der Horizontalen und der Vertikalen um 2 m verfehlten – durch eine Biegung im Tunnel wurde diese Abweichung korrigiert – man sieht das heute noch am Tunnelverlauf.

Dieser Tunnel konnte nur in der damals neuartigen Bauweise mit einem so geringen Fehler begraben werden, wenn Thales dabei nach einem geeigneten Plan vorging. Aber wie? Sein Bauplan war bereits in der Antike nicht mehr bekannt. Das belegt ein Rekonstruktionsversuch des Mathematikers Heron (um 62 n. Chr.), der sich nur auf geometrische Tatsachen gründet, von denen Heron annahm, dass sie Thales bekannt waren – siehe unten die Sätze (1) und (2). Er erscheint uns so plausibel, dass wir ihn hier – in etwas modifizierter, vereinfachter Form – darstellen werden.

Thales konnte das Projekt eines von seinen Enden her zu bauenden Tunnels von

der Stadt Samos (S) zu der Wasserquelle (Q) nur verwirklichen, weil es ihm vorweg zweifellos gelungen war, die Richtung zu bestimmen, in der von S aus und von Q aus zu graben war. Heron glaubt zu wissen, dass Thales dazu einen Plan zumindest ähnlich dem nachfolgenden entwickelt hat.



Ein Bauplan (siehe Figur)

- Festlegung einer beliebigen Strecke AA' durch den Punkt Q (Q – die Quelle).
- Festlegung eines Streckenzugs $QABCD$ mit abgemessenen Teilstrecken sowie:
 $|QA| = a$,
 $AB \perp QA$ und $|AB| = b$,
 $BC \perp AB$ und $|BC| = c$,
 $CD \perp BC$ und $|CD| = d$,
 $DS \perp CD$ und $|DS| = e$.

Eine geometrische Überlegung: Es sei R ein Punkt auf dem Berg Ampelos auf der Verlängerung von AA' , für den gilt: $SR \perp RQ$. Dann ist $\triangle_1 = SQR$ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen x und y , deren Berechnung der Streckenzug $QABCD$ ermöglicht: Es sind $x = b - d$ und $y = c + e - a$.

- Festlegung des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle_2 = SQ'R'$ mit $SR' \perp SD$ (also SR' in der Verlängerung von SR) und $|SR'| = x$ sowie mit $R'Q' \perp SR'$, $|R'Q'| = y$.

Thales hat wohl gewusst:

- (1) Wenn in zwei Dreiecken $\triangle_1$ und $\triangle_2$ zwei Seiten und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich groß sind, dann sind alle Seiten und Winkel in beiden Dreiecken gleich groß.
- (2) Bei zwei einander schneidenden Geraden sind die einander gegenüberliegenden Schnittwinkel (Scheitelwinkel) gleich groß.

Für die Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ der Figur gilt:

- (3) Ist $\angle QSR = \beta$ in $\triangle_1$, so ist auch $\angle Q'SR' = \beta$ in $\triangle_2$.

Wegen Satz (2) gilt nämlich: Der dem Winkel $\sphericalangle RSQ = \beta$ gegenüberliegende Winkel, der sich an den in S schneidenden Strecken RR' und QQ' befindet, besitzt ebenfalls die Größe β und wegen Satz (3), ist er dann der Winkel $\sphericalangle Q'SR'$. Daraus folgt: Die Strecke SQ' ist eine Verlängerung von QS . Mit dem Winkel $\sphericalangle Q'SR' = \beta$ ist daher die Richtung ermittelt, in der der Tunnel von S aus zu graben ist. Da $\sphericalangle A'QS = \alpha = 90^\circ - \beta$ ist, kennt man auch die Grabungsrichtung von Q aus.

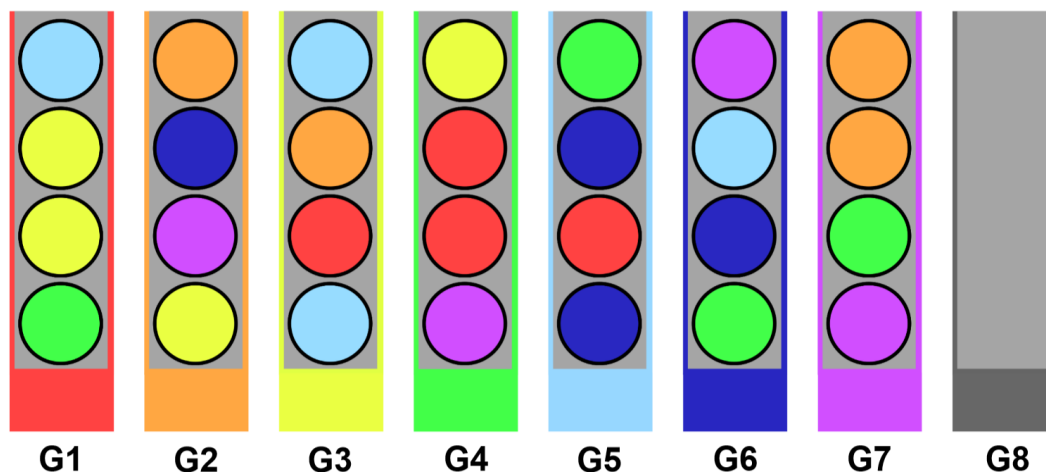
Bemerkung

Es ist möglich, dass das Gelände um S die Festlegung des Dreiecks $SQ'R'$ nicht erlaubt, denn es könnte der Punkt Q' im Wasser liegen: Die Stadt Samos liegt an der Küste des Mittelmeers. In diesem Fall verkürzt man jede Seite des Dreiecks $SQ'R'$ mit einem geeigneten Faktor f , wobei $0 < f < 1$, und zwar so, dass der Punkt S ein Eckpunkt des neuen Dreiecks ist. Mit der Kenntnis des Winkels β des neuen Dreiecks kennt man dann auch den Winkel α des Dreiecks SQR .

