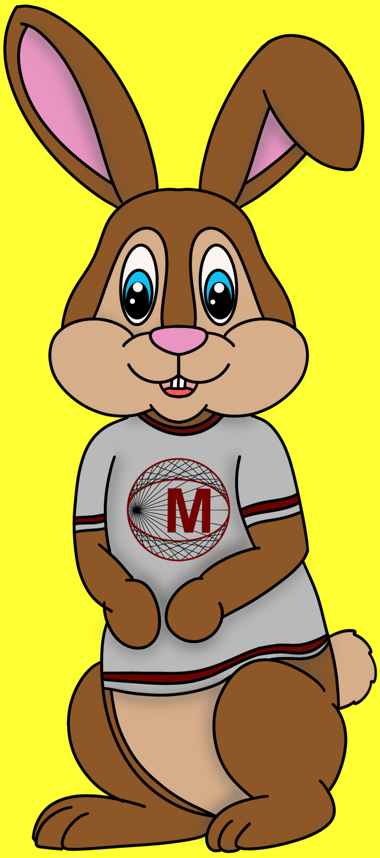
Jahrgang 44 Heft 157 März 2024

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Mai 2024.**
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Mainzer Mathe-Akademie
18. September bis 22. September 2024

Bei der Mainzer Mathe-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern, unter der Anleitung von Professorinnen und Professoren der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathe-Akademie anzumelden, die vom 18. September bis 22. September 2024 an der Universität Mainz stattfindet.
Ein genauer Programmplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben oder kann auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Unterbringung

Jugendhaus Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:
`https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/`

Was uns über den Weg gelaufen ist
von Hartwig Fuchs

Die letzte Ziffer der Zahl $9^{8^{7^{\cdots^{2^1}}}}$ ist 1.
Wieso?
$8^{7^{6^{\cdots^{2^1}}}}$ ist eine gerade Zahl, alle Potenzen $9^2, 9^4, 9^6, \ldots$ haben die letzte Ziffer 1.
Daraus folgt:
Die gegebene Zahl ist eine gerade Potenz von 9, so dass ihre letzte Ziffer 1 ist.

Die Besondere Aufgabe
Zerbrechliches
von Hartwig Fuchs & Achim Klenke

In einem Korb liegen viele Eier von gleicher Art. Wenn der Korb umgestoßen wird, geht eine zufällige Anzahl von Eiern zu Bruch. Wir nehmen an, dass für jedes Ei die Wahrscheinlichkeit zu zerbrechen $\frac{1}{2}$ ist und, dass die Eier unabhängig voneinander zerbrechen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass geradzahlig viele Eier zerbrechen?

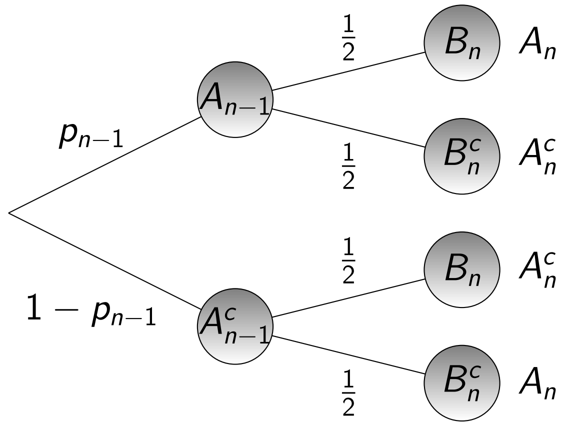
Nennen wir n die Anzahl der Eier im Korb und S_n die zufällige Anzahl zerbrochener Eier. Wir nummerieren die Eier von 1 bis n und schreiben $X_i = 1$, wenn das i-te Ei zerbricht und $X_i = 0$, wenn es nicht bricht. Dann ist $S_n = X_1 + ... + X_n$. Wir bezeichnen mit

$$A_n = \{S_n \text{ ist gerade}\}$$

das Ereignis, dass S_n gerade ist. Das Gegenereignis A_n^c ist dann das Ereignis, dass S_n ungerade ist. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit für A_n

$$p_n = P(A_n).$$

Genau so schreiben wir $B_n = \{X_n = 0\}$ für das Ereignis, dass das n-te Ei nicht bricht. Wir unterscheiden die Fälle S_{n-1} gerade / ungerade und $X_n = 0$ / $X_n = 1$ und tragen sie in einen Wahrscheinlichkeitsbaum ein:



Wir erhalten nach der Pfadregel für die Wahrscheinlichkeiten

$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{1}{2} + (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Hierfür brauchen wir p_{n-1} nicht einmal zu kennen und es ist egal, ob n selber gerade oder ungerade ist!

Wer gerne mit Binomialkoeffizienten rechnet, und wem mag man es verdenken!, der kommt auch mit folgender Überlegung an das Ziel. Die Gesamtzahl zerbrochener Eier ist binomialverteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$; es gilt also

$$P(S_n = k) = 2^{-n}\binom{n}{k} = 2^{-n}\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ können wir mit dem Pascal'schen Dreieck rekursiv berechnen:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

So erhalten wir

$$\begin{aligned} p_n &= 2^{-n}\sum_{k \text{ gerade}}\binom{n}{k} = 2^{-n}\sum_{k \text{ gerade}}\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] \\ &= 2^{-n}\sum_{k \text{ ungerade}}\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] = 2^{-n}\sum_{k \text{ ungerade}}\binom{n}{k} = 1 - p_n. \end{aligned}$$

Es ist also $p_n = 1 - p_n$ und damit $p_n = \frac{1}{2}$.

Eine mathematische Miniatur

von Hartwig Fuchs

Für jede $m+1$-ziffrige natürliche Zahl $n = z_0\, z_1\, \dots\, z_m$, $m \geq 0$ gilt:

> Ist die Quersumme $Q(n) = z_0 + z_1 + \dots + z_m$ von n durch 9 teilbar, so gilt Gleiches für n.

Die Summe $S_n = z_0\,(10^m - 1) + z_1\left(10^{m-1} - 1\right) + \dots + z_1\left(10^1 - 1\right)$ ist durch 9 teilbar, weil $10^i - 1 = 99\dots9$ mit i Ziffern 9 ist. Daraus folgt:
$S_n + Q(n) = z_0 \cdot 10^m + z_1 \cdot 10^{m-1} + \dots + z_{m-1} \cdot 10^1 + z_m = z_0\, z_1\, \dots\, z_m = n$ ist durch 9 teilbar.

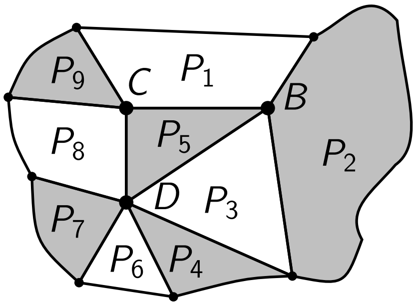
Eine Insel im Meer
und das Zwei-Farben-Problem

von Hartwig Fuchs

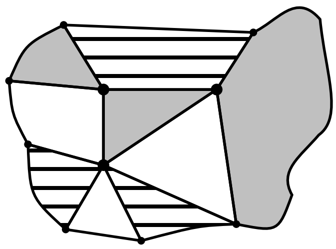
Auf der Insel Laputa regierte der Gouverneur Gillycuddy, der für seine willkürlichen Anordnungen bekannt war. So hatte er die Insel in neun Provinzen (Gebiete) P_1, P_2, ..., P_9 eingeteilt nach der Vorschrift:

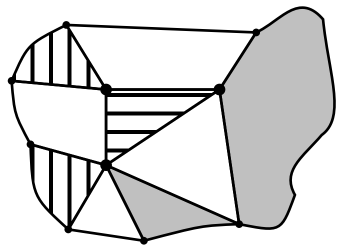
- im Inselinnereren sind die Grenzen einer Provinz jeweils Strecken samt ihren Endpunkten;
- jede Strecke samt ihren Endpunkten bildet eine Grenze zwischen genau zwei Provinzen (vgl. Figur 1).

Eines Tages nun befahl Gillycuddy seinem Kartographen Pnin, drei Inselkarten anzufertigen, bei denen die 9 Gebiete mal mit zwei, mal mit drei und mal mit vier verschiedenen Farben so koloriert sind, dass je zwei Gebiete mit gemeinsamer Grenze verschieden farbig dargestellt sind.
Pnin machte sich ans Werk – das Ergebnis seiner Arbeit sah so aus:

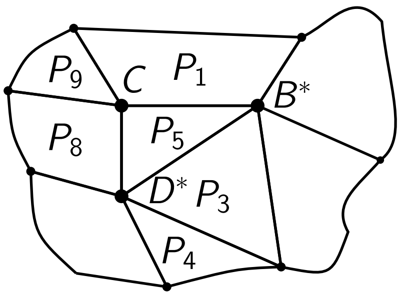


Figur 1: zwei Farben


Figur 2: drei Farben


Figur 3: vier Farben

Kurze Zeit später beschloss Gillycuddy eine Gebietsreform: Er vereinigte die Provinzen P_6 und P_7 zu einem Gebiet und die Provinz P_2 teilte er auf in zwei neue Gebiete (vgl. Figur 4). Und wieder sollte Pnin drei Karten mit der neuen Gebietseinteilung anfertigen, deren Provinzen wie früher mit zwei, mit drei und mit vier verschiedenen Farben zu kolorieren waren.



Figur 4

Pnin fand schnell eine Lösung der Aufgabe, die Karte in Figur 4 mit drei bzw. mit vier Farben zu kolorieren (finde selbst eine solche Lösung). Bei der Karte mit zwei Farben stieß er jedoch auf unüberwindliche Schwierigkeiten, obgleich die alte und die neue Gebietseinteilung in charakteristischen Eigenschaften übereinstimmten.

Beide Male handelt es sich um neun Provinzen mit elf Grenzstrecken und ihren zehn Endpunkten sowie um sieben Ufergrenzen (Figur 1 und Figur 4). Als Pnin dem Gouverneur von seinem Misserfolg bei der zwei-Farben-Karte berichtete, drohte ihm dieser, er werde ihn zum Lampenputzer degradieren, wenn er nicht bald die geforderte Karte ablieferte.* Daraufhin wandte sich Pnin Hilfe suchend an Prof. Quaoar, den einzigen Mathematiker auf der Insel. Und der bemerkte schnell einen wesentlichen Unterschied zwischen den Karten der Figur 1 und Figur 4. Um diesen Unterschied zu beschreiben, definierte er:

- Wenn ein Punkt A einer Karte gemeinsamer Eckpunkt von g Gebieten ist wobei $g \geq 2$ ist, dann nennt man die Gesamtheit dieser Gebiete einen Stern $S(A)$ vom Grad n mit Zentrum A.

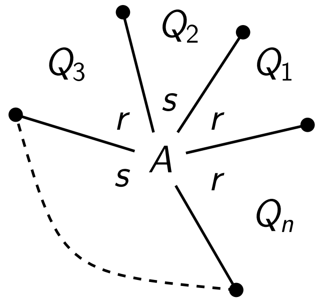
In der Figur 1 haben dann die Sterne $S(B)$ und $S(C)$ den Grad vier und $S(D)$

* Die Aufgabe, eine Karte im Sinne des Gouverneurs zu kolorieren, nennt man das zwei-Farben-Problem (kurz: 2F-Problem).

den Grad sechs, dagegen haben in der Karte der Figur 4 $S(B^*)$ und $S(D^*)$ den Grad fünf und $S(C)$ unverändert den Grad vier.

Prof. Quaoar überlegte: Bei einem Stern $S(A)$ vom Grad n mit den Gebieten Q_1, Q_2, ..., Q_n seien die Gebiete mit ungerader Nummer rot (r) und die mit gerader Nummer schwarz (s) gefärbt. Dann sieht man – vgl. Figur 5 mit ungeradem n:

Die beiden aneinander grenzenden Gebiete Q_1 und Q_n sind mit der gleichen Farbe koloriert. Bei geradem n sind dagegen Q_1 und Q_n verschieden koloriert. Daraus folgt:



Figur 5

(1) Wenn in einer Inselkarte auch nur ein Stern von ungeradem Grad ist, dann ist das $2F$-Problem für diese Karte unlösbar.

Mit Quaoars unwiderlegbarer Behauptung konnte Pnin den Gouverneur davon überzeugen, dass bei einer Gebietseinteilung der Insel wie in Figur 4 eine $2F$-Kolorierung der Inselkarte unmöglich ist.

Daraufhin machte Gillycuddy seine Gebietsreform verärgert rückgängig.

Für den Mathematiker Quaoar war damit die Sache noch nicht erledigt.

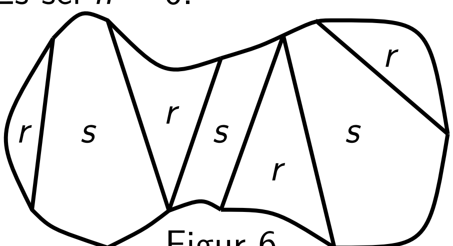
Zwar wusste er wegen (1), woran Pnins Versuch einer $2F$-Kolorierung der Karte in Figur 4 nach Gillycuddys Vorgaben scheitern musste. Warum aber war die Karte in Figur 1 mit nur zwei Farben kolorierbar?

Da die Sterne $S(B)$, $S(C)$ und $S(D)$ in Figur 1 alle von geradem Grad sind, vermutete er:

(2) Es sei K_n eine Gillycuddy-Karte K_n mit n Sternen, die alle einen geraden Grad besitzen. Dann ist K_n für jedes $n = 0, 1, \ldots$ $2F$-färbbar.

Quaoars Nachweis

Es sei $n = 0$.



Figur 6

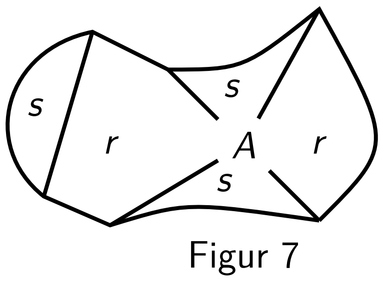
Dann hat die Karte K_0 in Figur 6 keinen Stern. Daher hat jede Karte K_0 eine Zerlegung in Gebiete wie in Figur 6. Also gilt:

Jede Karte K_0 ohne Stern ist $2F$-färbbar.

Es sei $n = 1$.

Jede Karte K_1 besitzt einen Stern A von einem geraden Grad $g \geq 2$.

Daher können die Gebiete des Sterns $S(A)$ reihum im Wechsel mit den Farben r und s koloriert werden - vergleiche Figur 7. Somit ist jede Karte mit einem Stern geraden Grades $2F$-färbbar.

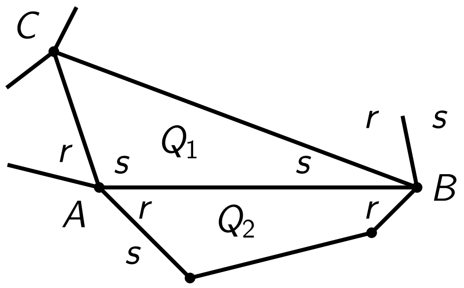


Figur 7

Quaoar definiert:

- zwei Sterne $S(A)$ und $S(B)$ heißen *benachbart*, wenn ihre Zentren A und B durch die Strecke AB verbunden sind.

Nach Voraussetzung ist dann AB eine gemeinsame Grenze zweier zu $S(A)$ und $S(B)$ gehörigen Gebiete Q_1 und Q_2 - vergleiche Figur 8.



Figur 8

Wenn man nun zum Beispiel das Gebiet Q_1 schwarz (s) färbt, dann zeigt die Figur 8, dass so eine $2F$-Färbung von $S(A)$ und folglich auch von $S(B)$ festgelegt ist. Dann aber ist auch der Komplex aus $S(A)$ und $S(B)$ $2F$-gefärbt. Es gilt also:

(3) Ein Komplex aus zwei benachbarten Sternen ist $2F$-färbbar.

Ganz entsprechend gilt (3) auch für den Komplex der benachbarten Sterne $S(B)$ und $S(C)$. Daraus folgt: Der Komplex aus den drei Sternen $S(A)$, $S(B)$ und $S(C)$ ist $2F$-kolorierbar.
In dieser Weise fortfahrend gelangt man letztendlich zu der Aussage:
Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist jede Karte K_n $2F$-färbbar.
Es gilt also die Behauptung (2).
Voller Freude über seine geglückte Lösung des $2F$-Problems eilte Prof. Quaoar in die Redaktion der „Inselpost“ mit dem Vorschlag, über diesen schönen Erfolg insularer Wissenschaft zu berichten. Aber man wimmelte ihn ab: Es bestünde wenig Interesse an einer so nutzlosen Information. Darauf sandte Quaoar sein Manuskript unter einem Pseudonym hoffnungsvoll an die Herausgeberin des „Monoid“.