Mathematische Entdeckungen

In der „Frag doch mal die Maus“-Show vom 30. April 2022 (ARD) wurden die Kandidaten aufgefordert, folgendes Problem zu lösen: In acht Gestellen $G1$ bis $G8$ ist jeweils Platz für vier bunte Kugeln übereinander. Die linken sieben Gestelle $G1$ bis $G7$ haben jeweils eine eigene Farbe und zu jeder dieser sieben Farben gibt es vier gleichfarbige Kugeln. Das achte Gestell hat keine Farbe. Anfangs liegen die 28 Kugeln bunt durcheinander in den acht Gestellen. Das Ziel besteht darin, in jedem Gestell die Kugeln der zugehörigen Farbe zu sortieren. Dabei darf in jedem Schritt aus einem der Gestelle die oberste Kugel entnommen und von oben in eines der Gestelle gelegt werden, in dem noch Platz ist. Wir haben ein Scratch-Programm zum Ausprobieren ins Netz gestellt:

<https://scratch.mit.edu/projects/691480451/>.



- Wie viele unterschiedliche Anfangssituationen gibt es? Das achte Gestell G8 muss nicht (wie im Bild) leer sein.
- Gib eine Zugfolge an, mit der die Kugeln aus der Position in der Grafik sortiert werden. Wie viele Züge brauchst Du? Die kürzeste Zugfolge bekommt zwei zusätzliche Punkte.
- Gib ein Verfahren (Algorithmus) an, mit dem man die Kugeln aus jeder Anfangsposition in die sortierte Zielposition bringen kann.

Damit wir in Teil b Deine Lösung prüfen können, sende bitte die Zugfolge in folgendem Format. Dies kann handschriftlich oder als Txt-Datei sein.

Wird im ersten Schritt die (oberste) Kugel aus Gestell 1 in Gestell 3
gelegt, dann die aus Gestell 2 in Gestell 3 und schließlich die aus Gestell 3
in Gestell 5, so soll die Aufzeichnung aussehen wie nebenstehend.

1	3
2	3
3	5

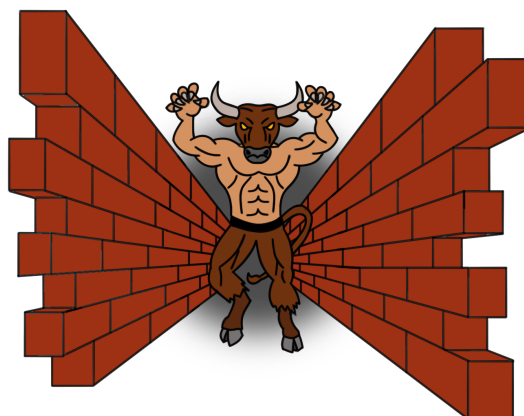
(Ack)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2023 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

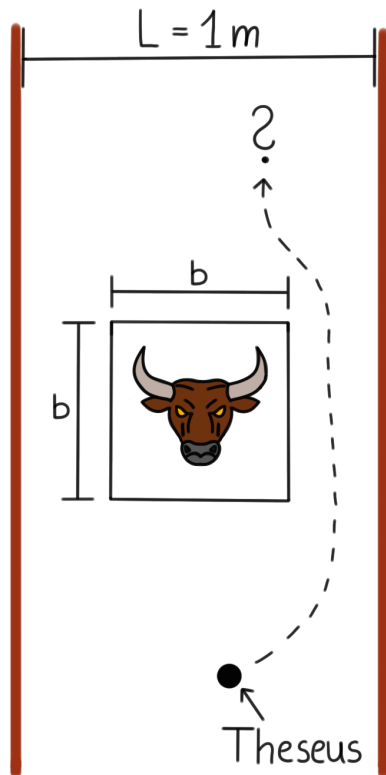
Lösung der Aufgabe aus Heft 150

Im Heft 150 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Der Minotaurus im Gang



Theseus folgt im Labyrinth in Knossos einem (unendlich) langen geraden Gang. Plötzlich versperrt ihm der gefährliche Minotaurus den Weg. Wenn der Minotaurus Theseus berührt, ist es aus... Glücklicherweise läuft der Minotaurus nur halb so schnell wie Theseus. Schafft Theseus es, durch ein geschicktes Manöver an dem Minotaurus vorbeizukommen und seinen Weg fortzusetzen?



Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Minotaurus quadratisch ist mit Seitenlänge b . Das Quadrat ist mit zwei Seiten immer parallel zu den Wänden des Ganges ausgerichtet. Theseus hingegen ist punktförmig. Die Wände des Ganges sind parallel im Abstand $L = 1$ m.

Betrachte folgende Szenarien (mit wachsendem Schwierigkeitsgrad):

- Der Minotaurus und Theseus dürfen sich zu jedem Zeitpunkt nur in eine der vier Richtungen links, rechts, oben, unten bewegen.
- Der Minotaurus darf sich nur in eine der vier Richtungen bewegen, aber Theseus darf auch schräg gehen.
- Der Minotaurus und Theseus dürfen beide auch schräg gehen.

Schafft Theseus es jeweils, am Minotaurus vorbeizukommen?

(AcK)

Lösung

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Paulina Herber, Josefine Kaßner (beide Gymnasium Oberusel, Klasse 12), Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, Kl. 9).

Wir haben das Problem zum Ausprobieren für Euch programmiert, so könnt Ihr ausprobieren, ob Ihr am Minotaurus vorbei kommt.

<https://scratch.mit.edu/projects/669015485>.

Leider wurde in Monoid 150 die Aufgabenstellung nicht vollständig abgedruckt. In der Aufgabenstellung hätte stehen sollen: $b = 0,31$ m und Minotaurus und Theseus befinden sich anfangs mittig im Gang. Diese Zahl ist so gewählt, weil in den unterschiedlichen Fällen jeweils unterschiedliches passiert. Wir gehen jetzt also von $b = 0,31$ aus. Beide stehen mittig, damit wir eine wohldefinierte Anfangssituation haben, die für beide fair ist.

Wir stellen uns den Gang in vertikaler Richtung gezeichnet vor. Theseus kommt von unten nach oben gelaufen. Die Mitte des Minotaurus hat anfangs die y -Koordinate $M_y = 0$, die Wände haben die x -Koordinaten $-0,5$ und $0,5$. Alles in Metern gerechnet. Die untere Kante des Minotaurus ist also anfangs bei $M_y - \frac{b}{2} = -0,155$.

Um die Geschwindigkeiten zu konkretisieren, nehmen wir an, dass Theseus' Geschwindigkeit $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist, und die des Minotaurus $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wir bezeichnen noch mit $M_x(t)$ die x -Koordinate des Minotaurus zur Zeit t , mit $M_y(t)$ die y -Koordinate,

sowie mit $T_x(t)$ und $T_y(t)$ die Koordinaten des Theseus. Auch schreiben wir $M(t) = (M_x(t); M_y(t))$ und $T(t) = (T_x(t); T_y(t))$.

Theseus läuft in der Mitte des Ganges nach oben, bis er direkt vor dem Minotaurus steht. Sagen wir einen Millimeter unterhalb des Minotaurus bei $(0; -0,156)$. Für den Minotaurus lohnt es nicht, auf Theseus zuzulaufen oder nach oben davonzulaufen. Es lohnt auch nicht, nach links oder rechts zu gehen, weil dann Theseus auf der anderen Seite leichter vorbei kommt. Der Minotaurus wartet also ab, bis Theseus eine Richtung einschlägt.

Wir können also annehmen, dass $M(0) = (0; 0)$ ist und $T(0) = (0; -0,156)$.

Lösung von Teilaufgabe a)

Theseus läuft zunächst bis zur rechten Wand und erreicht diese zur Zeit $t = 0,5$. Der Minotaurus folgt. Wir haben also $T(0,5) = (0,5; -0,156)$ und $M(0,5) = (0,25; 0)$. Danach läuft Theseus nach oben und hofft auf das Beste ... Der Minotaurus läuft aber einfach weiter nach rechts und steht nach weiteren 0,19 Sekunden, also zur Zeit $t = 0,69$ bei $M(0,69) = (0,345; 0)$. Der rechte Rand des Minotaurus steht dann bei $M(0,69) + \frac{b}{2} = 0,5$, also genau an der Wand. Theseus hat es bis dahin aber nur bis $T(0,69) = (0,5; 0,034)$ geschafft. Der Minotaurus hat Theseus erwischt und kann seinen Kindern heute eine leckere Mahlzeit bereiten.

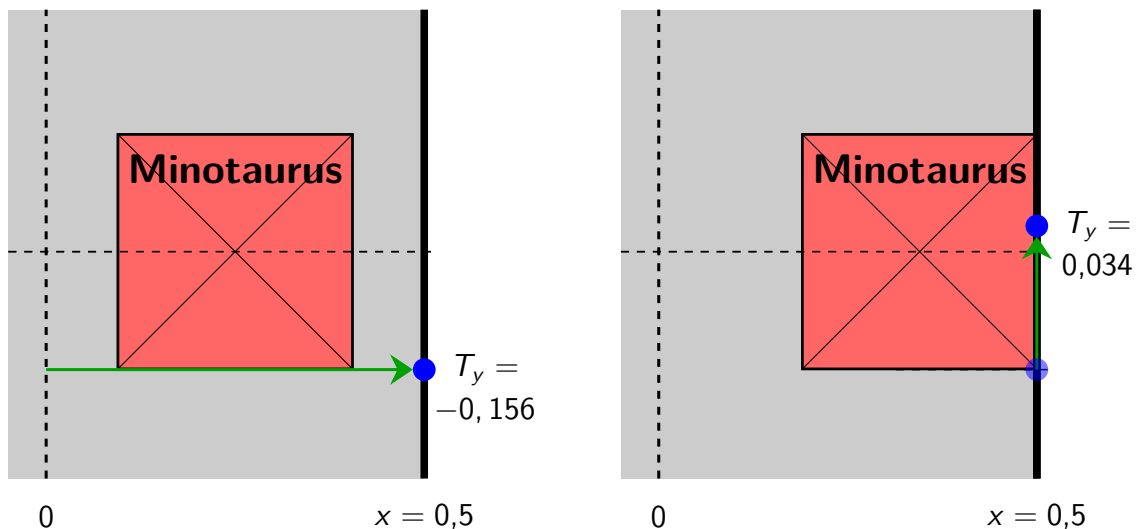


Abbildung 1: (a) Schritt 1: Theseus geht ganz nach rechts, der Minotaurus folgt. Schritt 2: Theseus geht hoch, bis ihn der Minotaurus an die Wand drückt.