Einkauf zum mittleren Preis

von Hartwig Fuchs

Professor Quaoar (Q) geht auf den Markt; er möchte Fisch kaufen – es soll nicht der Teuerste und auch nicht der Billigste sein.
Am Fischstand werden nur Barsche (B), Forellen (F) und Seezungen (S) angeboten. Als Q nach deren Preis fragt, antwortet ihm die spitzbübisch lächelnde Marktfrau – sie kennt Q und weiß, dass er Mathematiker ist:

(1) 3 kg B sind teurer als 1 kg S;

(2) 1 kg S sind teurer als 2 kg F;

(3) 3 kg F sind teurer als 4 kg B.

Je 1 kg von jeder Fischsorte kosten zusammen 100 Euro.
Übrigens: Meine Kilopreise sind ganzzahlig.

Jetzt sollten Sie meine Preise kennen.
Q nimmt die Herausforderung an. Er nimmt Bleistift und Papier und rechnet. Nachdem er zu einem Ergebnis gelangt ist, kauft er $\frac{1}{2}$ kg Forellen.
Wieso gerade Forellen?

Die Lösung findest Du auf Seite 46

Modulare Arithmetik

von Daris Mohammadzadeh

„They say there is divinity in odd numbers, either in nativity, chance, or death.“ - William Shakespeare.

Nun, ob ungerade Zahlen nun etwas Göttliches haben, ist eine schwierige Frage. Klar ist aber, dass sie und die Reste, die sie bei Divisionen lassen – so wie man es aus der Grundschule kennt -, ein fundamentales und sehr interessantes Teilgebiet der Mathematik bilden, das auf jeden Fall erkundenswert ist. Dieses Teilgebiet heißt „modulare Arithmetik“. Man kann damit zum Beispiel den Rest von der Summe zweier großer Zahlen bei der Division durch eine andere berechnen, ohne die Summe ausrechnen zu müssen. Beispiel:
$10^{77} + 3^{63}$ hat den Rest 1 bei Division durch 9, denn

$$10^{77} = \underbrace{999\ldots9}_{77\text{ Ziffern}} + 1 = 9 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{77\text{ Ziffern}} + 1$$

und

$$3^{63} = 3^2 \cdot 3^{61} = 9 \cdot 3^{61}$$

Also besitzt

$$10^{77} + 3^{63} = 1 + 9 \cdot (\underbrace{111\ldots1}_{77\text{ Ziffern}} + 3^{61})$$

den Rest 1 bei Division durch 9.
Dieses Beispiel zeigt, dass es sich auf jeden Fall lohnt, das Teilgebiet zu erkunden. Doch welche Rechenregeln und Definitionen gelten eigentlich?

Definition 1

Zwei Zahlen a und $b \in \mathbb{Z}$ heißen genau dann kongruent modulo m (geschrieben $a \equiv b \mod m$), wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, für das gilt: $a = b + k \cdot m$. Anders formuliert: a und b haben denselben Rest bei Divison durch m. Daraus folgen zwei wichtige Rechenregeln für die modulare Arithmetik:
Satz 1: Seien a, b, c und $d \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$:

$$a + c \equiv b + d \mod m$$

Beweis: Nach Def. 1 ist $a \equiv b \mod m$ gleichbedeutend damit, dass ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, für das $a = b + k \cdot m$ gilt, ebenso wie $c \equiv d \mod m$ nichts anderes bedeutet, als dass ein $l \in \mathbb{Z}$ existiert, für das $c = d + l \cdot m$. Setzen wir nun diese Terme in die linke Seite der Gleichung oben ein, so sehen wir:

$$a + c = b + k \cdot m + d + l \cdot m = b + d + (k + l) \cdot m.$$

Es existiert also ein $n \in \mathbb{Z}$, nämlich $k + l$, für das $a + c + n \cdot m = b + d$, was nach der Definition gleichbedeutend mit $a + c \equiv b + d \mod m$ ist. □

Satz 2: Seien a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m : a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$

Beweis: So wie oben ergibt sich die Aussage, wenn man Def. 1 gebraucht und a und c ersetzt:

$a \cdot c = (b + k \cdot m) \cdot (d + j \cdot m) = b \cdot d + b \cdot (j \cdot m) + (k \cdot m) \cdot d + (k \cdot m) \cdot (j \cdot m) = b \cdot d + m \cdot (b \cdot j + k \cdot d + k \cdot j \cdot m)$. Also existiert ein ganzzahliges $n = b \cdot j + k \cdot d + k \cdot j \cdot m$, für das $a \cdot c = b \cdot d + n \cdot m$ ist. Dies ist nach Def. 1 gleichbedeutend mit $a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$. □

Mit diesen Regeln können wir schon einmal einige Monoidaufgaben lösen, z. B. Welchen Rest lässt 2023^{20} bei Division durch 23? (Ergebnis: 1, aber warum?)

Als nächstes wollen wir uns spezielle Strukturen der modularen Arithmetik und deren Eigenschaften genauer ansehen. Dafür definieren wir

Definition 2

Die Restklasse von a modulo m ist definiert als Menge aller ganzen Zahlen b der Form $a + k \cdot m$. Für eine Restklasse schreiben wir: $a + m\mathbb{Z}$ $(:= b | b = a + k \cdot m, m \in \mathbb{Z})$ oder gelegentlich auch $[a]$, wenn eindeutig ist, um welchen Modul (m ist der Modul) es sich handelt.

Hieraus ergibt sich:

Satz 3: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Genau dann, wenn $a \equiv b$ ist, gilt $a + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$.

Beweis: Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Mithilfe der Restklassen können wir komplexere Strukturen bilden, sogenannte Restklassenringe:

Definition 3

Ein Restklassenring beschreibt die Menge aller Restklassen modulo m, wir schreiben ihn als $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, manchmal wird auch $\mathbb{Z}_m$ verwendet.

Im Folgenden werden wir untersuchen, ob Restklassenringe jene Eigenschaften haben, die wir benötigen, um wie in den rationalen beziehungsweise reellen Zahlen rechnen zu können. Man spricht bei diesen Eigenschaften von den sogenannten Axiomen. Sie beschreiben, dass bestimmte Eigenschaften bei der Multiplikation und der Addition von Objekten einer Menge erfüllt sein müssen und lauten konkret:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
2. $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein Element $0 \in K$, sodass $0 + a = a$ für alle $a \in K$
4. Zu jedem $a \in K$ existiert ein additives Inverses $-a \in K$ mit $(-a) + a = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
6. $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
7. Es gibt ein Element $1 \in K \setminus \{0\}$, sodass $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$
8. Zu jedem $a \in K \setminus \{0\}$ existiert ein multiplikatives Inverses $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1} \cdot a = 1$
9. $a \cdot (b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in K$

Definieren wir nun Addition und Multiplikation so, wie es am offensichtlichsten erscheint, nämlich durch

$$[a] + [b] = [a + b] \text{ und}$$
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

so stellen wir fest, dass das Assoziativ- und das Distributivgesetz bezüglich der Addition und Multiplikation erfüllt sind. Doch was ist mit den übrigen vier Axiomen?

3. Wir beobachten, dass $[0] + [a] = [0 + a] = [a]$ für jedes $[a]$ gilt, also ist dieses Axiom auch erfüllt.
4. Da $[x]$ für jedes ganzzahlige x definiert ist und aus $a \in \mathbb{Z}$ $-a \in \mathbb{Z}$ folgt, ist auch $[-a]$ stets $\in K$. Daraus und aus $[a] + [-a] = [a + (-a)] = [0]$ folgt, dass auch dieses Axiom stets erfüllt ist.
7. Auch hier stellen wir fest, dass $[1] \cdot [a] = [1 \cdot a] = [a]$ für alle $[a]$ gilt.
8. Dieses Axiom ist nicht immer erfüllt. Beispielsweise im Restklassenring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ hat 2 kein multiplikatives Inverses, es gibt also keine Zahl, die mit 2 multipliziert 1 ergibt:
   a) $[2] \cdot [1] = [2 \cdot 1] = [2] \neq [1]$
   b) $[2] \cdot [2] = [2 \cdot 2] = [0] \neq [1]$
   c) $[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [2] \neq [1]$
   d) $[2] \cdot [0] = [2 \cdot 0] = [0] \neq [1]$

Doch für welche Restklassenringe gilt das Axiom? Um das herauszufinden, müssen wir uns auf die Definition einer Restklasse zurückbesinnen. Nach dem 8. Körperaxiom und Satz 3 muss für den Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gelten: Zu jedem $[a] \in K$ existiert ein multiplikatives Inverses $[b] \in K$ mit $b \cdot a \equiv 1 \bmod m$, was wiederum nach Def. 1 gleichbedeutend ist mit: Zu jedem $[a] \in K$ existiert ein multiplikatives Inverses $[b] \in K$, sodass gilt:
Es existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $b \cdot a + k \cdot m = 1$.

m sei keine Primzahl. Dann gibt es Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 < p, q < m$ so, dass $p \cdot q = m$. Man betrachte nun $[q]$. Angenommen es gibt ein multiplikatives Inverses $[q']$ zu $[q]$. Für $q \in \mathbb{Z}$ müsste gelten: $1 = q \cdot q' + k \cdot m = q \cdot q' + k \cdot p \cdot q = q \cdot (q' + k \cdot p)$. Also wäre q ein Teiler von 1 sein. Da 1 aber nur den Teiler 1 besitzt und q nach Definition > 1 gewählt sein soll, führt die Annahme, es würde ein multiplikatives Inverses zu q existieren, zu einem Widerspruch, sie ist also falsch.
Und da kein Inverses zu q existiert es jedoch immer eine Zahl mit den Eigenschaften von q' geben muss, wenn m keine Primzahl ist, ist das 8. Axiom nicht erfüllt, wenn m keine Primzahl ist.
Es ist sogar genau dann nicht erfüllt, wenn m keine Primzahl ist. Die andere Richtung (daraus, dass m eine Primzahl ist, folgt, dass jedes $[q]$ ein Inverses besitzt) bleibt für den Leser als Übungsaufgabe.
Hoffentlich hat der Leser durch diesen Einblick Lust bekommen, sich tiefgehender mit der modularen Arithmetik auseinanderzusetzen!

Eine mathematische Miniatur

von Hartwig Fuchs

Mit den 26 Buchstaben $a, b, c, \dots, y, z$, die reelle Zahlen bezeichnen, bildet man das Produkt

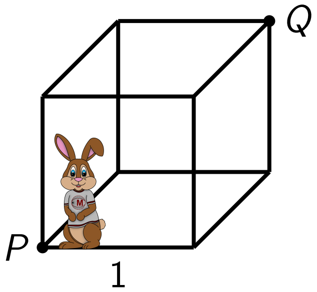
$$P = (x - a)^1 \cdot (x - b)^2 \cdot (x - c)^3 \cdot \dots \cdot (x - z)^{26}.$$

Welchen Wert hat P?
Nach der Bildungsregel von P ist $(x - x)^{23}$ der 23. Faktor des Produkts P. Weil nun $(x - x)^{23} = 0$ ist, gilt $P = 0$.

Lösung ohne Worte

Der Weg eines Hasen

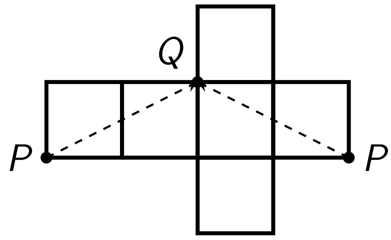
von Hartwig Fuchs



Ein Hase sitzt in der Ecke P eines Würfels der Kantenlänge 1 und kann nur über die Seitenflächen laufen. Er möchte auf dem kürzesten Weg zu der räumlich diagonal gegenüberliegenden Ecke Q gelangen. Welche Wege gibt es, und wie lang sind sie?

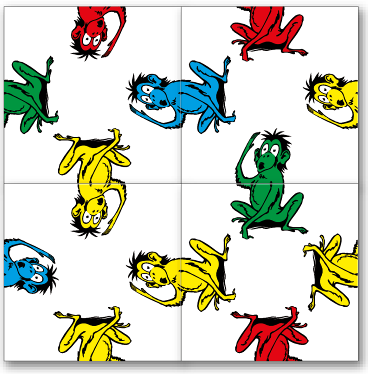
Lösung ohne Worte

Die beiden Lösungswege haben die Länge $\sqrt{5}$



Ausblick auf die Informatik
Das Affenpuzzle Teil 1
von Jens Gallenbacher

„Informatik hat ungefähr so viel mit Computern zu tun, wie Astronomie mit Teleskopen“. Diese wichtige Erkenntnis des Informatikers Edsger W. Dijkstra kannst Du mit diesem Spiel nachvollziehen: Ganz ohne Computer: Fang einfach an zu puzzlen – die folgenden Erläuterungen kannst Du dann später als Hinweise lesen.



Schneide für dieses Experiment die 25 Spielsteine auf S.19 bzw. S.20 aus. Die Affen unterscheiden sich durch die Farbe oder das Muster. Ziel ist, die Affen farblich bzw. vom Muster passend korrekt zusammenzupuzzeln, wie in der Abbildung gezeigt. Welche Spielsteine jeweils genommen werden sollen, ist von der Farbe der farbigen Punkte in der Mitte abzulesen. In *SW* stehen Symbole $O, X, *, \#$ in der Mitte der Spielsteine.

Die beiden Versionen sind inhaltlich identisch, die in Schwarz und Weiß ist hauptsächlich dafür gedacht, wenn Du keinen Farbdrucker zur Verfügung hast oder Farben schwer unterscheiden kannst.

Du kannst mit den Karten verschiedene Schwierigkeitsstufen meistern. Beginne mit dem 2*x*2-Puzzle, indem Du die Karten mit roten Punkten bzw. Symbol *O* verwendest. Willst Du etwas Wissenschaft betreiben? Dann stoppe die Zeit, die Du zur Lösung des 2*x*2-Puzzles benötigst. Auch wenn Du eventuell für ein Puzzle mit nur vier Teilen überraschend lange benötigst, ist die Aufgabe gut machbar.

Schätze nun, wie lange Du wahrscheinlich für ein Puzzle mit 3*x*3 Teilen benötigst, also mit neun Stück etwas mehr als doppelt so vielen. Doppelt so lange? Oder vier Mal? Faktor 16?

Nehme nun die fünf Karten mit grünen Punkten bzw. Symbol *X* zu den vier bereits liegenden Karten hinzu und versuche, das 3*x*3-Puzzle zu lösen. Hinweis: Auch wenn die Karten des 2*x*2-Puzzles Bestandteil des 3*x*3-Puzzles sind, ist es

das fertige Puzzle nicht - Du musst also nochmals komplett neu überlegen! Wie lange hast Du benötigt? War Deine Zeitschätzung realistisch?
Es ist bemerkenswert, wie viel schwerer ein solches Puzzle wird, wenn man die Zahl der Teile vergrößert. Wenn Du bereit bist, führen wir dieses Experiment noch weiter: Nehme nun zusätzlich die sieben Puzzleteile mit blauen Punkten bzw. Symbol $*$ und versuche aus den insgesamt 16 Feldern ein korrektes 4x4-Quadrat zu legen. Bitte notieren Dir wiederum die Zeit, auch wenn Du ggf. das Puzzeln unterbrichst. Auch wenn die Zahl der Teile nun noch nicht einmal verdoppelt wurde, benötigst Du wahrscheinlich wieder deutlich länger.
Nehme noch die Spielsteine mit den orangen Punkten bzw. Symbol # hinzu, kannst Du zur Krönung auch noch ein 5x5-Affenpuzzle lösen. Achtung: Das schaffen nur die allerwenigsten Menschen ohne Computerunterstützung!

Nicht praktisch lösbar

Du überlegst vielleicht, ob man nicht durch geschickteres Vorgehen Zeit sparen könnte. In der Praxis gibt es ja einige Aufgabenstellungen, die durch reines Ausprobieren kaum lösbar sind, unter Anwendung eines pfiffigen Verfahrens aber schon.
Wenn Du ein solches Verfahren findest, mit dem Du nicht nur das 5x5-Puzzle, sondern auch solche mit z. B. 10x10 Teilen lösen kannst, dann bist Du einem Preisgeld von einer Million Dollar schon sehr nahe gekommen. So viel ist nämlich vom Clay Mathematics Institute in Camebridge ausgelobt für denjenigen, der ein sogenanntes NP-Vollständiges Problem in polynomieller Zeit löst. „NP“ können wir hier erst einmal als „nicht praktisch lösbar“ bezeichnen. Das Affenpuzzle gehört zu dieser Kategorie von Problemen, für die bisher kein schneller Lösungsweg gefunden wurde, aber für die auch unklar ist, ob ein solcher Lösungsweg überhaupt existiert. Das Geld kannst Du übrigens auch einstreichen, wenn Du beweist, dass es keinen solchen Lösungsweg gibt oder wenn Du beweist, dass genau das nicht beweisbar ist. Bisher sind fast 100 Versuche für solche Beweise in unterschiedliche Richtungen unternommen worden, die aber alle einen Fehler hatten - das Geld ist also noch verfügbar!

Wie schwer ist das Affenpuzzle?

Nehmen wir erst einmal an, wir würden wirklich stur alle Möglichkeiten durchprobieren, n Karten zu platzieren. Für die Position gäbe es $n!$ Permutationen, jede Karte kann noch in vier Richtungen gedreht werden. Allerdings gibt es mindestens vier Lösungen (wenn man das fertige Puzzle jeweils um 90° dreht) und wir nehmen an, wir müssen im Schnitt die Hälfte aller Permutationen durchprobieren, um eine Lösung zu finden. Für jeden Versuch sind n Karten zu legen. Insgesamt müssen daher $\frac{n! \cdot 4^n \cdot n}{8}$ Karten gelegt werden. Bei einem 3x3-Puzzle sind das bereits 47563407360 - bei einer halben Sekunde pro Karte wärst Du damit 754 Jahre beschäftigt. Sicherlich hast Du doch nicht ganz so lange benötigt!

Das liegt daran, dass wir intelligenter vorgehen: Wenn wir eine Situation erreicht haben, in der das Affenpuzzle noch nicht fertig ist, aber auch keine Chance mehr besteht, es korrekt zu beenden (weil z. B. keine der noch vorhandenen Karten anlegbar ist), werden wir sicherlich nicht stur weiter Karten legen, um dann beim fertigen Puzzle festzustellen, dass es nicht korrekt gelöst wurde.
Viele der Verfahren in der Informatik kennen wir aus unserem normalen Alltag. Damit es auch noch wissenschaftlich klingt, heißt genau diese Überlegung als Fachbegriff „Branch and Bound". Wenn wir nun noch zusätzlich die Reihenfolge des Kartenlegens so wählen, dass wir recht früh scheitern, falls wir scheitern, dann können wir die Zahl der nötigen Legevorgänge stark reduzieren.

Puzzle	Anzahl der Legevorgänge
2x2	129
3x3	6773
4x4	1965501
5x5	11385972942
6x6	4482592451432549
7x7	319714732333844702623086

Auf diese Weise werden unsere kleineren Puzzles durchaus lösbar. Anhand der Zunahme der Zahlen erkennst Du aber auch, dass der notwendige Aufwand immer noch exponentiell, also sehr stark, ansteigt. Bereits $7x7$ ist noch nicht mal mehr mit dem Computer lösbar: Selbst wenn dieser 100 Milliarden Karten pro Sekunde legen könnte, wäre er trotzdem noch über 100.000 Jahre beschäftigt.
Fazit ist also: Es gibt Aufgaben, für die wir durchaus einen Lösungsweg kennen, den wir sogar noch verbessern können. Für einige Aufgaben bringt uns das allerdings gar nichts, weil unser Lösungsweg selbst mit Computerhilfe so lange benötigt, dass wir keine Zeit haben, auf das Ergebnis zu warten. Daher nennen wir diese Aufgaben „nicht praktisch lösbar".

Aufgabe zur Informatik

Um sich dem erwähnten Preisgeld zu nähern, kansst Du ja erst einmal klein anfangen: Schreibe ein Computerprogramm, das nach einem geschickten „Branch and Bound" – Verfahren Affenpuzzle löst. Hinweis: Auf einem modernen Computer sollte das hier gezeigte $5x5$-Puzzle in etwa einer Sekunde erledigt sein.
Eine noch größere Herausforderung ist es, mit einem Programm neue Affenpuzzle zu generieren, die lediglich vier Lösungen besitzen. Bitte beachte, dass alle Spielkarten unterschiedlich sein müssen, da man sonst ja durch Vertauschen bereits mehrere Lösungen erzeugen könnte. Du kannst auch die Zahl der Farben variieren oder das Puzzle mit gleichseitigen Dreiecken oder Sechsecken gestalten.
Schicke uns Deine Lösung! Die erste Einsendung eines $7x7$-Puzzles auf Basis von

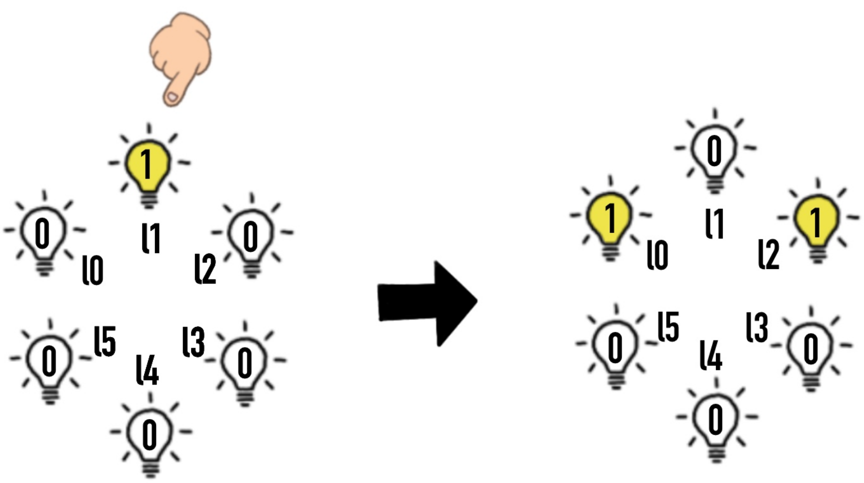
quadratischen Affenpuzzlekarten mit vier Farben mit einem korrekten Nachweis, dass es lediglich vier Lösungen besitzt (die durch Drehen um 90° ineinander überführbar sind), wird mit untenstehendem Buch prämiert. Der Nachweis darf selbstverständlich auch mit Software erbracht werden, falls diese auf einem handelsüblichen Rechner in unter einem Tag Laufzeit das Ergebnis berechnet.

Weitere Informationen

Auf der Webseite `www.abenteuer-informatik.de` findest Du die Open-Access-Kapitel des Buchs „Abenteuer Informatik" zum freien Herunterladen und viele weitere Aktivitäten.
Hier noch die Bibliographie des vollständigen Buches:
Jens Gallenbacher „Abenteuer Informatik: IT zum Anfassen für alle von 9 bis 99 – vom Navi bis Social Media",
5. Auflage, Springer Nature Verlag, 2021, ISBN 978-3-662-63738-8

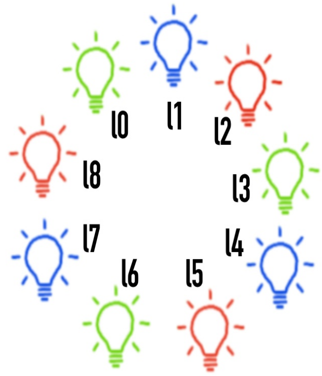
Mathematische Entdeckungen

Wir definieren $(l_0, l_1 ... l_{n-1})$ als n Lampen, die im Kreis aufgebaut sind.
$(m_0, m_1 ... m_{n-1})$ beschreiben die Schalter der Lampen. m_i steht dabei für den Schalter der Lampe l_i.
$l_i = 1 \leftrightarrow$ Die Lampe i ist eingeschaltet.
$l_i = 0 \leftrightarrow$ Die Lampe i ist ausgeschaltet.
Durch das Drücken des Schalters m_i ändert sich der Zustand der Lampen l_{i-1}, l_i, l_{i+1}. Dabei bezeichnen $l(n) = l(0)$ und $l(n+1) = l(1)$. Eine zuvor eingeschaltete Lampe geht aus, eine ausgeschaltete Lampe geht an. In diesem Beispiel für n=6 ändert sich durch das Drücken des Schalters m_1 die Zustände der Lampen l_0 , l_1 und l_2.



Ziel des Spiels ist es, von einer gegebenen Grundstellung alle Lampen auszuschalten, also $l_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0; i \leq n$

1. Finde ein Vorgehen, mit dem du bei $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ das Spiel immer gewinnst, wenn 2 Lampen eingeschaltet sind.
2. Wende dieses Verfahren auf die Lampenanzahl n mit $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ an. Bei welchen Ausgangssituationen mit 2 angeschalteten Lampen funktioniert das Schema?
3. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade ist, so ist die Stellung lösbar.



Die Lampen l_{3i} sind hier grün dargestellt, l_{3i+1} blau und l_{3i+2} rot.

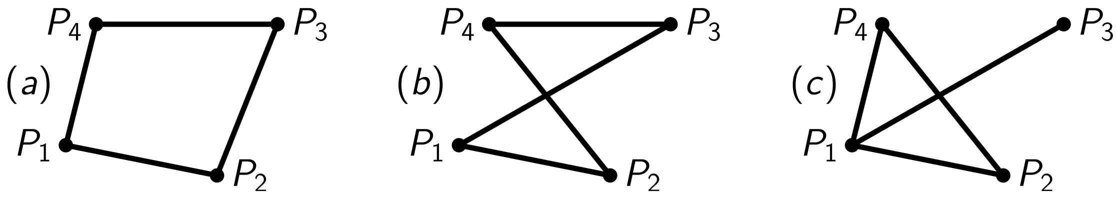
4. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils ungerade ist, so ist die Stellung lösbar.
5. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Stellung lösbar ist, so ist die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade oder jeweils ungerade.

(Marco Riehle)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2024 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 155

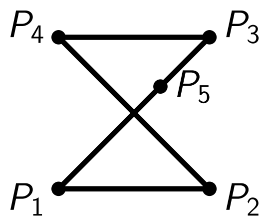
Im Heft 155 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Gegeben seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Verbinden wir diese vier Punkte durch vier Strecken, so erhalten wir Figuren wie diese



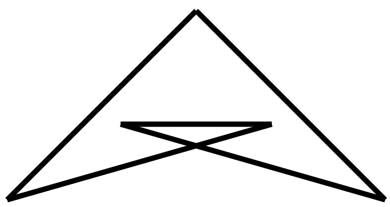
Die Figuren a und b bilden geschlossene Streckenzüge, dass heißt: Wenn man in einem beliebigen der vier Punkte beginnend alle Strecken genau einmal durchläuft, dann gelangt man zum Ausgangspunkt zurück. Dagegen stellt c keinen geschlossenen Streckenzug dar.
In der Figur b „überschneiden" sich zwei Strecken. Ihr Schnittpunkt gilt nicht als ein fünfter Punkt der Figur b.
Man nennt die Figuren a und b jeweils ein Viereck ohne und mit Überschneidung.
Untersuche nun, wie viele Überschneidungen ein Fünfeck aus fünf Punkten und fünf Strecken und ein Sechseck aus sechs Punkten und sechs Strecken haben kann, und so weiter, soweit deine Ausdauer reicht. (H.F.)

Lösung

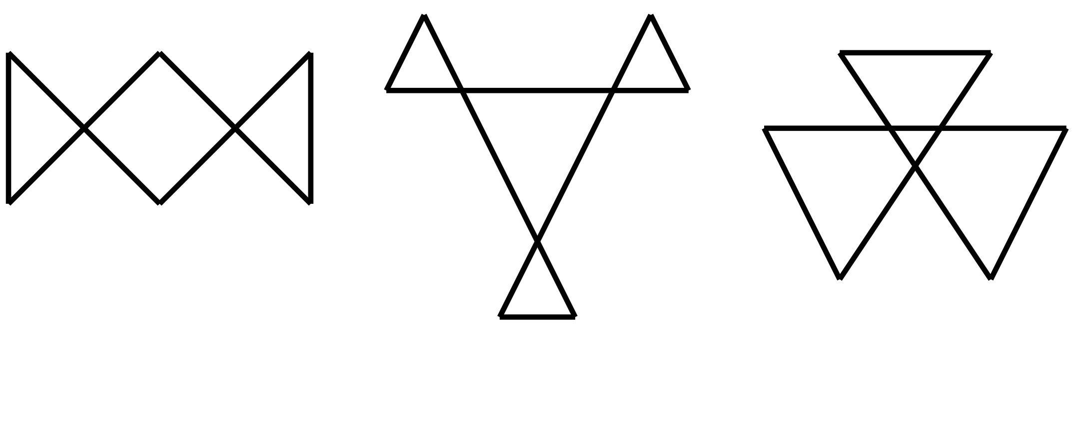
Durch Unterteilen kann man aus einem n-Eck ein $(n+1)$-Eck machen, zum Beispiel ein Fünfeck aus einem Viereck. Allgemein: hat man ein n-Eck mit k Überschneidungen, dann auch ein m-Eck mit k Überschneidungen für alle $m \geq n$. Diese listen wir nicht nochmals auf.



$n = 5$: Beim Fünfeck kommt folgender Graph hinzu:

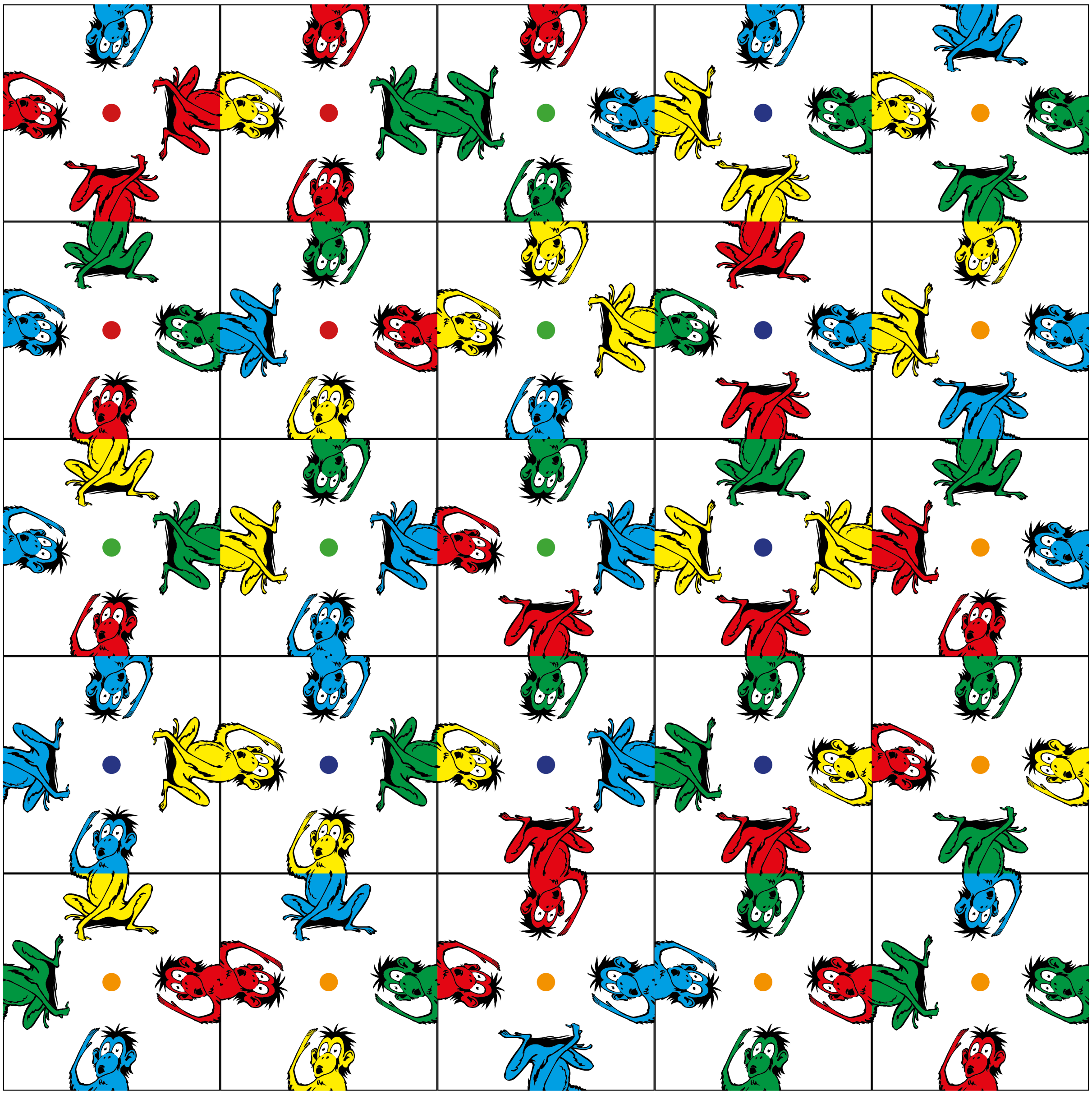


$n = 6$: Beim Sechseck kommen die folgenden Graphen hinzu:

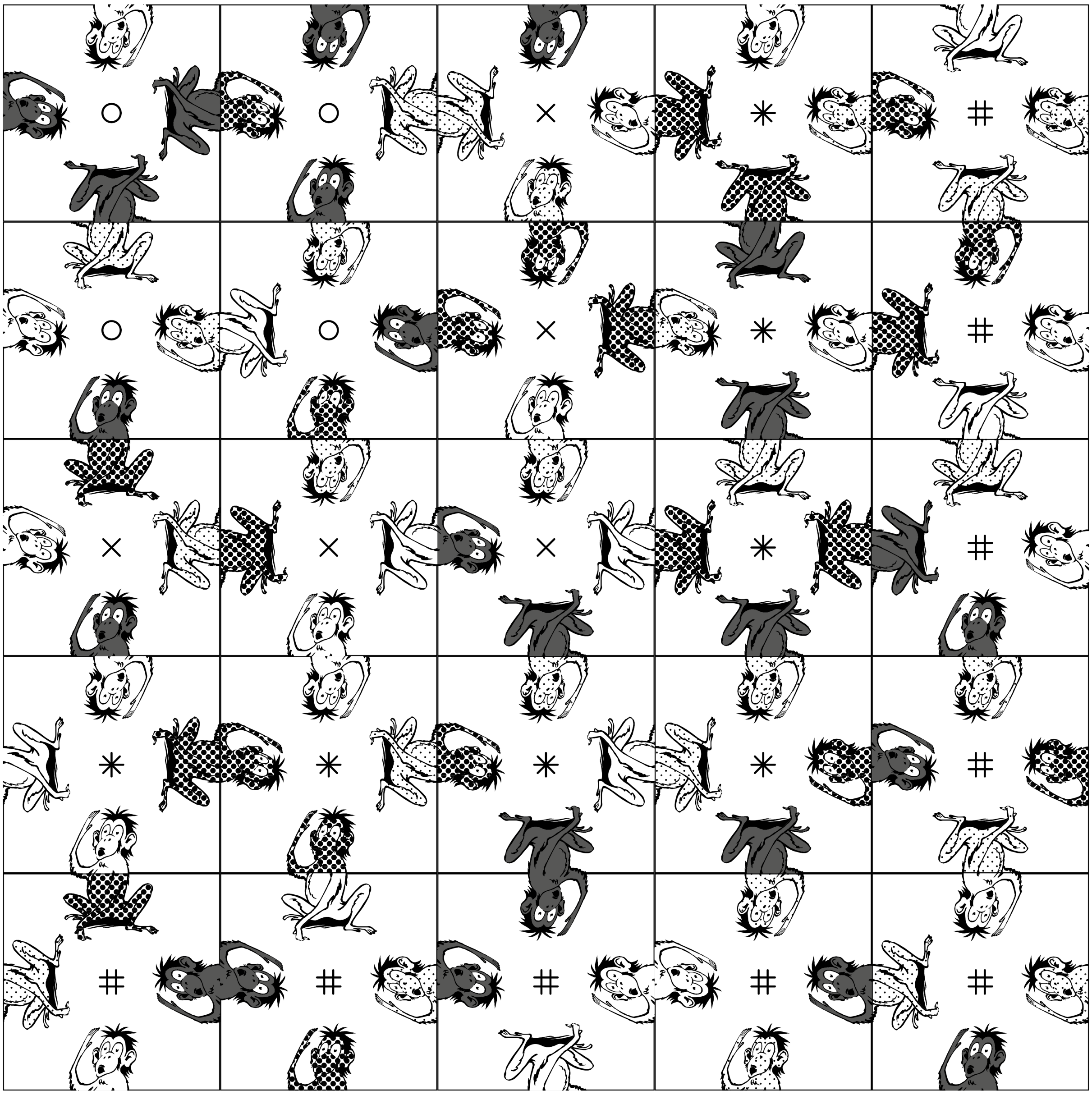


Das 5x5 Affenpuzzle

In Farbe



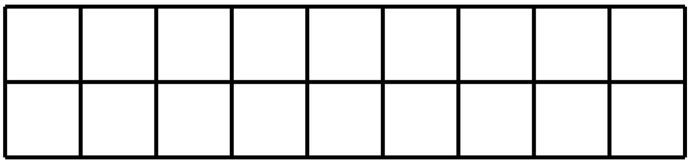
Schwarz-Weiß



„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Robinson Crusoe und sein Gefährte Freitag langweilen sich auf ihrer Insel. Daher zeichnet Robinson ein 9x2-Rechteck in den Sand und schlägt Freitag folgendes Spiel vor:



Jeder Spieler markiert abwechselnd entweder ein Feld oder zwei benachbarte (mit einer gemeinsamen Kante versehene) Felder des Rechtecks, wobei Robinson beginnt. Wer das letzte Feld markiert, gewinnt.
Für welchen der Spieler gibt es eine sichere Gewinnstrategie? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2024 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 155

In Heft 155 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
An ihrem ersten Schultag nach den Sommerferien treffen sich die Fünftklässler in der großen Pause auf dem Schulhof der neuen Schule. Alles ist noch ungewohnt, und so setzen sich ein Junge und ein Mädchen auf die entgegengesetzten Enden einer langen Bank. Einer nach dem anderen nehmen weitere 20 Kinder auf der Bank Platz. Setzt sich ein Junge zwischen zwei Mädchen oder ein Mädchen zwischen zwei Jungen, so bezeichnen wir sie oder ihn als tapfer.
Nachdem alle Kinder Platz genommen haben, sitzen Jungen und Mädchen abwechselnd. Wie viele unter ihnen waren tapfer? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Wir bezeichnen einen Zwischenraum zwischen zwei Jungen bzw. zwei Mädchen als „tapfere Lücke“. Wenn sich ein Junge zwischen zwei Mädchen hinsetzt, ist er tapfer. Setzt er sich zwischen einen Jungen und ein Mädchen, erzeugt er eine tapfere Lücke, denn er darf sich wegen der Bedingung des abwechselnden Sitzens nicht direkt neben einen anderen Jungen setzen. Setzt er sich zwischen zwei Jungen, macht er aus einer tapferen Lücke zwei tapfere Lücken. Daher gilt für jeden Jungen: Entweder er ist tapfer oder er erzeugt eine tapfere Lücke. Aus Symmetriegründen gilt dasselbe auch für jedes Mädchen.
Am Anfang gibt es keine tapferen Lücken, und genauso ist es auch am Ende.

Also muss von den 20 hinzukommenden Kindern genau die Hälfte eine tapfere Lücke erzeugen und die andere Hälfte, also 10 Kinder, ist tapfer.
Diese Aufgabe eignet sich auch gut für einen Beweis mit vollständiger Induktion.
Eine im wesentlichen richtige Lösung wurde von Philipp Dimitriou eingesandt.
An einer anderen Schule gibt es eine kreisförmige Bank um einen Baum herum, auf der ebenfalls 22 Kinder Platz finden. Kann man hier bei gleichen Bedingungen ebenfalls die Anzahl der tapferen Kinder bestimmen? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 156

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Ziffernsuche

Schreibe $\frac{1}{17}$ als Dezimalzahl mit 20 Stellen nach dem Komma.
Welche Ziffer befindet sich an der 2023-ten Stelle in der Dezimalzahl?

(nach H.F.)

Lösung:

(1) $\frac{1}{17} = 0{,}0588\,2352\,9411\,7647\,0588\,2352\ \ldots$

Aus der Darstellung (1) schließt man:
Jeder Block aus 16 Ziffern wiederholt sich periodisch.
Dies wollen wir jedoch auch mathematisch bestätigen. Wenn $\frac{1}{17}$ sich tatsächlich nach 16 Nachkommastellen wiederholt, so müsste $\frac{1}{17} = 0{,}0588\,2352\,9411\,7647 +$ ($\frac{1}{17}$ um 16 Stellen nach hinten verschoben) $= \frac{1}{17} = 0{,}0588\,2352\,9411\,7647 + \frac{1}{17 \cdot 10^{16}}$. Wenn man dies nachrechnet (zum Beispiel mit einem Taschenrechner), so kommt man tatsächlich darauf, dass die Aussage stimmt.
Aus $2023 = 126 \cdot 16 + 7$ folgt: Nach 126 Blöcken und dann noch sieben Ziffern weiter hat man die gesuchte Ziffer, nämlich 5, gefunden.

II. Vertauschter Uhrzeiger

Der Uhrmacher hat versehentlich die Zeiger einer Uhr vertauscht.

a) Begründe, dass die Uhr trotzdem manchmal die gleiche Zeit anzeigt wie eine Uhr, deren Zeiger nicht vertauscht sind.
b) Überlege dir, warum die vertauschten Zeiger z. B. die Zeit 6:00 Uhr nicht anzeigen können. Welche Zeiten können angezeigt werden?

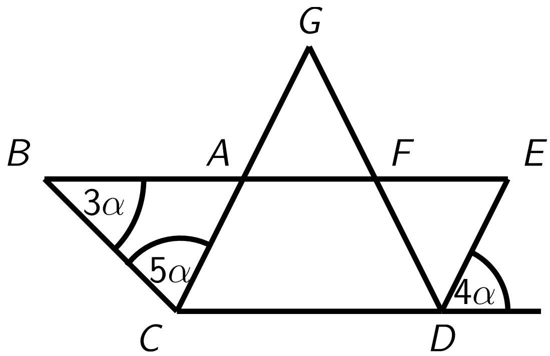
(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

a) Bei Zeiten, an denen die beiden Zeiger die gleiche Stellung haben, ändert das Vertauschen der Zeiger nichts an der Uhrzeit.

b) Starten wir bei 0:00 Uhr und betrachten die Zeit, zu der der Stundenzeiger die Position x erreicht hat, so hat sich der Minutenzeiger um $z = 12x$ bewegt. Dies heißt möglicherweise, dass er schon eine oder mehrere volle Umdrehungen gemacht hat. Messen wir die zurückgelegte Strecke jeweils in Einheiten von Minuten (d.h. sechs Winkelgraden), so ist also die Position y des Minutenzeigers gleich $12x - 60n$ ($n \geq 0$). Vertauschen bedeutet, dass umgekehrt $x = 12y - 60n$ ($n \geq 0$) sein muss, also $x = 144x - 60n$ mit $n \geq 0$.
Wir schreiben dies um zu $143x = 60n$, d.h. $x = \frac{60}{143} \cdot n = s \cdot n$ mit $s = \frac{60}{143}$. $0 \leq x < 60$ bedeutet $0 \leq n < \frac{60}{s} = 143$. Es gibt also 144 verschiedene Werte von x (und zugehörige Werte $y = 12x - n \cdot 60$) für die vertauschte Zeiger wieder zu einer sinnvollen Anzeige führen.

III. Ein gleichseitiges Dreieck?



In der Figur sei das Dreieck $\triangle AFG$ gleichseitig und es sei $AF || CD$. Zeige mit den Informationen in der Abbildung, dass gilt: Das Dreieck $\triangle DEF$ ist gleichseitig.

(H.F.)

Lösung:

$\triangle AFG$: Im gleichseitigen $\triangle AFG$ ist jeder Innenwinkel $60°$ groß.

$\triangle ABC$: Wegen $\sphericalangle FAG = \sphericalangle BAC = 60°$, gilt:
$3\alpha + 5\alpha + \sphericalangle BAC = 180°$, so dass $8\alpha = 120°$ und $\alpha = 15°$ ist.

$\triangle DEF$: Wegen $\sphericalangle DFE = \sphericalangle GFA = 60°$ und $\sphericalangle FDC = \sphericalangle GFA$ (Stufenwinkel an Paralleleln), ist $\sphericalangle FDC = 60°$, so dass $\sphericalangle EDF = 180° - 4\alpha - \sphericalangle FDC = 60°$ ist. Daraus folgt:
$\sphericalangle FED = 180° - \sphericalangle DFE - \sphericalangle EDF = 180° - 60° - 60° = 60°$.
Im $\triangle DEF$ sind die drei Innenwinkel jeweils $60°$ groß.

Also ist $\triangle DEF$ gleichseitig.

IV. Wahr oder falsch?

Es gibt genau eine positive ganze Zahl n, für deren Potenzen n^3 und n^4 gilt: Zur Dezimaldarstellung von n^3 und n^4 benötigt man insgesamt die zehn Ziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ und zwar jede davon genau einmal. Stimmt das? (H.F.)

Lösung:
Nach einigem numerischen Experimentieren findet man heraus, dass zur Dezimaldarstellung von n^3 und n^4 insgesamt mindestens elf Ziffern notwendig sind, wenn $n \geq 22$ ist, weil dann $n^3 \geq 22^3 = 10648$ und $n^4 \geq 22^4 = 234256$ ist und insgesamt höchstens neun Ziffern, wenn $n \leq 17$ ist, weil dann $n^3 \leq 17^3 = 4913$ und $n^4 \leq 17^4 = 83521$ ist.
Folglich gilt: n muss zwischen (einschließlich) 18 und 21 liegen.
Eine Überprüfung dieser Werte ergibt, dass $n = 18$ die gesuchte Zahl ist, denn für sie ist $18^3 = 5832$ und $18^4 = 104976$.

V. Wer hat Recht ?

Franziska behauptet, dass $n!^{*}-6$ niemals das Quadrat einer ganzen Zahl sein könne. Carlotta widerspricht ihr.
Wer hat Recht? Falls Carlotta im Recht ist, gib alle n an, für die $n! - 6$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist! (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:
Es ist $3! - 6 = 0^2$. Für $n \geq 4$ ist $n!$ durch 4 teilbar, also ist $n! - 6$ durch 2 teilbar (denn sowohl $n!$ als auch 6 sind durch 2 teilbar), aber nicht durch 4, denn $n!$ ist durch 4 teilbar, also auch $n! - 4$, aber daher nicht $n! - 4 - 2 = n! - 6$. Jedoch sind Quadrate von geraden Zahlen durch 4 teilbar und Quadrate von ungeraden Zahlen ungerade. Da aber $n! - 6$ für $n \geq 4$ weder durch 4 teilbar noch ungerade ist, kann es sich um keine Quadratzahl handeln. Nachdem man $n = 1$ und $n = 2$ geprüft hat, stellt man fest: $n = 3$ ist die einzige Lösung von $n! - 6 = m^2$.

VI. Ganzzahlige Lösungen

Gegeben sei die Gleichung $(\star)$ $29x + 26y = 1000$, in der x und y positiv ganzzahlig sind.

a) Bestimme durch mathematische Argumentation, wie viele Lösungen (x, y) die Gleichung $(\star)$ höchstens haben kann.
b) Finde zwei mögliche Lösungen. (H.F.)

Lösung:

a) Wegen $29 \cdot 34 < 1000 < 29 \cdot 35$, gilt für jede Lösung: $x \leq 34$. Nun kann aber x nicht ungerade sein. Also ist x gerade und $2 \leq x \leq 34$. Die Gleichung $(\star)$ besitzt daher höchstens 17 Lösungen.
b) Mit systematischer Untersuchung (englisch: Brute-Force) aller Möglichkeiten für x findet man: $(\star)$ hat nur die zwei Lösungen $(x, y) = (30, 5)$ und $(4, 34)$.

---
* $n!$ (gesprochen: n Fakultät) bezeichnet das Produkt der natürlichen Zahlen bis einschließlich n, also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

VII. Niemals eine Quadratzahl

Zeige, dass es keine Zahl n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ gibt, für die die Summe $S(n) = n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n + 1$ eine Quadratzahl ist.

(H.F.)

Lösung:

Für $n \geq 1$ gilt:

$$(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$(n^2 + n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

Man sieht unmittelbar, dass

$$(n^2 + n)^2 < S(n) < (n^2 + n + 1)^2$$

ist, woraus die Behauptung folgt.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Produktdarstellung einer Zahlendifferenz

Es sei $n = 112296^2 - 7986^2$. Zeige, ohne n zu berechnen, dass gilt:
Man kann n als Produkt der Zahlen 1, 2, 3, ..., 10, 11, 12, 13 schreiben.
Hinweis: Die 3. binomische Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ist hilfreich. (H.F.)

II. Vergleich mit 1

Wenn für zwei positive Zahlen $a < 1$ und $b > 1$ gilt, dann folgt:
Die Differenz ihrer Summe S und ihres Produktes P ist größer als eins.
Stimmt dies? (H.F.)

III. Zerlegung eines Dreiecks

Zerlege ein spitzwinkliges Dreieck nur mit Geodreieck und Bleistift in vier Parallelogramme und drei Dreiecke.

(Wolfgang J. Bühler)

IV. Fünf Freundinnen

Beate ist an eine Mädchenschule gewechselt. In ihrer Klasse sind insgesamt 23 Schülerinnen mit Beate. Nach 14 Tagen erzählt Beate zu Hause: „Heute haben wir festgestellt, dass in unserer Klasse jede genau fünf Freundinnen hat und jede die Freundin von genau fünf Mitschülerinnen ist." Darauf behauptet ihre Mutter „Das kann doch gar nicht sein." Hat sie recht?

(Wolfgang J. Bühler)

V. Buchstaben Rätsel

$$(AB)^2 = CAB$$

Ersetzte jeden Buchstaben so durch eine Ziffer, dass eine richtige Gleichung mit Zahlen größer null entsteht. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchtsaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Die führenden Ziffern A und C sind beide ungleich null. (H.F.)