Lösung von Teilaufgabe b)

Theseus kann seinen Vorteil, schräg laufen zu dürfen, erst nutzen, wenn er nicht mehr unterhalb des Minotaurus steht. Er läuft also zunächst für 0,314 Sekunden nach rechts, gefolgt vom Minotaurus. Dann ist

$$T(0,314) = (0,314; -0,156) \quad \text{und} \quad M(0,314) = (0,157; 0).$$

Die rechte untere Ecke des Minotaurus ist zu dieser Zeit bei

$$\left(0,157 + \frac{b}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (0,312; -0,155).$$

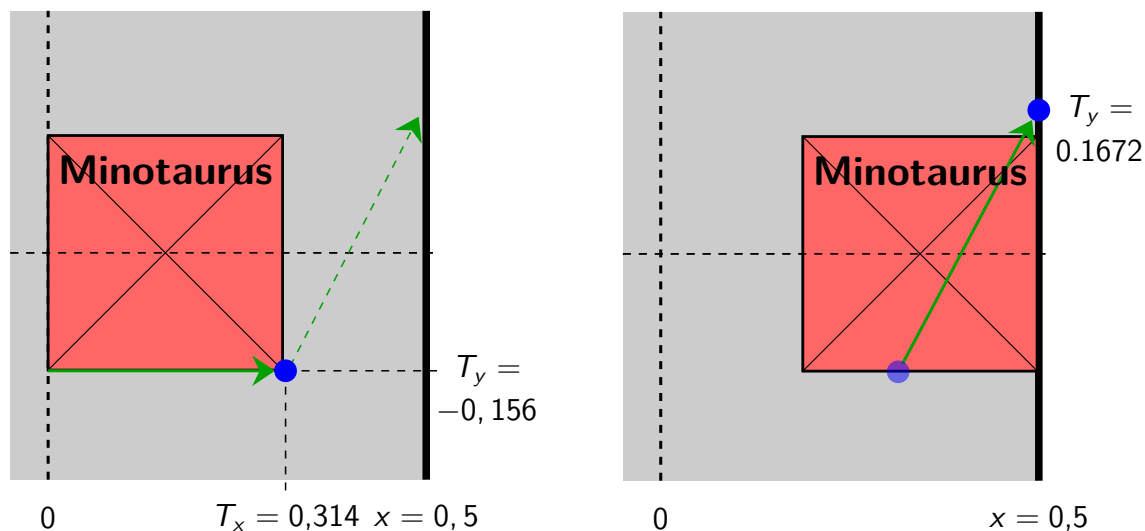


Abbildung 2: (b) Theseus geht nach rechts, bis er gerade so an der rechten unteren Ecke des Minotaurus vorbei ist. Der Minotaurus folgt währenddessen. Dann biegt Theseus nach schräg oben ab und kommt am Minotaurus vorbei.

Jetzt schwenkt Theseus nach links und zwar gerade so weit, dass der Rechts-Anteil seiner Bewegung $v_x = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist, denn damit wahrt er den Vorsprung gegenüber dem Minotaurus. Bezeichnen wir mit v_y den Oben-Anteil der Geschwindigkeit, so ist nach dem Satz des Pythagoras (weil die Geschwindigkeit 1 ist) $1 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{1}{4} + v_y^2$. Auflösen nach v_y liefert

$$v_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86603.$$

Es sind noch $0,5 - 0,314 = 0,186$ m bis zur Wand und Theseus braucht dafür $2 \cdot 0,186 = 0,372$ Sekunden. Währenddessen ist er $0,372 \cdot v_y = 0,322$ m nach oben gelaufen und steht jetzt bei

$$T(0,686) = \left(0,5; -0,155 + 0,372 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (0,5; 0,167).$$

Der Minotaurus steht zur Zeit 0,686 bei $M(0,686) = (0,343; 0)$. Seine rechte obere Ecke ist also bei $(0,498; 0,155)$. Damit ist Theseus am Minotaurus vorbeigekommen.

Lösung von Teilaufgabe c)

Der Anfang geht genau wie in (b). Wir nehmen also gleich an, dass zur Zeit $t = 0$ Theseus und der Minotaurus bereits etwas nach rechts gelaufen sind und

nun bei

$$T(0) = (0,314; -0,156) \quad \text{und} \quad M(0) = (0,157; 0)$$

stehen. Theseus muss nun wieder eine Richtung nach rechts oben wählen und hoffen, dass er am Minotaurus vorbeikommt. Der Minotaurus ist allerdings so siegesgewiss, dass er vorher schon Theseus sagen kann, in welche Richtung er, der Minotaurus, lief, falls Theseus dies versuchte. Der Minotaurus peilt nämlich den Punkt

$$P = (0,5; 0,25)$$

auf dem rechten Rand an und läuft geradewegs so, dass seine rechte obere Ecke diesen Punkt erreichen wird. Zur Zeit $t = 0$ ist der Abstand d der rechten oberen Ecke zu P nach Satz des Pythagoras

$$d = \sqrt{(0,5 - 0,312)^2 + (0,25 - 0,155)^2} = 0,2106395.$$

Er braucht für diese Distanz das doppelte in Sekunden, ist also an der Wand zur Zeit

$$t = 0,421279.$$

Theseus kann nichts besseres tun, als zu versuchen, den Punkt P vor dem Minotaurus zu erreichen. Sein Abstand zu P zur Zeit 0 beträgt allerdings

$$\sqrt{(0,5 - 0,314)^2 + (0,25 + 0,156)^2} = 0,4465781.$$

Zur Zeit $t = 0,421279$ wäre er also noch nicht bei P angekommen. Die Minotauruskinder können sich wie in (a) auf ein leckeres Abendessen freuen.