VI. 5-stellige Zahlen gesucht

Bestimme

a) die kleinste ...

b) die größte ...

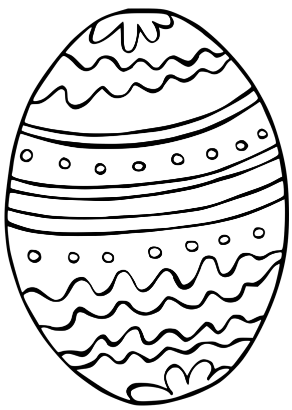
fünfstellige Zahl, die durch $2, 3, 4, 5, 6$ und 7 teilbar ist.

(Wolfgang J. Bühler)

VII. Die letzten drei Ziffern

Die Fakultät $n!$ ist das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. Bestimme die letzten drei Ziffern der Summe $1! + 2! + 3! + ... + 50!$

(Klaus Ronellenfitsch)



Die Monoid-Redaktion wünscht allen L(o)eserinnen und L(o)estern frohe Osterferien und viel Spaß beim Rätseln.

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1338: ? gesucht

Finde eine Lösung für die folgenden Gleichungen. Wenn Du eine zweite findest bekommst Du einen Extrapunkt.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 16 \\ a \cdot b &= 24 \\ a + b &= ? \end{aligned}$$

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Aufgabe 1339: Aufgaben zur Uhrzeit

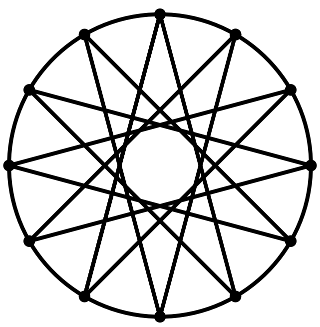
Auf einer Uhr ...

a) ... stehen die beiden Zeiger zwischen 4 und 5 Uhr exakt übereinander.
Wie viel Uhr ist es (in Minuten und Sekunden)?

b) ... bilden die beiden Zeiger zwischen 4 und 5 Uhr einen Winkel von 180°.
Wie viel Uhr ist es (in Minuten und Sekunden)?

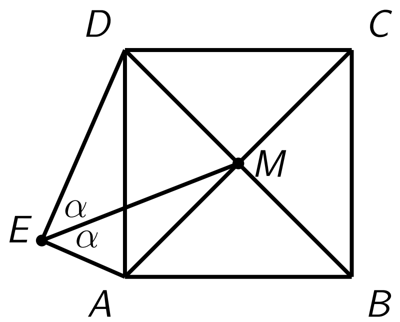
(Christoph Sievert)

Aufgabe 1340: Sternfigur



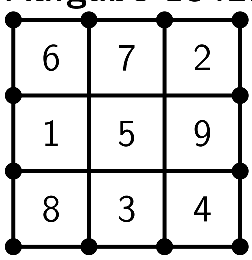
Auf einem Kreis mit Radius eins sind - wie bei einer Uhr - zwölf Punkte im gleichen Abstand markiert. Nun wird eine „Sternfigur“ gezeichnet: Man wählt einen beliebigen Punkt, geht im Uhrzeigersinn fünf Punkte weiter und verbindet diese beiden. Von dem abgezählten Punkt geht man wieder fünf Punkte weiter und verbindet dann diese beiden Punkte. Dieses Verfahren wiederholt man insgesamt zwölfmal, bis man wieder am Anfangspunkt angelangt ist. Welche Länge besitzen alle gezeichneten Strecken zusammen? (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1341: Quadrat und rechtwinkliges Dreieck



Im Quadrat $ABCD$ sei M der Diagonalschnittpunkt und das Dreieck $\triangle ADE$ sei rechtwinklig beim Punkt E. Zeige: Die Winkel $\sphericalangle AEM$ und $\sphericalangle MED$ sind beide 45° groß. (H.F.)

Aufgabe 1342: Zahlenquadrat der anderen Art



Wähle zwei benachbarte Felder der gleichen Zeile oder Spalte und ersetze eine der beiden Zahlen durch die Summe, die andere durch das Produkt der beiden Zahlen.
Ist es möglich, dass zum Schluss jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale eine gerade Zahlensumme besitzt?

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1343: Neunstellige Zahlen

Eine neunstellige Zahl bestehe aus den Ziffern $1, 2, \dots, 9$ in zufälliger Reihenfolge, wobei jede Ziffer nur einmal verwendet wird. Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

a) Die Zahl ist kleiner als 630 000 000.

b) Die mittleren drei Ziffern sind abwechselnd gerade und ungerade (g, u, g oder u, g, u).

c) Das Produkt der mittleren drei Ziffern ist gerade.

d) Die Summe der drei mittleren Ziffern ist gerade.

(Wolfgang J. Bühler)

Aufgabe 1344: Sechsstellige Zahlen mit der Ziffer 9

Bei wie vielen sechsstelligen natürlichen Zahlen kommt:

a) mindestens einmal ...

b) genau einmal ...

... die Ziffer neun vor? (Klaus Ronellenfitsch)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 156

Klassen 9–13

Aufgabe 1331: Jahreszahl-Aufgabe

Bestimme die letzten vier Ziffern der Zahl 3^{2023}. (H.F.)

Lösung:

Es sei $a = a_m \dots a_3\, a_2\, a_1\, a_0$ eine ganze Zahl ≥ 1000 in Dezimaldarstellung. Dann sei $[a]$ die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl - also $[a] = a_3\, a_2\, a_1\, a_0$.

Zur Berechnung von $[3^{2023}]$ schreiben wir: $3^{2023} = \left(3^{20}\right)^{101} \cdot 3^3$. Es ist $[3^{20}] = 4401 = 4400 + 1$. Setzen wir $A = 4400$, so gilt:

$[\left(3^{20}\right)^{101}] = [(A+1)^{101}] = [\left(A^{101} + a_{100} \cdot A^{100} + \dots + a_3 \cdot A^3 + a_2 \cdot A^2\right) + a_1 \cdot A + 1]$,

dabei sind a_i die ganzzahligen Koeffizienten der Binomialentwicklung von $(A+1)^{101}$, insbesondere ist $a_1 = 101$.

Weil nun die Summe der Zahlen in der Klammer (...) ein Vielfaches von 10 000 ist gilt wegen $a^2 > 10\,000$:

$[\left(3^{20}\right)^{101}] = [101 \cdot 4400 + 1] = 4401$, woraus folgt

$[3^{2023}] = [\left(3^{20}\right)^{101} \cdot 3^3] = [4401 \cdot 27] = 8827$.

Aufgabe 1332: Jahreswurzeln

Für welche natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sqrt[2023]{2024^1} \cdot \sqrt[2023]{2024^3} \cdot \sqrt[2023]{2024^5} \cdot \dots \cdot \sqrt[2023]{2024^{2n+1}} > 2023$$

Hinweis: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$. (H.F.)

Lösung:

Das Produkt lässt sich so zusammenfassend vereinfachen:

$$X = \left(2024^{1+3+5+\dots+(2n+1)}\right)^{\frac{1}{2023}} = 2024^{\frac{(n+1)^2}{2023}}.$$

Dann ist $X = 2024^{\frac{(n+1)^2}{2023}} > 2023$, wenn $\frac{(n+1)^2}{2023} \geq 1$ ist, also wenn $n + 1 \geq \sqrt{2023} \approx 44{,}97$. Damit ist $n = 44$ ein Hinweis auf die gesuchte Lösung. Für $n = 44$ ist $X > 2039$, für $n = 43$ ist $X < 1459$. Damit gilt: Alle natürlichen n mit $n \geq 44$ sind Lösungen.

Aufgabe 1333: Kette von Zahlenmengen

Bilde aus der Zahlenmenge $M_4 = \{1, 3, 10, 22\}$ die Mengen M_3, M_2, M_1 nach folgender Regel:

Man erhält die Menge M_{i-1}, $i = 4, 3, 2$, wenn man der Menge M_i zwei beliebige Zahlen a und b wegnimmt und ihr dafür die Zahl $ab + a + b$ hinzufügt.

Bestimme M_1 für jede nach der gegebenen Regel bildbare Mengenkette M_4, M_3, M_2, M_1. (H.F.)

Lösung:

1. Lösung mit der brute force Methode
   Man berechnet im 1. Schritt die sechs nach der Regel möglichen Mengen M_3.
   Dann bestimmt man im zweiten Schritt die möglichen Mengen M_2.
   Jede der 18 möglichen Ketten M_4, M_3, M_2, M_1 endet mit $M_1 = \{2023\}$.
   Beispiel:
   $M_4 = \{1, 3, 10, 22\} \rightarrow M_3 = \{7, 10, 22\} \rightarrow \{7, 252\} \rightarrow M_1 = \{2023\}$.
2. Lösung (mit Arithmetik)
   Es sei $M_4 = \{a, b, c, d\}$ sowie $r = ab+a+b$ und damit $r = (a+1)(b+1)-1$. Dann ist $M_3 = \{r, c, d\}$ eine der sechs aus M_4 herleitbaren Mengen mit drei Elementen. Für die aus M_3 herleitbaren zweielementigen Mengen gilt dann:
   (1) $M_2 = \{r, (c+1)(d+1) - 1\}$ oder
   (2) $M_2 = \{(r+1)(c+1) - 1, d\}$ oder
   (3) $M_2 = \{(r+1)(d+1) - 1, c\}$.
   Wegen $r + 1 = (a+1)(b+1)$ folgt aus (1), (2) und (3) mit $a, b, c, d = 1, 3, 10, 22$:
   (4) $M_1 = \{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) - 1\} = \{2023\}$.
   Die gleiche Menge M_1 ergibt sich für jede der übrigen fünf Mengen M_3 als Startmenge.

Aufgabe 1334: Darstellung der 40 als Summe

Wie viele der größe nach geordnete Tripel (x, y, z) mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ gibt es, sodass $x + y + z = 40$ ergibt? (Klaus Ronellenfitsch)

Tipp: Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu lösen, findet sich mit der Gauß'schen Summenformel.

Lösung:

1. Möglichkeit: Mit der Gauß'schen Summenformel
Die Summendarstellungen der Zahl 40 beginnen mit $1 + 1 + 38, 1 + 2 + 37$ und so weiter. Mit der Zahl eins als ersten Summanden gibt es 38 Möglichkeiten, mit der Zahl zwei als ersten Summanden nur noch 37 und so weiter. Insgesamt gibt es also $38 + 37 + 36 + \ldots + 1$ Möglichkeiten. Nach der Gaußschen Summenformel sind das $\frac{38 \cdot 39}{2} = 741$.
2. Möglichkeit: Mit Auswahlmöglichkeiten
Man stelle sich 40 Striche nebeneinander vor, zwischen denen 39 Zwischenräume sind. Nun wählt man sich zur Trennung in drei „Strichpäckchen" zwei der 39 Zwischenräume aus. Also gibt es $\binom{39}{2} = \frac{39 \cdot 38}{1 \cdot 2} = 741$ Möglichkeiten.

Aufgabe 1335: Neun Zahlen und ihre Mittelwerte

Die neun verschiedenen positiven Zahlen $a_1, \dots, a_9$ seien der Größe nach geordnet und besitzen den Mittelwert 9. Nimmt man die kleinste und die größte Zahl weg, so haben die restlichen Zahlen den Mittelwert 8, nimmt man wieder die kleinste und größte Zahl weg, so ist der Mittelwert 7, macht man das Gleiche nochmals, so haben die restlichen drei Zahlen den Mittelwert 6.
Gib alle Möglichkeiten an, um welche Zahlen es sich handeln kann.

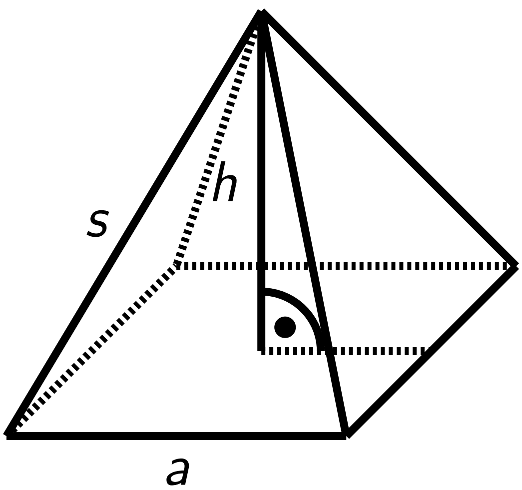
(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:
Die Zahlen $a_1, \dots, a_9$ seien der Größe nach geordnet: $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_9$. Dann ist $a_4 \geq 4$. Da a_4, a_5 und a_6 den Mittelwert 6 haben, ist ihre Summe $3 \cdot 6 = 18$, das heißt, es gibt für (a_4, a_5, a_6) nur die Möglichkeiten $(4, 5, 9)$, $(4, 6, 8)$ und $(5, 6, 7)$.
Also gibt es für (a_1, a_2, a_3) die Möglichkeiten 1-2-3 (für $a_4 = 4$) und 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4 (für $a_4 = 5$).
a_7 ist die Differenz $5 \cdot 7 - (a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$, a_8 die Differenz $7 \cdot 8 - (a_2 + \dots + a_7)$ und a_9 die Differenz $9 \cdot 9 - (a_1 + \dots + a_8)$.
Daher gibt es für die neun Zahlen sechs Möglichkeiten:

$1, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 19, 24$
$1, 2, 3, 4, 6, 8, 14, 19, 24$
$1, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 19, 24$
$1, 2, 4, 5, 6, 7, 13, 19, 24$
$1, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 18, 24$
$2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 18, 23$

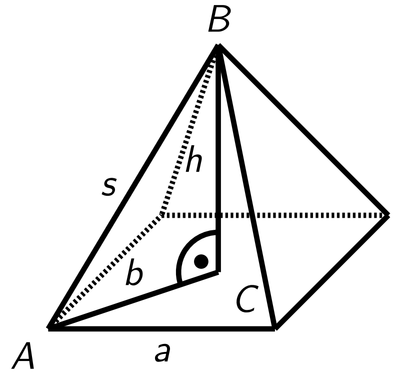
Aufgabe 1336: Eine besondere Pyramide

Finde alle quadratischen Pyramiden, deren Strecken a, h und s drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, wobei $a < h < s$ vorausgesetzt ist.



(Christoph Sievert)

Lösung:



Für die Strecke b gilt $b = \sqrt{\frac{1}{2}}a$, somit folgt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}a\right)^2 + h^2 = s^2$$

Verwendet man $a < h < s$, so gilt

$$\frac{1}{2}(s-2)^2 + (s-1)^2 = s^2$$

$$s_1 = 4 + \sqrt{10}$$

$$s_2 = 4 - \sqrt{10}$$

da s_1 und s_2 keine natürlichen Zahlen sind, kann es solche Pyramiden nicht geben.

Aufgabe 1337: Funktionalgleichung

Für eine reelle Funktion f gelte: $f(2x+3) + f(4) = 6x + 7$.

a) Bestimme $f(8)$.

b) Zeige: $f(x+4) - f(x)$ hat für alle x den gleichen Wert.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

a) Setzt man $x = \frac{1}{2}$, so erhält man $f(4) + f(4) = 10$. Also ist $f(4) = 5$.
Setzt man $x = \frac{5}{2}$, so erhält man $f(8) + f(4) = 22$. Also ist $f(8) = 22 - 5 = 17$.

b) Für $y = 2x + 3$ ist $x = \frac{y-3}{2}$, also ist $f(y) + f(4) = 6 \cdot \frac{y-3}{2} + 7 = 3y - 9 + 7$.
Daher ist $f(y) = 3y - 7$ bzw. (Variablentausch) $f(x) = 3x - 7$.
Nun ist $f(x+4) - f(x) = 3(x+4) - 7 - (3x-7) = 3x + 12 - 7 - 3x + 7 = 12$, unabhängig von x.

Bemerkung: Wie oben gezeigt, ist f eine lineare Funktion mit der Steigung $3 = f(x+1) - f(x)$.

Zeitvertreib bei einer Bahnreise

von Hartwig Fuchs

Die beiden Professoren Quaoar und Pnin fahren mit dem Zug zu einem Mathematikerkongress.
Unterwegs schlägt Quaoar als Zeitvertreib ein Würfelspiel vor.

Das Spiel mit sieben Würfeln

In einer Spielrunde wirft Quaoar sieben Würfel. Gilt für die Summe A der gewürfelten Augen: $A \geq 25$, so erhält Quaoar einen Euro von Pnin. Danach würfelt Pnin. Er erhält einen Euro von Quaoar, falls seine gewürfelte Summe $A \leq 24$ ist. Nach zehn Runden beklagt sich Pinin: „Sie haben sieben Euro, ich dagegen nur drei Euro gewonnen. Das Spiel ist unfair $A = 42$ ist die maximale Augensumme und folglich würfelt man eher eine Augensumme $A \geq 25$ als $A \leq 24$."
Quoaoar zu Pnin: „Stimmt nicht!"
Pinin kommt ins Grübeln.
Das Ergebnis eines Wurfs von sieben Würfeln sei $E = (w_1, w_2, \dots, w_7)$, wobei $1 \leq w_i \leq 6$ ist und $A = w_1 + w_2 + \dots + w_7$ die Augensumme von E sei.