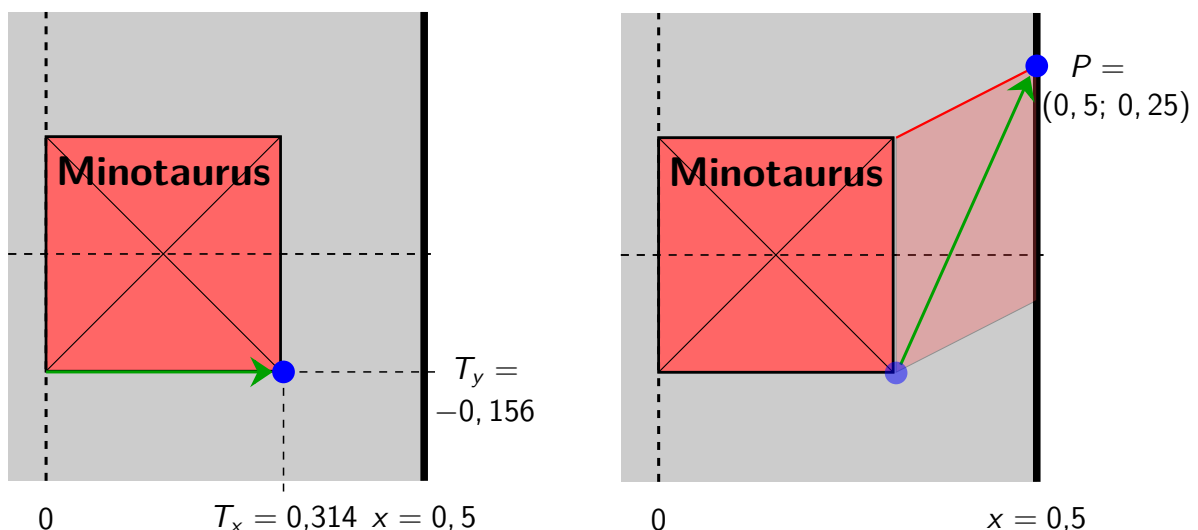


Abbildung 3: (c) Theseus geht nach rechts, bis er gerade so an der rechten unteren Ecke des Minotaurus vorbei ist. Der Minotaurus folgt währenddessen. Dann biegt Theseus nach schräg oben ab, der Minotaurus aber auch. Beide peilen P an, aber der Pfeil ist mehr als doppelt so lang wie die Linie des Weges von Minotaurus von der Ecke rechts oben zu P . Deshalb ist der Minotaurus zuerst da und drückt Theseus gegen die Wand.

Die Regel des Goldhändlers

Hartwig Fuchs

Bei einer Urlaubsreise im Orient entdeckte der Mathematiker Prof. Quaoar einen Laden in einem Basar, in dem man Goldkugeln feilbot. Ein schönes Andenken, dachte Quaoar, betrat das Geschäft und fragte, ob man ihm q Kugeln – alle von verschiedenem Gewicht – verkaufen könne. „Sie haben Glück“, antwortete der Händler, „ich habe Kugeln von jedem ganzzahligen Gewicht bis 10 Gramm anzubieten“. Quaoar zögerte jedoch zu kaufen, da er den Gewichtsangaben des Verkäufers misstraute. Der aber bewies auf pfiffige Weise, dass Quaoar sich irrte: Er legte je ein Kugeln von 2g, von 3g, ..., von 7g in die Schale seiner Balkenwaage sowie je eines von 8g, 9g und 10g in die andere Schale – und danach war die Waage im Gleichgewicht. Daraufhin kaufte Quaoar die 9 Kugeln, denn $2 + 3 + \dots + 7 = 8 + 9 + 10$.

Später überlegte Quaoar, ob des Goldhändlers Folge $(2, 3, \dots, 7 | 8, 9, 10)$ für die $2 + 3 + \dots + 7 = 8 + 9 + 10$ gilt, ein Unikat ist oder ob es noch andere Folgen mit der gleichen Zerlegungseigenschaft gibt.

Daher machte er sich auf die Suche nach n -elementigen Folgen

$F_n(a) = (a, a+1, \dots, c)$, für die es ein b gibt, so dass $S(a, b) = a + a+1 + \dots + b$ und $S(b+1, c) = b+1 + b+2 + \dots + c$ gleich sind – und er fand auch schnell einige solcher Folgen:

n	a	c	$F_n(a)$	b	$S(a,b)$	$S(b+1,c)$
3	1	3	(1,2 3)	2	3	3
9	2	10	(2,...,7 8,9,10)	7	27	27
15	3	17	(3, ..., 12 13, ..., 17)	12	75	75
21	4	24	(4, ..., 17 18, ..., 24)	17	147	147

Die Tabelle lässt einige Regelmäßigkeiten erkennen:

n ist von der Form $n = 6k + 3$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $a = k + 1$, $c = a + n - 1 = k + 1 + 6k + 3 - 1 = 7k + 3$; $b = 5k + 2$ und zuletzt: zwei Drittel aller Zahlen aus $F_n(a)$ sind die Summanden von $S(a, b)$. Von diesen Regelmäßigkeiten gelangt Quaoar zu der Vermutung, die er die Goldhändler-Regel nennt:

- (1) Für jedes n von der Form $n = 6k + 3$, $k = 0, 1, 2, \dots$ gilt für die Folge $F_n(k+1) = (k+1, k+2, \dots, 7k+3)$, dass $S(k+1, 5k+2) = S(5k+3, 7k+3)$ ist.