(1) Zu jedem möglichen Ergebnis E gibt es genau ein mögliches Ergebnis E', $E' = (7 - w_1, 7 - w_2, \dots, 7 - w_7)$ mit der Augensumme $A' = 49 - A$.

Für die Wahrscheinlichkeit eines möglichen Ereignisses X schreiben wir: $P(X)$. Damit gilt für die Würfelergebnisse w_i und $(7 - w_i)$: $P(w_i) = P(7 - w_i)$.
Folglich ist

(2) $P(E) = P(E')$.

Wenn wir nun die Menge aller möglichen Ergebnisse in zwei disjunkte Mengen $\{E'$ mit $7 \leq A' \leq x\}$ und $\{E$ mit $x + 1 \leq A \leq 42\}$ aufteilen, so gilt wegen (2)

(3) $P(\{E'\}) = P(\{E\})$,

sobald die Mengen $\{E'\}$ und $\{E\}$ gleich viele, nähmlich 18 Elemente besitzen (es gibt $42 - 6$ verschiedene Abstandsummen). Daraus folgt $x = 24$ und somit

(4) Es gilt $P(7 \leq A \leq 24) = P(25 \leq A \leq 42)$.

Pnin daraufhin zu Quaoar: „Das Spiel ist nach (4) tatsächlich fair. Spielen wir also weiter."

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

Ian Stewart: Die Welt als Zahl

„Wozu braucht man Mathematik, es gibt doch Taschenrechner und Computer?" Diese Frage höre ich als Mathematiklehrer häufig von Schülerinnen und Schülern. Zwei einfache Antworten wären „Um zu verstehen, wie Computer und Taschenrechner funktionieren." oder „Weil wir es können." bzw. „Weil unser Gehirn und unsere Fantasie in der Lage sind, auch komplizierte mathematische Probleme zu lösen und jedes gelöste Problem in uns drin Glückshormone freisetzt." Das neue Buch des englischen Mathematik-Professors Ian Stewart nähert sich dieser

Frage intensiver und gibt vielfältigere Antworten. Der Autor erläutert nach dem allgemeinen Einführungskapitel in 13 weiteren Kapiteln die unterschiedlichsten Anwendungsgebiete, in denen Mathematik unser Leben beeinflusst.

Dabei geht es um die Folgen, wenn für Wahlen die Wahlkreise unterschiedlich zugeschnitten werden; die Frage des kürzesten Weges eines Handlungsreisenden; das Königsberger Brückenproblem; der kleine Satz von Fermat im Zusammenhang mit Kryptographie; die komplexe Zahlenebene; Hamiltons Quaternionen und Computergrafik; Chaostheorie und Matratzenfedern; Fourier-Transformationen; Bild-Transformationen für digitale Fotografie; Navigation im Auto durch Satellitentechnik; die Modellierung der schmelzenden Polkappen und Topologie.

Die spannendste Erkenntnis von Stewarts Buch ist, dass viele heutige Probleme mit mathematischen Werkzeugen gelöst werden können, die vor vielen Jahren oder Jahrhunderten entwickelt wurden und bei deren Entdeckung ganz andere Fragestellungen im Mittelpunkt standen.

Fazit

Wer mathematisch interessiert ist und eine mögliche Antwort auf die eingangs gestellte Frage „Wofür braucht man das?“ sucht, wird hier fündig. Wie zu erwarten gibt es jedoch keine kurzen Antworten und man muss sich in die jeweiligen Kapitel einlesen. Ian Stewart beschreibt die mathematischen Anwendungen ausführlich und gut verständlich. Auch wenn fast keine komplizierten Formeln vorkommen, sind gewisse mathematische Grundkenntnisse erforderlich oder zumindest hilfreich. Deshalb die einschränkende Altersempfehlung ab Klasse 10.
Gesamtbeurteilung: gut ☺ ☺

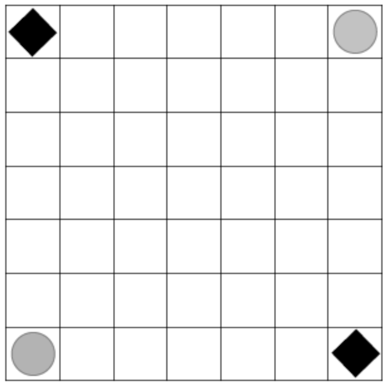
Angaben zum Buch

Stewart, Ian: Die Welt als Zahl. Wie Mathematik unseren Alltag prägt,
Hamburg (rororo) 2024, ISBN 978-3-499-00930-3, Taschenbuch 432 Seiten
Art des Buches: Sachbuch
Mathematisches Niveau: gut verständlich
Altersempfehlung: ab 15 Jahren (Klasse 10)

Bundeswettbewerb Mathematik
Erste Runde 2024
von Volker Priebe und Stefan Kermer

Aufgabe 1

Arthur und Renate spielen auf einem quadratischen Spielbrett, das in $7x7$ Spielfelder unterteilt ist, Arthur hat zwei graue Steine, die anfangs im linken unteren und rechten oberen Eckfeld liegen. Renate hat zwei schwarze Steine, die anfangs im linken oberen und rechten unteren Eckfeld liegen. Wer am Zug ist, wählt einen seiner beiden Spielsteine und bewegt ihn in ein waagrecht oder senkrecht benachbartes freies Feld. Arthur und Renate ziehen abwechselnd, Arthur beginnt.



Arthur hat gewonnen, wenn seine beiden Steine nach endlich vielen Zügen in waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern liegen.
Kann Renate dies durch geschicktes Ziehen verhindern?
Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Behauptung

Ja, Renate kann durch geschicktes Ziehen verhindern, dass Arthur gewinnt.

Beweis

Wir bezeichnen die 7 waagrecht nebeneinander liegenden Felder des Spielbretts als Zeile und die 7 senkrecht nebeneinander liegenden Felder des Spielbretts als Spalte. Das quadratische Spielbrett besteht somit aus 7 Zeilen bzw. 7 Spalten. Arthurs Steine, die anfangs im linken unteren bzw. rechten oberen Eckfeld liegen, werden mit A bzw. C bezeichnet; Renates Steine, die anfangs im rechten unteren bzw. linken oberen Eckfeld liegen, werden mit B bzw. D bezeichnet. Ein Zug von Arthur oder Renate kann einen Stein im Allgemeinen vom Feld, in dem der Stein vor dem Zug liegt, in vier Richtungen bewegen, nämlich in das waagrecht links, waagrecht rechts, senkrecht unten oder senkrecht oben benachbarte Feld. Nicht immer sind alle Richtungen für einen Zug ausführbar, dann nämlich, wenn der Stein am Rand des Spielfelds liegt oder ein waagrecht oder senkrecht benachbartes Feld durch einen anderen Stein belegt ist.
Vor Arthurs erstem Zug sind die folgenden vier Bedingungen erfüllt, was sich direkt aus der Aufgabenstellung ergibt.

(1) Die Steine B und A liegen in derselben Zeile, wobei B rechts von A liegt.

(2) Die Steine D und C liegen in derselben Zeile, wobei D links von C liegt.

(3) Die Steine B und C liegen in derselben Spalte, wobei B unterhalb von C liegt.

(4) Die Steine D und A liegen in derselben Spalte, wobei D oberhalb von A liegt.

Jede der vier Bedingungen spricht zwei Steine an, nämlich je einen von Arthur bzw. Renate. Jeder der Steine A, B, C, D wird in genau zwei Bedingungen erwähnt, einmal nur bezüglich der Zeile und einmal nur bezüglich der Spalte, in der der Stein liegt.
Wir zeigen nun: Wenn die Steine vor Arthurs nächstem Zug alle Bedingungen (1) bis (4) erfüllen, dann

(a) liegen nach einem beliebigen nächsten Zug von Arthur, der ausführbar ist, in jeder Zeile bzw. Spalte des Spielbretts höchstens zwei Steine;

(b) kann Renate nach einem beliebigen ausführbaren Zug von Arthur mit ihrem direkt anschließenden Zug stets erreichen, dass die Steine wiederum alle Bedingungen (1) bis (4) erfüllen.

Wir beweisen Aussage (a) (durch Widerspruch). Wir nehmen an, dass es nach dem nächsten Zug von Arthur eine Zeile bzw. Spalte gibt, die drei Steine enthält. Wegen der Bedingungen (1) bis (4) muss dies eine der Zeilen bzw. Spalten sein, in der vor Arthurs Zug zwei Steine, also je ein Stein von Arthur bzw. Renate, liegen. Nach Arthurs Zug liegen also Arthurs Steine A und C sowie ein Stein von Renate in dieser Zeile bzw. Spalte. Wir betrachten beispielhaft eine Konstellation: Zieht Arthur mit dem Stein A in die Spalte aus Bedingung (3), in der B und C liegen, so ist dies nach Bedingung (1) nur möglich, wenn den Stein A aus seinem bisherigen Feld in Richtung waagrecht rechts zieht. Dieses Feld ist aber durch den Stein B belegt. Der Zug ist also nicht ausführbar – Widerspruch. Die anderen Konstellationen lassen sich entsprechend zum Widerspruch führen. Das beweist Aussage (a).
Wir beweisen nun Aussage (b). Wir fassen die möglichen nächsten Züge von Arthur und Renates jeweils darauffolgenden Zug tabellarisch zusammen.

Zieht Arthur Stein...,	so ist nur Bedingung...;	nach Renates Zug liegen Steine... als zuvor
A waagrecht links bzw. rechts	(4) nicht erfüllt	D, A eine Spalte weiter links bzw. rechts
C waagrecht links bzw. rechts	(3) nicht erfüllt	B, C eine Spalte weiter links bzw. rechts
A senkrecht unten bzw. oben	(1) nicht erfüllt	B, A eine Zeile weiter unten bzw. oben
C senkrecht unten bzw. oben	(2) nicht erfüllt	D, C eine Zeile weiter unten bzw. oben

Wir überzeugen uns leicht davon, dass damit nach Renates Zug alle vier Bedingungen (1) bis (4) wieder erfüllt sind, denn nach Arthurs Zug sind drei der Bedingungen weiterhin erfüllt und nur die in der mittleren Tabellenspalte genannte Bedingung ist nicht erfüllt. Nach Renates Zug ist auch diese vierte Bedingung

wieder erfüllt, und zwar liegen beide Steine wieder in derselben Spalte bzw. Zeile und beide Steine liegen wieder unter-/oberhalb bzw. links/rechts voneinander.
Der angegebene Zug von Renate ist stets ausführbar, wie wir in jeder Tabellenzeile überprüfen: Genau dann, wenn Renates Stein gemäß der rechten Tabellenspalte am Rand des Spielbretts liegt, liegt auch Arthurs Stein aus der linken Tabellenspalte am Rand des Spielbretts. Außerdem ist das Feld, auf das Renate ihren Stein laut Tabelle ziehen möchte, genau dann belegt, wenn das Feld, auf das Arthur seinen Stein zieht, belegt ist: Wir betrachten beispielhaft die Konstellation der ersten Tabellenzeile: Laut Aussage (a) führt Renates Zug des Steins D nach waagrecht rechts genau dann auf ein belegtes Feld, wenn dieses durch den Stein C belegt ist. Nach Bedingung (3) liegen die Steine C, B in derselben Spalte, und laut Bedingung (1) die Steine A, B in derselben Zeile, wobei B rechts von A liegt.
Aussage (a) besagt, dass die Steine A und C nicht in derselben Zeile bzw. Spalte liegen können, weil dann zusammen mit einem von Renates Steinen drei Steine in dieser Zeile bzw. Spalte liegen würden.
Das beweist die Behauptung. $\square$

Aufgabe 2

Kann eine Zahl $44\cdots41$, deren Dezimaldarstellung aus einer ungeraden Anzahl von Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, eine Quadratzahl sein?
Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Behauptung

Nein, eine Zahl wie in der Aufgabenstellung kann keine Quadratzahl sein.

Erster Beweis

Wir benennen für eine positive ganze Zahl $k \geq 1$ mit a_k diejenige Zahl, deren Dezimaldarstellung aus $2k-1$ Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, also $a_1 = 41, a_2 = 4441$, ...(dies sind die Zahlen der Aufgabenstellung), und mit s_k diejenige Zahl, deren Dezimaldarstellung aus k Ziffern 6 besteht, also $s_1 = 6, s_2 = 66$, ... Wenn wir nachweisen, dass

$$s_k^2 < a_k < (s_k+1)^2 \text{ für alle } k \geq 1, \tag{2.1}$$

das heißt, die Zahl a_k der Aufgabenstellung stets zwischen den beiden direkt aufeinanderfolgenden Quadratzahlen s_k^2 und $(s_k+1)^2$ liegt, dann kann a_k nicht selbst eine Quadratzahl sein. Wir zeigen induktiv, dass für alle positiven ganzen Zahlen $k \geq 1$

$$s_k^2 = \underbrace{4\cdots4}_{k-1}3\underbrace{5\cdots5}_{k-1}6. \tag{2.2}$$

Der Induktionsanfang ($k=1$) ist hierbei wegen $s_1^2 = 6^2 = 36$ klar, und für den Induktionsschluss ($k \to k+1$) beobachten wir zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned} s_{k+1}^2 &= (s_k \cdot 10 + 6)^2 = s_k^2 \cdot 100 + s_k \cdot (100+20) + 36 \\ &= \underbrace{4\cdots4}_{k-1}3\underbrace{5\cdots5}_{k-1}6 \cdot 100 + \underbrace{6\cdots6}_{k-1}6 \cdot 100 + 1\underbrace{3\cdots3}_{k-1}2 \cdot 10 + 36 \\ &= \left(\underbrace{4\cdots4}_{k-1}3\underbrace{5\cdots5}_{k-1}6 + 7\underbrace{9\cdots9}_{k-1}\right) \cdot 100 + 56 \\ &= \underbrace{4\cdots4}_{k}3\underbrace{5\cdots5}_{k}6. \end{aligned}$$

Aus (2.2) schließen wir für alle $k \geq 1$

$$0 < \underbrace{8\cdots8}_{k-1}5 = a_k - s_k^2 < 1\underbrace{3\cdots3}_{k} = 2s_k + 1,$$

damit auch $a_k < s_k^2 + 2s_k + 1 = (s_k+1)^2$ und somit (2.1).
Dies beweist die Behauptung. □

Zweiter Beweis

Wir benennen für eine ganze Zahl $k \geq 1$ mit a_k diejenige Zahl, deren Dezimaldarstellung aus $2k-1$ Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, also $a_1 = 41$, $a_2 = 4441$, ...(dies sind die Zahlen der Aufgabenstellung). Die Folge der Zahlen $(a_k)_{k\geq1}$ wächst offensichtlich streng monoton, also $41 = a_1 < a_2 < \cdots$.
Auf Grund der regelmäßigen Struktur der Zahlen a_k lässt sich leicht nachweisen, dass für alle positiven ganzen Zahlen $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 9a_k &< 9a_k + 31 = a_k \cdot 10 + 31 - a_k = \underbrace{4\cdots4}_{2k-1}10 + 31 - \underbrace{4\cdots4}_{2k-1}1 \\ &= \underbrace{4\cdots4}_{2k}1 - \underbrace{4\cdots4}_{2k-1}1 = 4\underbrace{0\cdots0}_{2k} = 4 \cdot 10^{2k} = (2 \cdot 10^k)^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir argumentieren nun mit einem Beweis durch Widerspruch: Nehmen wir an, es gibt eine positive ganze Zahl $k \geq 1$, so dass a_k eine Quadratzahl, also $\sqrt{a_k}$ eine positive ganze Zahl mit $\sqrt{a_k} \geq \sqrt{a_1} > 6$ ist, dann ist wegen (2.3) und $k \geq 1$

$$31 = (2\cdot10^k)^2 - (3\sqrt{a_k})^2 = (2\cdot10^k - 3\sqrt{a_k})\cdot(2\cdot10^k + 3\sqrt{a_k}) > 1\cdot(20+18) = 38;$$

das ist ein Widerspruch.
Also ist keine Zahl der Aufgabenstellung eine Quadratzahl.
Das beweist die Behauptung. □

Dritter Beweis (Rest bei Division durch 11)

Jede natürliche Zahl z lässt bei Division durch 11 einen der Reste 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5 modulo 11. Also lässt z^2 einen der Reste 0, $(\pm1)^2 \equiv 1$, $(\pm2)^2 \equiv 4$, $(\pm3)^2 \equiv 9$, $(\pm4)^2 \equiv 5$, $(\pm5)^2 \equiv 3$ modulo 11.