Einen Beweis seiner Vermutung führte Quaoar mit den bekannten Formeln:

$$S(1, y) = 1 + 2 + \dots + y = \frac{1}{2}y(y+1) \text{ und } S(x, y) = S(1, y) - S(1, x-1) \\ = \frac{1}{2}y(y+1) - \frac{1}{2}(x-1)x.$$

$$\text{Es ist } S(k+1, 5k+2) = \frac{1}{2}(5k+2)(5k+3) - \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}(25k^2 + 25k + 6 - k^2 - k) = 12k^2 + 12k + 3 \text{ und } S(5k+3, 7k+3) = \frac{1}{2}(7k+3)(7k+4) -$$

$\frac{1}{2}(5k+2)(5k+3) = \frac{1}{2}(49k^2 + 49k + 12 - 25k^2 - 25k - 6) = 12k^2 + 12k + 3$, womit Quaoars Vermutung bewiesen ist. Nach diesem Zwei-Zeilen Beweis seiner Vermutung (1) stellte sich Prof. Quaoar sogleich die naheliegende Frage:

- (2) Gibt es auch für Zahlen n von der Form $n = 6k + i$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$ und $i = 0, 1, 2, 4$ und 5 ebenfalls n -elementige Folgen $F_n(k+1) = (k+1, k+2, \dots, c)$ mit $c = k+1+n-1 = 7k+i$, für die die Goldhändler-Regel gilt?

Das ist sicher nicht der Fall für $i = 1, 2, 4$ und 5 , denn $\frac{2}{3}n = 4k + \frac{2}{3}i$ ist nicht ganzzahlig, so dass keine ganze Zahl b existiert, für die $S(k+1, b) = S(b+1, c)$ ist.

Es sei daher nun $i = 0$, also $n = 6k$ und $c = 7k$ sowie $b = k+1 + \frac{2}{3}n - 1 = 5k$. Annahme: Es gilt $S(k+1, 5k) = S(5k+1, 7k)$. Dann ist $S(k+1, 5k) = \frac{1}{2}5k(5k+1) - \frac{1}{2}k(k+1) = 12k^2 + 2k$; jedoch ist $S(5k+1, 7k) = \frac{1}{2}7k(7k+1) - \frac{1}{2}5k(5k+1) = 12k^2 + k$. Wegen $k > 0$ ist dies ein Widerspruch zur Annahme. Die Goldhändler-Regel ist also nicht auf Folgen $(k+1, k+2, \dots, 7k)$ anwendbar. Daraus folgt zusammen mit (1): Nur die n -elementigen Folgen $(k+1, k+2, \dots, 7k+3)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$ kann man so in zwei Teilfolgen zerlegen, dass dabei die Goldhändler-Regel gilt.

Game over? Noch nicht – entschied Quaoar. Es gibt noch Möglichkeiten zur Vertiefung des Themas, etwa: Gibt es n -elementige Folgen $F_n(a)$ mit einem $a \neq k+1$ oder Folgen, bei denen die $\frac{2}{3}n$ -Regel durch eine davon verschiedene Regel ersetzt wird? Diesen Verallgemeinerungen nachzugehen verschiebt der Professor auf einen anderen Tag.

Lösungen der Aufgaben zum neuen Jahr

Vielfaches von 5^{2023}

Die Einerziffern oder Zahlen $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$ bilden eine Folge aus den vier sich periodisch wiederholenden Zahlen 2, 4, 8, 6.

Also haben die Zahlen $2^2, 2^6, 2^{10}, \dots, 2^{8090} = 2^{2+2022 \cdot 4}$ sämtlich die Einerziffer 4. Daher haben die 2023 Zahlen $2^2+1, 2^6+1, 2^{10}+1, \dots, 2^{8090}+1$ die Einerziffern 5 – ihr Produkt ist daher ein Vielfaches von 5^{2023} .

Es gilt also die Behauptung.

Irrationalzahlen mit der Summe 2023

Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{\sqrt{i+1} - \sqrt{i}}{(\sqrt{i+1} + \sqrt{i})(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})} = \sqrt{i+1} - \sqrt{i}$$

für $i = 0, 1, 2, \dots$ lässt sich S_n auch so schreiben:

$$S_n = (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ = \sqrt{n+1}.$$

Wenn daher $n = 2023^2 - 1$ ist, dann ist $S_n = 2023$.

Ein Vielfaches von 2023

Wenn man den Hinweis mit $t = 2023$ auf das Produkt

$$2022!! = (2023 - 2021) \cdot (2023 - 2019) \cdot (2023 - 2017) \cdot \dots \cdot (2023 - 1),$$

anwendet so erhält man

$$2022!! = c \cdot 2023 + (-2021) \cdot (-2019) \cdot (-2017) \cdot \dots \cdot (-1) \\ = c \cdot 2023 + 2021!!.$$

Also ist $2022!! - 2021!! = c \cdot 2023$.

Welche Zahl ist größer?

Es sei $2023 = n$ gesetzt; $z_1 ? z_2$ bedeute $z_1 > z_2$ oder $z_2 < z_1$.

Aus $z_1 ? z_2$ folgt $(n^{n-1} + 1) (n^{n+1} + 1) ? (n^n + 1) (n^n + 1)$ und daher

$$n^{2n} + n^{n+1} + n^{n-1} + 1 ? n^{2n} + 2n^n + 1.$$

Nach Zusammenfassung und Division durch n^{n-1} ergibt sich $n^2 + 1 ? 2n$. Daraus folgt

$$(n - 1)^2 > 0$$

und daher $z_1 > z_2$.

Folglied gesucht

Wir führen eine Struktur in der Folge ein:

$$(1), (2, 4), (3, 6, 9), \dots, (n, 2n, 3n, \dots, n \cdot n), \dots$$

Nun sieht man: Die k -te Klammer enthält k Zahlen, denn es gibt k ganzzahlige Vielfache von k , die $\leq k \cdot k = k^2$ sind. Daher ist k^2 die $(1 + 2 + 3 + \dots + k)$ -te Zahl der Folge und damit gleichbedeutend die $(\frac{1}{2}k(k+1))$ -te Zahl. Nun ist 63^2 die $(\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64)$ -te Zahl, also die 2016-te Zahl in der Folge.

Also ist 448 die gesuchte Zahl, denn nach 63^2 lauten die nächsten Folgenglieder $64, 2 \cdot 64, 3 \cdot 64, 4 \cdot 64, 5 \cdot 64, 6 \cdot 64, 7 \cdot 64 = 448$.

Insekten und Exponentialfunktion MONOID-Jahresfeier 2022 in Mainz

Am Samstag, dem 19. November 2022, fand die diesjährige Preisvergabe zum Aufgabenwettbewerb der Mathematikzeitschrift MONOID in festlichem Rahmen

im Atrium Maximum der Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz statt. MONOID, eine Zeitschrift nicht nur für Schüler und Lehrer, feierte im letzten Jahr ihr 40-jähriges Bestehen und wird seit 2001 von der Johannes Gutenberg-Universität Mainz herausgegeben. Einmal im Jahr treffen sich alle Löser, um von der Redaktionsleitung, Frau Dr. Cynthia Hog-Angeloni und Herrn Marcel Gruner, Preise für ihre eingereichten und bewerteten Lösungen entgegenzunehmen.



Von links nach rechts: Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Greta Waldmüller, Lukas Born, Mika Schäfer, Kathrin Bormann, Paulina Herber, Josefine Kaßner, Marcel Gruner.

Eine besondere Auszeichnung stellt das Goldene M dar, eine Medaille verbunden mit einem beträchtlichen Preisgeld, die von der Redaktion an den Löser oder die Löserin mit den jeweils höchsten erreichten Punktzahlen vergeben wird. Das Goldene M wird nur einmal pro Jahr vergeben. Seit 1993 wurden bereits 28 Preisträger mit dieser Medaille geehrt; Preisträger weit zurückliegender Jahre sind inzwischen zum Teil Professoren für Mathematik.

Den Festvortrag übernahm in diesem Jahr Junior-Professor Dr. Patrick Tolksdorf von der Universität Mainz. Mit seinem Thema: „Über die Exponentialfunktion“ konnte er der Zuhörerschaft an zahlreichen fesselnden Beispielen die Bedeutung der Funktion für die Mathematik und in unserem sozialen Umfeld aufzeigen: Wer hätte gedacht, dass auf einem Schachbrett ein einzelnes Reiskorns auf dem ersten Feld bei jeweiliger Verdoppelung pro Feld auf dem 64. Feld einen Reiskorn-Kegel von 33 326,8 Metern Höhe entstehen lässt, die Gesamtanzahl der Reiskörner aller Felder ganz Deutschland mit einer über einen Meter dicken Reiskörnerschicht bedecken würde. Dass Körper von Lebewesen radioaktiv strahlende Kohlenstoffatome beinhaltet, dürfte auch nicht jedem gegenwärtig sein. Archäologen machen sich dieses Phänomen zur Altersbestimmung von Fossilien zunutze. Weitere

Beispiele aus der Natur ließen die Zuhörerschaft erstaunen: Nachtaktive Insekten nutzen die Exponentialfunktion, um über eine Winkelmessung zur Mondrichtung ihren Geradeausflug zu stabilisieren. Weitere verblüffende Beispiele, welche die große Bedeutung der Funktion aufzeigen sollte, rundeten seinen Vortrag ab. Ein starker Applaus war Herrn Junior-Professor Dr. Tolksdorf sicher.

Die Veranstaltung wurde von einem Streichertrio musikalisch begleitet.

Ein anschließendes Buffet, angerichtet von Studierenden der Universität Mainz und Mitgliedern des Vereins der Freunde der Mathematik, gab allen Teilnehmern Gelegenheit, miteinander ins Gespräch zu kommen.

MONOID–Preisträger 2022

Das Goldene M: Oscar Su (Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium).

MONOID-Fuchs: Philippos Dimitriou (Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium).

Forscherpreis: Josefine Kaßner (Oberursel, Gymnasium).

1. Preise: Jabir Aouzi, Lukas Born, Kathrin Borrmann, Miriam Büttner, Mai Linh Dang, Tu Sam Dang, Paulina Herber, Salvatore Ippolito, Josefine Kaßner, Phillip Löcks, Mika Schäfer, Greta Waldmüller.

2. Preise: Marie Baumgartner, Psacal Bohlinger, Jasmin Borrmann, Alexander Kohlbauer, Sarah Markhof, Linus Salloch, Luca Sindel.

3. Preise: Lena Baumgartner, Emilie Borrmann, Mark Garkuscha, Dora Emilia Meszaros, Victor Meyer, Ioan Salaru, Finja Weiß.

4. Preise: (MONOID-Jahresabonnements 2023): Julian Hans, Hagen Hohbein, Theresa Horstkötter, Luis Krampez, Felix Lang, Alexandra Ludcenko, Louisa Lukowiak, Nico Mathy, Raphael Mayer, Youssef Mehana, Philip Mühlberyer, Biba Petry, Jona Richartz, Silas Salloch, Emma Schubert, Greta Schubert, Tejas Shivakumar.