Damit wissen wir: Lässt eine natürliche Zahl bei Division durch 11 einen anderen Rest als 0, 1, 3, 4, 5 oder 9, so kann sie keine Quadratzahl sein.
Es sei z eine natürlich Zahl mit Zifferndarstellung $z_n z_{n-1} \cdots z_2 z_1 z_0$ im Dezimalsystem, also $z = z_0 + z_1 \cdot 10 + z_2 \cdot 10^2 + \cdots + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + z_n \cdot 10^n$ mit $z_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für $0 \leq i \leq n$. Für die Division von z durch 11 gilt wegen $10 \equiv -1 \pmod{11}$, also $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$ für $0 \leq i \leq n$, dass

$$\begin{aligned} z &= z_0 + z_1 \cdot 10 + z_2 \cdot 10^2 + \cdots + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + z_n \cdot 10^n \\ &\equiv z_0 + z_1 \cdot (-1) + z_2 \cdot (-1)^2 + \cdots + z_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + z_n \cdot (-1)^n \pmod{11}; \end{aligned}$$

die Zahl z lässt also bei Division durch 11 denselben Rest wie ihre alternierende Quersumme $z_0 - z_1 + z_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot z_{n-1} + (-1)^n \cdot z_n$. Für eine positive ganze Zahl $k \geq 1$ sei z diejenige Zahl, deren Dezimaldarstellung aus $2k - 1$ Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht (dies sind die Zahlen der Aufgabenstellung), also $z_0 = 1$ und $z_1 = z_2 = \cdots = z_{2k-2} = z_{2k-1} = 4$. Für die alternierende Quersumme von z gilt

$$\begin{aligned} & z_0 - z_1 + (z_2 - z_3) + \cdots + (z_{2k-2} - z_{2k-1}) \\ &= 1 - 4 + (4 - 4) + \cdots + (4 - 4) = -3 \equiv 8 \pmod{11} \end{aligned}$$

mit $8 \notin \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$; also kann nach unserer Beobachtung am Beginn keine Zahl der Aufgabenstellung eine Quadratzahl sei.
Das beweist die Behauptung. □

Bemerkung

Es ist $441 = 21 \cdot 21$, also eine Quadratzahl, aber alle anderen Zahlen $44 \cdots 441$, deren Dezimaldarstellung aus einer (positiven) geraden Anzahl von Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, sind vermutlich keine Quadratzahlen.

Aufgabe 3

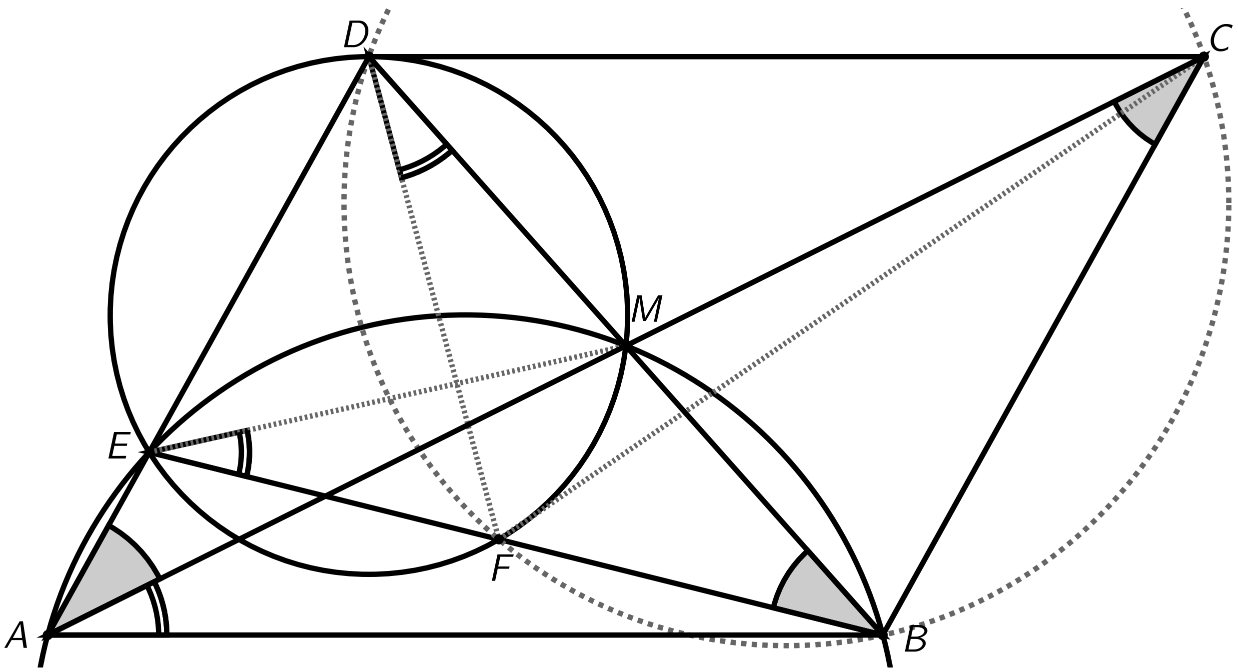
Gegeben ist ein Parallelogramm $\varlozenge ABCD$ mit Diagonalenschnittpunkt M derart, dass der Umkreis des Dreiecks $\triangle ABM$ die Strecke AD in einem von A verschiedenen Punkt E schneidet und der Umkreis des Dreiecks $\triangle EMD$ die Strecke BE in einem von E verschiedenen Punkt F schneidet.
Zeige: Die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle DCF$ sind gleich groß.

Vorbemerkung

Ohne Einschränkung setzen wir voraus, dass A, B, C, D gegen den Uhrzeigersinn aufeinanderfolgen. Die Voraussetzungen der Aufgabenstellung besagen, dass der Punkt E im Inneren der Strecke AD und damit in derselben Halbebene bezüglich der Geraden (AB) wie der Punkt M liegt; M liegt im Inneren des Parallelogramms $\varlozenge ABCD$. Auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABM$ folgen also die Punkte A, B, M, E in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn aufeinander. Das Viereck $\square ABME$ ist demnach ein überschlagungsfreies Sehnenviereck. Das Innere der Strecke BE liegt unter den Voraussetzungen der Aufgabenstellung im Inneren des Dreiecks $\triangle ABD$, und somit muss der Punkt F auf demjenigen Kreisbogen des Umkreises von $\triangle EMD$ liegen, der gegen den Uhrzeigersinn zwischen E, M verläuft. Das Viereck $\square EFMD$ ist demnach ebenfalls ein überschlagungsfreies Sehnenviereck.

Erster Beweis ($\square$*CDFB* ist ein Sehnenviereck)

Wir weisen über $\sphericalangle DCB + \sphericalangle BFD = 180^\circ$ nach, dass auch $\square CDFB$ ein (überschlagungsfreies) Sehnenviereck ist.



Weil der Punkt M auf AC und BD sowie nach Konstruktion der Punkt E auf AD und der Punkt F auf BE liegen, wissen wir mit dem Satz vom Umfangswinkel in den Sehnenvierecken $\square ABME$ bzw. $\square EFMD$, dass

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle MAE = \sphericalangle MBE = \sphericalangle DBF \tag{3.1}$$

bzw.

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM = \sphericalangle BEM = \sphericalangle FEM = \sphericalangle FDM = \sphericalangle FDB. \tag{3.2}$$

Im Dreieck $\triangle BDF$ ist also mit (3.1) und (3.2)

$$180^\circ - \sphericalangle BFD = \sphericalangle DBF + \sphericalangle FDB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB,$$

wobei die letzte Gleichung eine Eigenschaft des Parallelogramms $\varparallelogram ABCD$ ist. Das ist äquivalent zu $\sphericalangle DCB + \sphericalangle BFD = 180^\circ$. Damit haben wir bewiesen, dass $\square CDFB$ ein (überschlagungsfreies) Sehnenviereck ist.

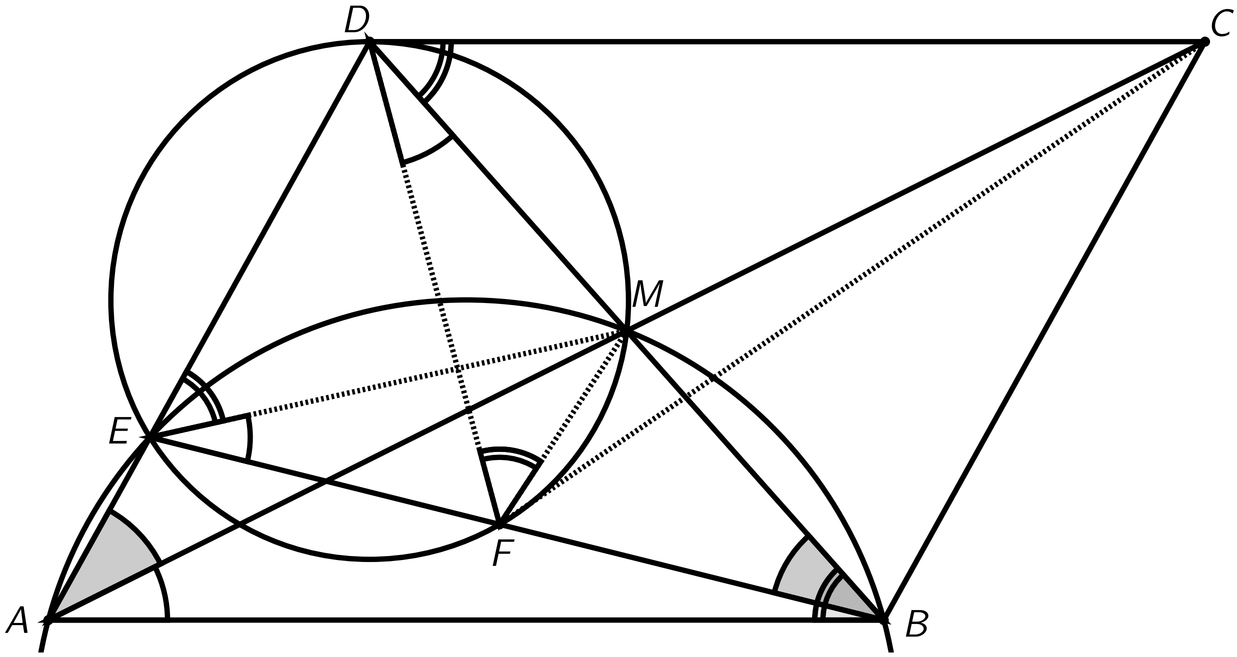
Im Sehnenviereck $\square CDFB$ können wir mit dem Satz vom Umfangswinkel schließen, dass $\sphericalangle DCF = \sphericalangle DBF$. Zusammen mit (3.1) und der Wechselwinkeleigenschaft im Parallelogramm $\varparallelogram ABCD$ folgt

$$\sphericalangle DCF = \sphericalangle DBF = \sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB;$$

das beweist die Behauptung der Aufgabenstellung. □

Zweiter Beweis (Ähnliche Dreiecke)

Wir weisen nach, dass die Konstruktion der Aufgabenstellung zu zwei Dreiecken führt, die zu den Diagonalen-Dreiecken $\triangle ABM$ bzw. $\triangle DAM$ des Parallelogramms $\varparallelogram ABCD$ ähnlich sind.



Die Dreiecke $\triangle DFM$ und $\triangle ABM$ sind ähnlich zueinander (Ähnlichkeitssatz W:W:W). Denn aus dem Satz vom Umfangswinkel in den Sehnenvierecken $\square EFMD$ bzw. $\square ABME$ folgen $\sphericalangle FDM = \sphericalangle FEM = \sphericalangle BEM = \sphericalangle BAM$ und $\sphericalangle MFD = \sphericalangle MED = 180^\circ - \sphericalangle AEM = \sphericalangle MBA$; die letzte Gleichung gilt, weil $\sphericalangle AEM$ und $\sphericalangle MBA$ gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck $\square ABME$ sind. Damit schließen wir auf die Längenbeziehungen

$$\overline{MD} : \overline{DF} = \overline{MA} : \overline{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{DF} : \overline{AB} = \overline{MD} : \overline{MA}. \tag{3.3}$$

Auch die Dreiecke $\triangle ADM$ und $\triangle CDF$ sind ähnlich zueinander. Zum einen gelten im Sehnenviereck $\square ABME$ die Beziehungen $\sphericalangle BAE = 180^\circ - \sphericalangle EMB$ und $\sphericalangle EMA = \sphericalangle EBA$ wegen des Satzes vom Umfangswinkel, also

$$\begin{aligned} \sphericalangle DMA &= \sphericalangle DME + \sphericalangle EMA \\ &= 180^\circ - \sphericalangle EMB + \sphericalangle EBA \\ &= \sphericalangle BAE + \sphericalangle EBA = 180^\circ - \sphericalangle AEB, \end{aligned}$$

zum anderen gelten $\sphericalangle FDM = \sphericalangle FEM$ und $\sphericalangle MBA = 180^\circ - \sphericalangle AEM$ (wie oben begründet) sowie $\sphericalangle MDC = \sphericalangle MBA$ als Wechselwinkel im Parallelogramm

$\varparallelogram ABCD$, also

$$\sphericalangle FDC = \sphericalangle FDM + \sphericalangle MDC = \sphericalangle FEM + \sphericalangle MBA$$
$$= 180^\circ - (\sphericalangle AEM - \sphericalangle FEM)$$
$$= 180^\circ - \sphericalangle AEB;$$

das beweist

$$\sphericalangle DMA = \sphericalangle FDC. \tag{3.4}$$

Wegen $\overline{CD} = \overline{AB}$ im Parallelogramm $\varparallelogram ABCD$ und mit (3.3) schließen wir auf die Längenbeziehungen

$$\overline{DF} : \overline{CD} = \overline{DF} : \overline{AB} = \overline{MD} : \overline{MA}. \tag{3.5}$$

Wegen (3.4) und (3.5) sind die Dreiecke $\triangle ADM$ und $\triangle CDF$ ähnlich zueinander (Ähnlichkeitssatz S:W:S). Insbesondere ist damit zusammen mit der Wechselwinkeleigenschaft im Parallelogramm $\varparallelogram ABCD$

$$\sphericalangle DCF = \sphericalangle MAD = \sphericalangle ACB;$$

das beweist die Behauptung der Aufgabenstellung. □

Bemerkung

Die Gerade (CD) ist Tangente an den Umkreis von $\triangle EMD$; dies folgt aus dem Sehnentangentenwinkelsatz wegen

$$\sphericalangle MDC = \sphericalangle BDC = \sphericalangle DBA = \sphericalangle MBA = 180^\circ - \sphericalangle AEM = \sphericalangle MED.$$

Aufgabe 4

Für positive ganze Zahlen p, q und r sind $p \cdot q \cdot r$ Einheitswürfel gegeben. Durch jeden dieser Würfel wird ein Loch entlang einer Raumdiagonalen gebohrt, anschließend werden die Würfel an einem sehr dünnen Faden mit Länge $p \cdot q \cdot r \cdot \sqrt{3}$ wie eine Perlenschnur aufgefädelt. Nun sollen die Einheitswürfel zu einem Quader mit den Seitenlängen p, q und r zusammengelegt werden, ohne dass der Faden zerreißt.

(a) Für welche Zahlen p, q und r ist dies möglich?

(b) Für welche Zahlen p, q und r ist dies so möglich, dass Anfang und Ende des Fadens zusammenfallen?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Behauptungen

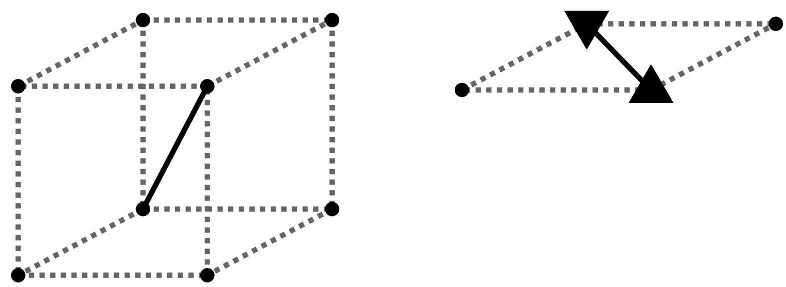
Es gelten die folgenden Aussagen.

(a) Für alle positiven ganzen Zahlen p, q und r können die Einheitswürfel zu einem Quader mit den Seitenlängen p, q und r zusammengelegt werden, ohne dass der Faden zerreißt.

(b) Genau dann, wenn mindestens zwei der positiven ganzen Zahlen p, q und r gerade sind, können die Einheitswürfel so zu einem Quader mit den Seitenlängen p, q und r zusammengelegt werden, dass Anfang und Ende des Fadens zusammenfallen.