Die MONOID-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgerinnen und Preisträgern des Schuljahres 2021/2022 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die Preise für die Träger des Goldenen M und dem MONOID-Fuchs hat Dr. Ralf Genannt gespendet. Der Forscherpreis wurde von Casio gesponsert. Alle weiteren Preise wurden vom Verein der Freunden der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. gestiftet.

Die MONOID-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 147

Altötting, Staatliche Berufsschule:

Kl. 10: Lena Baumgartner 23.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 9: Oscar Su 137,5;

Kl. 12: Lukas Born 41.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:

Kl. 5: Silas Salloch 1;

Kl. 6: Youssef Mehana 5,5;

Kl. 7: Linus Saloch 28,5, Mika Schäfer 47, Hagen Hohbein 12.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Haag):

Kl. 6: Nico Mathy 10;

Kl. 6: Philip Mühlbeyer 9,5;

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:

Kl. 8: Philippos Dimitriou 116.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:

Kl. 5: Felix Lang 3, Julia Hans 4, Nina Petry 4;

Kl. 11: Theresa Horstkötter 4.

Hof, Johann-Christian-Reinhart-Gymnasium:

Kl. 8: Finja Weiß 17.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:

Kl. 5: Jabir Aouzi 51;

Kl. 6: Tejas Shivakumar 8;

Kl. 8: Sarah Markhof 37, Mark Garkuscha 20.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:

Kl. 11: Pascal Bohlinger 34,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 7: Victor Mayer 19;

Kl. 12: Raphael Mayer 11.

Mainz, Willigis-Gymnasium:

Kl. 5: Ioan Salaru 27.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:

Kl. 9: Jona Richartz 6.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:

Kl. 12: Salvatore Ippolito 61.

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 7: Jasmin Borrmann 28;

Kl. 8: Dóra Emilia Mézáros 22, Louisa Lukowiak 10,5;

Kl. 9: Emilie Borrmann 23;

Kl. 12: Kathrin Borrmann 42,5, Josephine Kaßner 54, Paulina Herber 74.

Schrobenhausen, Gymnasium:

Kl. 8: Luca Sindel 28.

Simbach am Inn, Tassilo-Gymnasium:

Kl. 8: Alexander Koblbauer 26.

Tangermünde, Diesterweggymnasium:

Kl. 7: Mai Linh Dang 44;

Kl. 10: Tu Sam Dang 64,5;

Kl. 12: Miriam Büttner 90.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:

Kl. 10: Philipp Lörcks 90.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:

Kl. 8: Marie Baumgartner 35,5.

Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:

Kl. 8: Greta Waldmüller 54.

Worms, Gauß-Gymnasium:

Kl. 6: Emma Schubert 6, Greta Schubert 6, Luis Krampez 9.

Mitteilungen

- **Etwas zum Lesen:** Dass es Spaß macht, interessante Beiträge über Mathematik zu lesen, an mathematischen Wettbewerben teilzunehmen oder an einer Mathematik-AG mitzumachen, das ist wohl jedem MONOID-Leser klar. Viele Angebote aus diesen Bereichen wurden nun von Gabriella Ambrus, Johann Sjuts und Éva Vásárhelyi im Buch „Mathematische Zeitschriften und Wettbewerbe für Kinder und Jugendliche“ gesammelt und vorgestellt. Darunter ist auch ein 34-seitiger Beitrag über MONOID, unser Mathematikblatt für Mitdenker. Erschienen ist das Buch in diesem Herbst. Wir empfehlen das Buch zur Lektüre. Auch als Weihnachtsgeschenk ist es gut geeignet oder noch als Wunsch vom Nikolaus aus dem Christkind. Erhältlich ist es bei jedem Buchhändler Eures Vertrauens.

Angaben zum Buch:

Ambrus, Gabriella/Sjuts, Johann/Vásárhelyi, Eva (Hrsg.): Mathematische Zeitschriften und Wettbewerbe für Kinder und Jugendliche. Förderung für Talentierte und Interessierte über Grenzen hinweg; Münster, WTM-Verlag, 2022;

ISBN 978-3-95987-227-0, ca. 400 Seiten.

Weitere Informationen unter

<https://www.wtm-verlag.de/mlu-band-4/>

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Kalenderjahr 2023 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).

Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:

www.facebook.com/monoid.matheblatt

www.facebook.com/monoid.redaktion

www.instagram.com/monoid.matheblatt

Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.

Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite

<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/>.

(MG)

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Frank Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Georg Sahliger, Silke Schneider

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe

Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub

Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)

Inhalt

Aufgaben zum neuen Jahr	3
Salvatore Ippolito: Vier Tage universitäre Mathematik	4
H. Fuchs: Was uns über den Weg gelaufen ist	6
H. Fuchs: Ein Satz über Mittelpunktswinkel und Peripheriewinkel	7
M. Mattheis: Zu Besuch bei Thales von Milet	10
H. Fuchs: Sind alle Katzen grau?	11
H. Sewerin: Das Denkerchen	13
H. Fuchs: Monoidale Knobelei	14
Die Aufgabe für den Computer-Fan	15
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 151	19
Neue Mathespielereien	22
Neue Aufgaben	25
Gelöste Aufgaben aus MONOID 151	27
A. Klenke: Die besondere Aufgabe	30
H. Fuchs: Thales und der Tunnel von Samos	32
Mathematische Entdeckungen	34
Lösungen der Aufgaben zum neuen Jahr	41
MONOID-Jahresfeier 2022 in Mainz	42
MONOID-Preisträger 2022	44
Rubrik der Löser und Löserinnen	45
Mitteilungen	46
Redaktion	47
Impressum	48

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>