Beweis

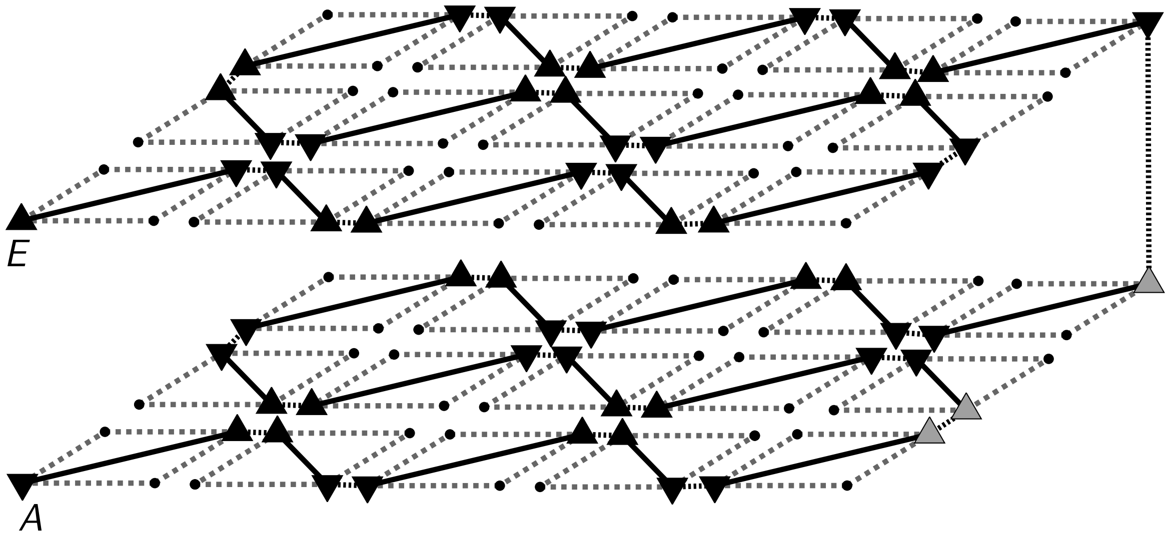
Wir führen zunächst eine graphische Darstellung für die Raumdiagonalen der Einheitswürfel ein, um die Fadenführung übersichtlicher veranschaulichen zu können. Wie in der Skizze stellen wir einen Einheitswürfel als Einheitsquadrat dar. Jede Ecke des Einheitsquadrats entspricht genau zwei Ecken des Einheitswürfels, je einer auf der Unterseite und einer auf der Oberseite des Würfels. Eine Diagonale des Einheitsquadrats entspricht genau zwei Raumdiagonalen im Einheitswürfel. Diese können wir auch im Einheitsquadrat unterscheiden, indem wir die Ecke auf der Unter- bzw. Oberseite des Würfels mit einem Dreieck kennzeichnen, dessen Spitze nach unten bzw. oben zeigt; siehe Skizze 4.1 für einen beispielhaften Fall.



Skizze 4.1: Eine Raumdiagonale des Würfels als Diagonale im Quadrat dargestellt

Da die Raumdiagonale des Einheitswürfels die Länge $\sqrt{3}$ hat, ist der Faden genau so lang wie die Summe der Längen der Raumdiagonalen in den $p \cdot q \cdot r$ Einheitswürfeln. Mehrfache Durchquerungen der Raumdiagonalen oder Umwege über die Seitenflächen bzw. Kanten der Einheitswürfel sind nicht möglich.
Wir beweisen ***Aussage (a)***, indem wir beispielhafte Fadenführungen angeben. Der Übersichtlichkeit halber rücken wir in unseren Skizzen die Einheitswürfel/-quadrate etwas auseinander. Die durch gestrichelte Strecken verbundenen Ecken rücken in der eigentlichen Fadenführung direkt aneinander. Wir unterscheiden zwei Fälle: Nach dem Schubfachprinzip sind von den drei positiven ganzen Zahlen p, q und r entweder mindestens zwei ungerade (1. Fall) oder mindestens zwei gerade (2. Fall). Nach Drehung des Quaders und Umbenennungen der Seitenlängen können wir davon ausgehen, dass p, q beide ungerade (1. Fall) oder beide gerade (2. Fall) sind.

1. Fall: Die Seitenlängen p (Breite), q (Tiefe) sind beide ungerade.

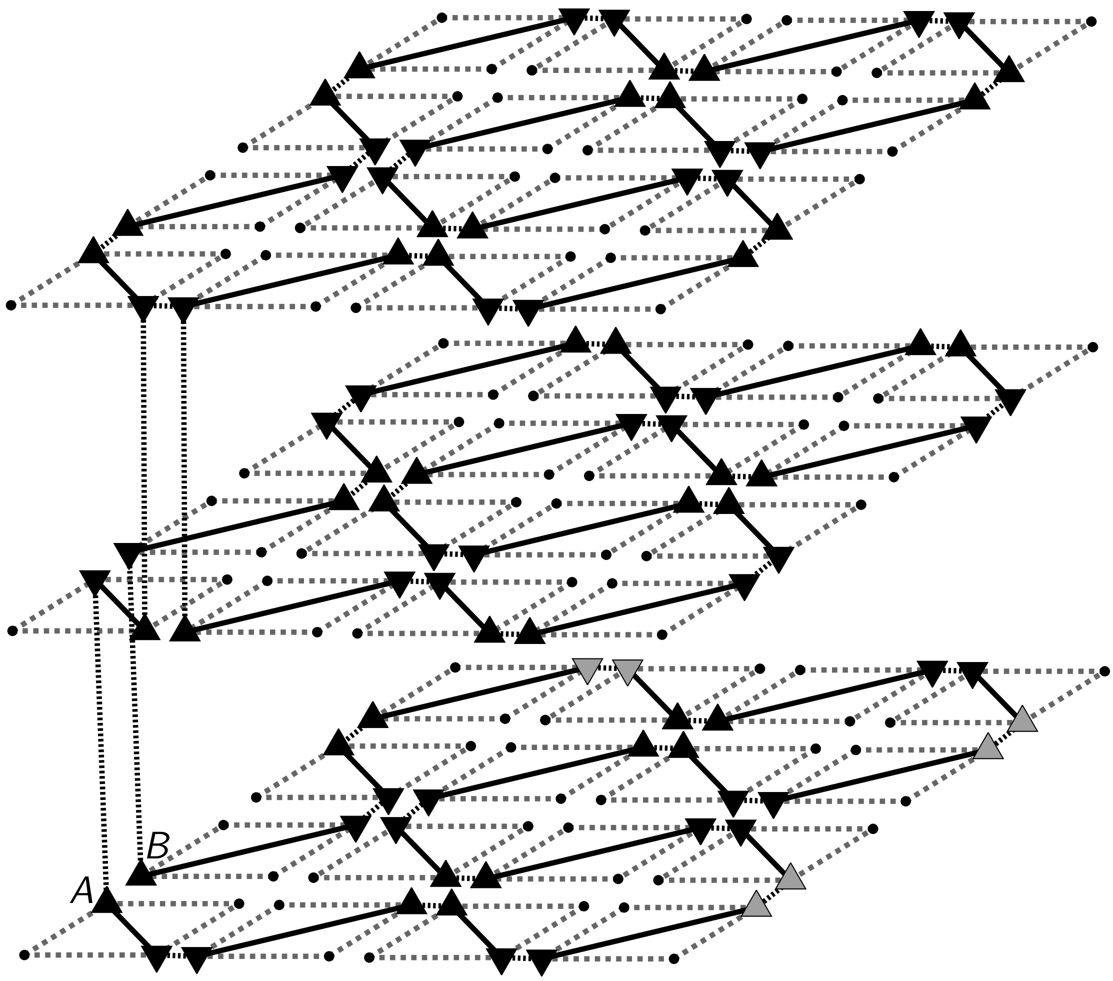


Skizze 4.2: Beispielhafte Fadenführung im 1. Fall mit $(p, q, r) = (5, 3, 2)$

In Skizze 4.2 zeigen wir beispielhaft die Fadenführung für $p = 5$, $q = 3$ und $r = 2$. Der Faden beginnt an der Ecke A und endet an der Ecke E. In Richtung der Breite wiederholt sich die Fadenführung ab der Ecke, zu der der Faden von A aus führt, nach jeweils zwei Einheitswürfeln. In Richtung der Tiefe wiederholt sich die Fadenführung ab der vorderen grau markierten Ecke nach jeweils zwei Reihen von Einheitswürfeln. Es ist damit anschaulich, wie die Fadenführung an den grau markierten Ecken um jeweils eine gerade Anzahl von Einheitswürfeln verlängert werden könnte (oder an anderen Ecken verkürzt werden könnte), so dass wir den Faden durch einen Quader mit beliebigen ungeraden Breiten p und Tiefen q und Höhe $r = 1$ führen. Der Faden tritt immer an der Entsprechung der rechten hinteren grauen Ecke nach oben aus, so dass auch der Fall p, q ungerade und $r = 2$ aus Skizze 4.2 klar ist. Durch Wiederholung der angegebenen Fadenführung von Ecke E aus lassen sich die Einheitswürfel auch zu einem Quader mit Seitenlängen p, q ungerade und beliebiger Höhe $r \geq 3$ zusammenlegen.

2. Fall: Die Seitenlängen p (Breite), q (Tiefe) sind beide gerade.
In Skizze 4.3 zeigen wir beispielhaft die Fadenführung für $p = 4$, $q = 4$ und $r = 3$. Der Faden beginnt und endet an der Ecke A. Auf der untersten Lage der Einheitswürfel ($r = 1$) wiederholt sich in Richtung der Breite die Fadenführung nach jeweils zwei Einheitswürfeln. In Richtung der Tiefe wiederholt sich die Fadenführung nach jeweils zwei Reihen von Einheitswürfeln. Es ist damit anschaulich klar, wie die Fadenführung an den grau markierten Ecken um jeweils eine gerade Anzahl von Einheitswürfeln verlängert werden könnte (bzw. an anderen Ecken verkürzt werden könnte), so dass wir den Faden durch einen

Quader mit beliebigen geraden Breiten p und Tiefen q und Höhe $r = 1$ führen. Der Faden führt dann entweder von der Ecke B zurück zur Ecke A ($r = 1$) oder er tritt an der Ecke B nach oben aus. Aus der Skizze 4.3 wird klar, wie die Fadenführung im Fall p, q gerade und $r = 2$ oder $r = 3$ verläuft. Wenn wir den Faden an der Entsprechung der Ecke B in der dritten Lage der Einheitswürfel weiter nach oben führen, lassen sich durch Wiederholung der angegebenen Fadenführung die Einheitswürfel auch zu einem Quader mit Seitenlängen p, q gerade und beliebiger Höhe $r \geq 3$ zusammenlegen.



Skizze 4.3: Beispielhafte Fadenführung im 2. Fall mit $(p, q, r) = (4, 4, 3)$

Wir beweisen abschließend ***Aussage (b)***. Unsere Fadenführung im 2. Fall von Aussage (a) zeigt, dass eine Fadenführung wie in (b) möglich ist, wenn mindestens zwei der Seitenlängen p, q und r gerade sind.
Es bleibt zu zeigen, dass kein Zusammenlegung der Einheitswürfel zu einem Quader mit den Seitenlängen p, q und r existiert, in dem der Faden nicht zerreißt und Anfang und Ende des Fadens zusammenfallen, wenn mindestens zwei

der Seitenlängen p, q und r ungerade sind. Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass eine Zusammenlegung der Einheitswürfel zu einem Quader mit den Seitenlängen p, q und r existiert, in der Anfang und Ende des Fadens zusammenfallen. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Seiten p, q ungerade sind.
Wir betrachten zunächst den Fall $r = 1$. Der Faden durchquert dann $p \cdot q$ Raumdiagonalen, also eine ungerade Anzahl, und führt stets von einer Ecke, die wir mit einem Dreieck markiert haben, dessen Ecke nach unten zeigt, zu einer Ecke, die wir mit einem Dreieck markiert haben, dessen Ecke nach oben zeigt (oder umgekehrt). Man sieht sofort, dass nach einer ungeraden Anzahl von Raumdiagonalen die Spitzen der Dreiecke am Anfang und am Ende des Fadens in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Damit können Anfang und Ende des Fadens nicht zusammenfallen.
Nun gelte $r \geq 2$. Wir betrachten die beiden Quader Q_{r-1} bzw. Q_1 mit den Seitenlängen p, q und $r - 1$ bzw. p, q und $r = 1$. Im Quader Q_1 mit den Seitenlängen p, q und $r = 1$ kann der Faden nicht alle Einheitswürfel durchlaufen und am Ende zur Anfangsecke zurückkehren, ohne den Quader zu verlassen, wie wir eben gezeigt haben. Damit muss der Faden mindestens zweimal zwischen den beiden Quadern hin und herlaufen. Der Faden durchquert dann in Q_1 jeweils eine gerade Anzahl von Einheitswürfeln bzw. Raumdiagonalen am Stück, bevor er wieder in Q_{r-1} eintritt, weil er bei Ecken beginnen und enden muss, deren Dreiecke dieselbe Orientierung haben. Damit kann der Faden aber nicht alle der ungerade vielen $p \cdot q$ Einheitswürfel in Q_1 durchlaufen – ein Widerspruch.
Das beweist die Behauptungen. □

Wir danken Herrn StD a.D. Karl Fegert, Herrn Bastian Schneider, Herrn Friedemann Schwarz und Herrn OStR Dr. Robert Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Lösung der Fischaufgabe von Seite 8

Mit b, f und s seien die Kilopreise von B, F und S bezeichnet. Dann gilt:

(1) $3b > s$
(2) $s > 2f$
(3) $3f > 4b$ sowie
(4) $s + f + b = 100$

Daraus folgt

(5.1) $20 > b$,
denn mit (1) und (3) folgt aus (4): $100 > 2f + f + b > 4b + b = 5b$;

(6.1) $s > 54$,
denn wegen (2) und (5.1) und (4) ist $s + \frac{s}{2} + 19 > 100$, sodass $s > \frac{162}{3}$ ist;

(5.2) $b > 18$,
denn aus (1) und (6.1) folgt $b > \frac{s}{3} > \frac{54}{3}$;

(5) $b = 19$ wegen (5.1) und (5.2).

(6.2) $57 > s$,
denn aus (1) und (5) erhält man $3 \cdot 19 > s$;

(6) $54 < s < 57$ wegen (6.1) und (6.2).

Fallunterscheidung

Es sei $s = 56$. Dann ist $100 = 56 + f + 19$ und daher ist $f = 25$. Damit ergibt sich aus (3) der Widerspruch $3 \cdot 25 > 4 \cdot 19$.

(7) Für $s = 55$ folgt aus (4), dass $f = 26$ ist.

Für die (5), (6) und (7) angegebenen Werte gelten die Aussagen (1) – (4). Daher:
Die Kilopreise von B, F und S sind 19, 26 und 55 Euro, weshalb Quaoar sich zum Kauf von Forellen entscheidet.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 155

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Levi Brunn 4, Noah Fitting 10, Quirin Fritsch 7, Christina Karst 22, Felix Pick 4, Sina Marie Uherek Reyes 11;
Kl. 7: Robert Schmitt 9;
Kl. 8: Peter Knobloch 14, Lisa Schäfer 19;
Kl. 9: Mai Chi Tran 2,5;

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 6: Cornelia Meyer 6, Silas Salloch 10, Joana Schwettlick 6,
Kl. 9: Aleksandr Silantev 19;

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 7: Nico Mathy 20, Philip Mühlbeyer 8;

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 10: Malcom Carandany 20, Philippos Dimitriou 22;

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 8: Philippa Lamke 25

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 9: Victor Mayer 5,5;

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 7: Ioan Salaru 24;

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 6: Philipp Mühl 6, Martin Schroff 15;
Kl. 8: Jona Gooldmann 3, Daniel Laibach Muniz 28,8;
Kl. 9: Johannes Kiehn 16;
Kl. 10: Georgi Koynov 20,5;
Kl. 12: Sascha Sprengler 20;

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Otto-Schule
Kl. 6: Eric Reichardt 6;

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 10: Dora Emilia Mezaros 17;

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 11: Nils Angel 21;

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 9: Mai Linh Dang 20;
Kl. 12: Tu Sam Dang 21;

Trier, Angela-Merici-Gymnasium:
Kl. 11: Felicitas Bauer 14;

Schüler, bei denen keine Schule angegeben wurde:
Kl. keine Angabe: Junas Dürles 19;

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2024/25 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Zu Besuch:** In der neuen Rubrik *Zu Besuch bei...* der Monoid Website unter:
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/zuBesuchbei.php`
  findest Du ab sofort ein spannendes Interview mit Emmy Noether. Erstellt wurde dies in einer Zusammenarbeit von Dr. Achim Klenke, Dr. Margarita Kraus und Martin Mattheis.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Frank Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Georg Sahliger, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Jahrgang 44 Heft 157 März 2024

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid