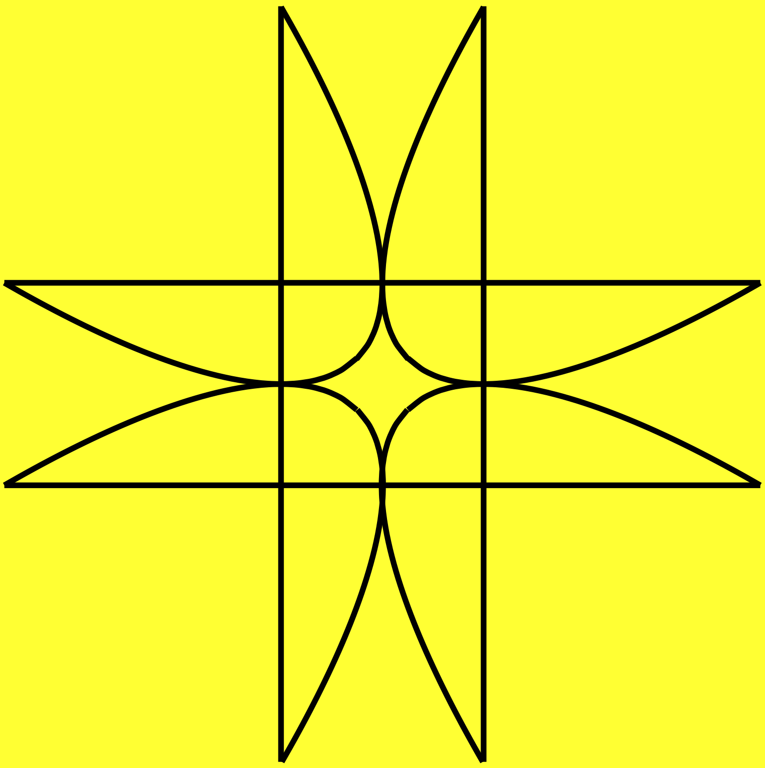
Jahrgang 44 Heft 158 Juni 2024

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. August 2024.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Mainzer Mathe-Akademie
18. September bis 22. September 2024

Bei der Mainzer Mathe-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern, unter der Anleitung von Professorinnen und Professoren der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathe-Akademie anzumelden, die vom 18. September bis 22. September 2024 an der Universität Mainz stattfindet.
Ein genauer Programmplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben oder kann auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Unterbringung

Jugendhaus Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:
`https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/`

Eine mathematische Miniatur
von Hartwig Fuchs

Man beweise: $S_{2024} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2023\cdot 2024} = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$

Nachweis

Für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
Mithin ist $S_{2024} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = 1 - \frac{1}{2024}$.
Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716) hat die Lösung für ein beliebiges n gefunden.

Wo liegt der Fehler?

von Hartwig Fuchs

Behauptung: Alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ sind gerade.

Nachweis

($*$) Jede ungerade Zahl n hat die Darstellung $n = 2k + 1$ mit einem jeweils ganzzahligen $k \geq 0$.

(1) Annahme: Die Behauptung sei bewiesen für ein beliebig gewähltes k. Es sei also $n = 2k + 1$ eine gerade Zahl.

(2) Dann gilt die Behauptung auch für $k + 1$.
Denn die ungerade Zahl $2(k+1)+1$ ist wegen $2(k+1)+1 = (2k+1)+2$ eine Summe aus zwei geraden Zahlen und daher ist sie gerade.

(1) und (2) zusammen bedeuten:

(3) Wenn $2k + 1$ gerade ist, dann ist es auch die Zahl $2(k + 1) + 1$.

Da k als beliebig wählbar vorausgesetzt ist, folgt aus (3): Es gilt die Behauptung.

Wo liegt der Fehler?

Weil $k \geq 0$ beliebig wählbar ist, darf $k = 0$ sein. Somit sind also die Annahme und die Behauptung falsch für $n = 1$. Aus der falschen Behauptung ist nun die Behauptung für $n = 3$ nicht herleitbar, denn die Logik erklärt Herleitungen von Behauptungen aus Falschaussagen für unzulässig, weil nach einer logischen Regel aus Falschem sowohl Wahres als auch Falsches folgt und somit unentscheidbar ist, ob die "hergeleitete" Aussage wahr oder falsch ist.
Da also die Behauptung für $n = 3$ nicht herleitbar ist, trifft das auch für jedes ungerade $n > 3$ zu. Somit ist der "Beweis" von ($*$) ungültig.

Was uns über den Weg gelaufen ist

Lauter Nicht-Primzahlen

von Hartwig Fuchs

Für welchen x-Wert $x = 1, 2, 3, \ldots$ ist $x^6 + 1091$ erstmals eine Primzahl?

Lösung mit einem Computer

$x^6 + 1091$ ist für jeden Wert $x = 1, 2, 3, \ldots, 3905$ keine Primzahl, jedoch für $x = 3906$, ist $3906^5 + 1091 (\approx 3{,}55 \cdot 10^{21})$ eine Primzahl.

Der Mathematiker und die zehn Elefanten

Eine arithmetische Knobelei

von Hartwig Fuchs

In einer Vorlesungspause treffen sich die Mathematiker Quaoar und Pnin in der Mensa. Während ihrer Unterhaltung fragt Pnin: „Wie viele Jahre* sind es noch bis zu Ihrer Pensionierung?“** Quaoar antwortet: „Ich sag's Ihnen mit einer Geschichte.“

Gestern im Elefantengehege des Zoos bemerkte einer der Wärter: Ich halte die Elefantin Ella dort für arithmetisch interessant. Sie hat in jeweils gleichen Zeitabständen a, a in ganzen Jahren, neun Elefanten geboren und bei der Geburt des ersten war sie genau so alt wie dieser heute.

Mit dieser Information habe ich ein wenig herumgespielt und dabei herausgefunden:

Wenn man das heutige Alter der jüngeren neun Elefanten quadriert, so gibt die Wurzel aus der Summe dieser Quadratzahlen mein jetziges Alter an.

a) Wie alt bin ich?

b) Wie alt sind die Elefantin Ella und die neun von ihr geborenen Elefanten?

Pnin überlegt und rechnet (er hat immer seinen Taschenrechner dabei).

Es seien a das Alter des jüngsten Elefanten und z der konstante Zeitabstand der Geburten der neun Elefanten. Dann sind diese neun Elefanten a, $a+z$, $a+2z$, ..., $a+8z$ Jahre alt. Daraus folgt für die Summe S^2 der quadrierten Altersangaben:

$$(1)\quad S^2 = a^2 + (a+z)^2 + \ldots + (a+8z)^2 = 9a^2 + 72az + 204z^2$$
$$S^2 = 3(3a^2 + 24az + 68z^2).$$

Da S^2 eine ganze Quadratzahl ist, muss die Klammer in (1) ein Vielfaches von drei sein was nur der Fall ist, wenn z ein Vielfaches von drei ist.

Es sei $z \geq 6$.

Aus (1) folgt $S \geq \sqrt{3 \cdot 68 \cdot 6^2} > 85$.

Bereits mit einer dieser Informationen hätte Pnin seine Frage sicher nicht gestellt.

Also gilt:

$$(2)\quad z = 3.$$

Mit (2) lautet (1): $S^2 = 9(a^2 + 24a + 204)$, wobei die Summe in der Klammer eine ganze Quadratzahl Q^2 ist.

Wäre $a \geq 12$, so wäre $S \geq 76$ und Pnin hätte seine Frage mit Sicherheit nicht gestellt.

---

* Im folgenden sind alle Altersangaben als ganzzahlig vorausgesetzt.

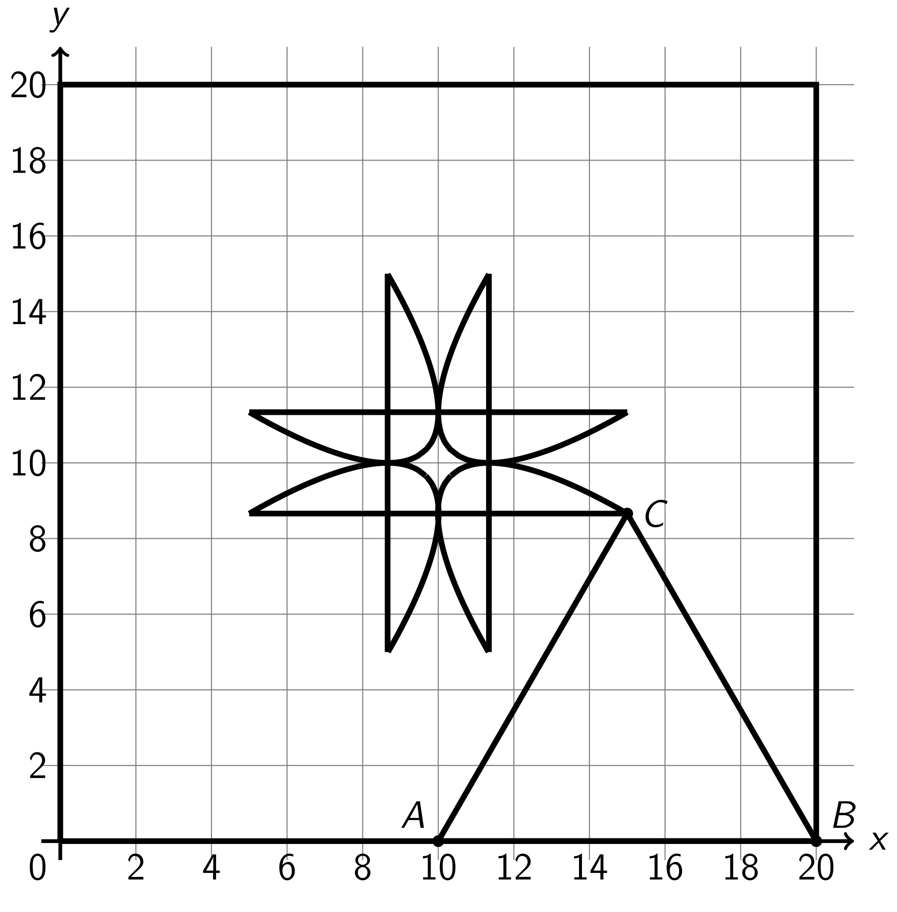
** Man wird üblicher Weise mit 68 Jahren pensioniert.

Also gilt: $0 \leq a \leq 11$.
Jedoch ist für keine der Zahlen $a = 0, 1, 3, 4, \dots, 11$ die jeweils zugehörige Summe Q^2 eine ganze Zahl (Taschenrechner!). Es bleibt somit nur der Fall $a = 2$.

(3) Für $a = 2$ ist $Q = 4 + 24 \cdot 2 + 204 = 16^2$ und daher $S^2 = 48^2$.

Folgerung aus (2) und (3):
Die jüngeren Elefanten sind $2, 5, 8, \dots, 26$ Jahre und Ella ist 52 Jahre alt.
Quaoar ist 48 Jahre alt und wird – unter normalen Umständen – in 20 Jahren pensioniert.

Die besondere Aufgabe
Das Wandernde Dreieck
von Christoph Sievert



Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 10cm und ein Quadrat mit der Seitenlänge 20cm. Das Dreieck wandert einmal vollständig im Quadrat herum, und zwar so, dass die Punkte A und B stets auf den Quadratseiten liegen (siehe Seite 9). Dabei legen die Punkte A und B bei einer vollständigen Umdrehung die Länge des Umfanges des Quadrates zurück, also 80cm. Der Punkt C wandert auf der fett eingezeichneten Ortslinie.

Im Folgenden soll untersucht werden, wie lang der Weg des Punktes C ist. Legt C ebenfalls 80cm zurück oder etwas mehr oder weniger?
Tipp: Schneide Dir ein Dreieck aus Pappe aus und probiere es selbst einmal praktisch aus.

Lösungsweg

1. Position des Dreiecks im Koordinatensystem
2. Bestimmung der Funktion, auf der ein Teil der Ortslinie von C liegt
3. Berechnung der Bogenlänge

1. Position des Dreiecks im Koordinatensystem

Das Dreieck befindet sich in einem Koordinatensystem mit $A(0,0)$, $B(10,0)$ und $C(5,5\sqrt{3})$. Die Koordinatenachsen sind jetzt zwei Seiten des Quadrats. Abbildung 1 und 2 zeigen die Ortskurve von C bei halber „Drehung“.

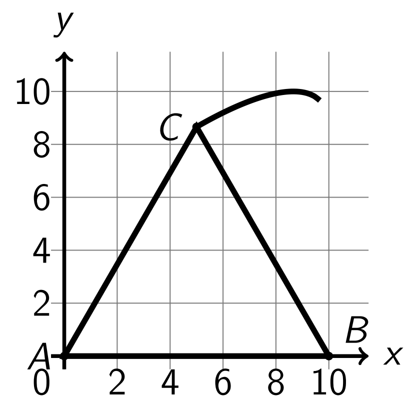


Abbildung 1: Ortskure von C vor halber „Drehung“ $C\left(5, 5\sqrt{3}\right)$

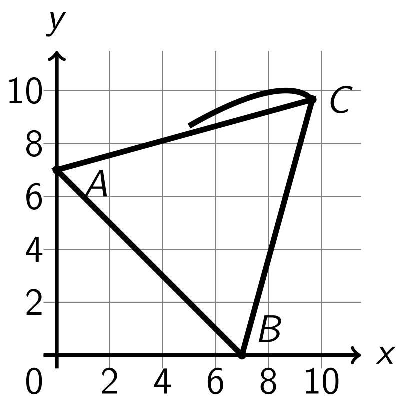
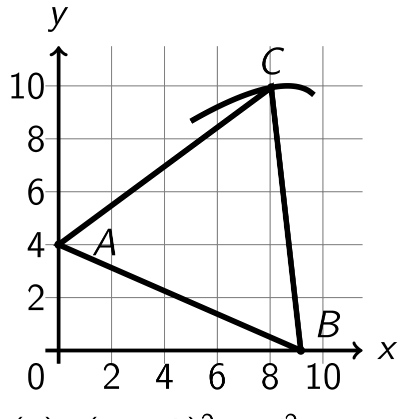


Abbildung 2: Ortskure von C nach halber „Drehung“ $C\left(\frac{5}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right), \frac{5}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right)$

Für diesen Teil der Ortslinie soll eine Funktionsgleichung bestimmt werden.

2) Bestimmung der Funktion, auf der ein Teil der Ortslinie von C liegt



Die drei Punkte haben die folgenden Koordinaten: $A(0,a)$ $B(b,0)$ $C(c,d)$. Mit den angegebenen Bezeichnungen lassen sich z.B. diese Gleichungen aufstellen:

(1) $a^2+b^2=100$ (Pythagoras, Seite AB ist 10cm lang)

(2) $(c-b)^2+d^2=100$ (Pythagoras, Seite BC ist 10cm lang)

(3) $(d-a)^2+c^2=100$ (Pythagoras, Seite AC ist 10cm lang)
Mit

$$0 \leq a \leq \sqrt{50} \qquad \sqrt{50} \leq b \leq 10$$

$$5 \leq c \leq \frac{5}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \qquad \sqrt{75} \leq d \leq 10$$

Gesucht wird nun ein Zusammenhang zwischen d und c. Löst man (2) nach b sowie (3) nach a auf und setzt die Ergebnisse in (1) ein, so ergibt sich:

$$\left(d \pm \sqrt{100+c^2}\right)^2 + \left(c \pm \sqrt{100-d^2}\right)^2 = 100.$$

Multipliziert man beide Klammern aus und fasst so weit wie möglich zusammen, so ergibt sich:

$$\left(\pm c\sqrt{100-d^2}\right) = \left(\pm d\sqrt{100-c^2}\right) - 50.$$

Quadriert man beide Seiten, dividiert durch 100 und fasst so weit wie möglich zusammen, so ergibt sich:

$$d^2 \pm \sqrt{100-c^2}d + 25 - c^2 = 0.$$

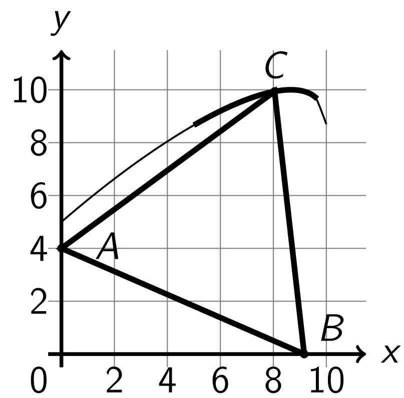
Nach der p-q Formel ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$d_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}c + \frac{1}{2}\sqrt{100-c^2}$$

oder in der üblichen Funktionsschreibweise:

$$f(x) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}.$$

Im Koordinatensystem sieht man, dass dies die Funktion ist, auf der ein Teil der Ortslinie von C liegt. Hier ist der Graph von $f(x)$ dünn mit der Ortslinie von C, halbe „Drehung" fett dargestellt.

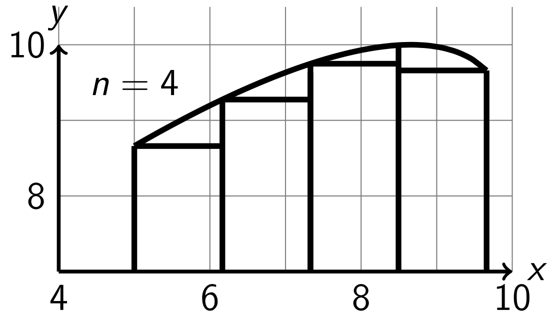


3 Berechnung der Bogenlänge

Hier schauen wir uns zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Bogenlänge an.

1. Weg zur Bestimmung der Bogenlänge

Die Berechnung der Bogenlänge erfolgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Die x-Achse im bereich der Bogenlänge – also von 5 bis $\frac{5}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ – wird in n gleiche Teile geteilt, so erhält man die Länge der 1. Kathete. Durch Differenzenbildung der entsprechenden y-Werte entsteht die Länge der 2. Kathete. Es entstehen n rechtwinklige Dreieck, deren Hypotenusen berechnet werden. Die Summe dieser Hypotenusen ist eine Annäherung an die Bogenlänge. Je größer n, desto besser ist die Annäherung.



So ergeben sich die folgende Längen für den Bogen:

$$S_1 \approx 4{,}7651\text{cm} \qquad S_6 \approx 4{,}9983\text{cm}$$
$$S_7 \approx 5{,}0034\text{cm} \qquad S_{30} \approx 5{,}0181\text{cm}$$
$$S_{100} \approx 5{,}0190\text{cm} \quad S_{300} \approx 5{,}01908\text{cm}$$

2. Weg zur Bestimmung der Bogenlänge

Benutzt man die Formel $b = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}$ für die Berechnung der Bogenlänge und befragt das Programm „Mathematica“, so ergibt sich:

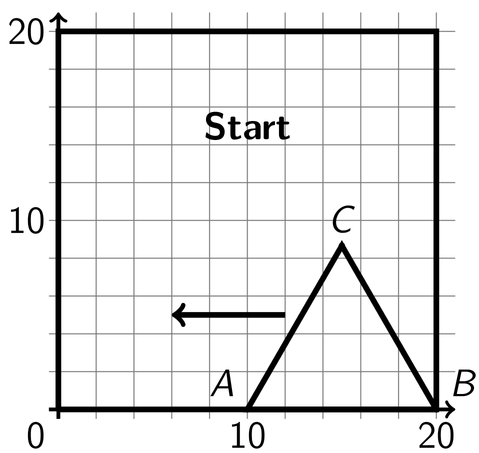
$$\int_5^{9,66} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right)^2} \approx 5{,}01909\text{cm}$$

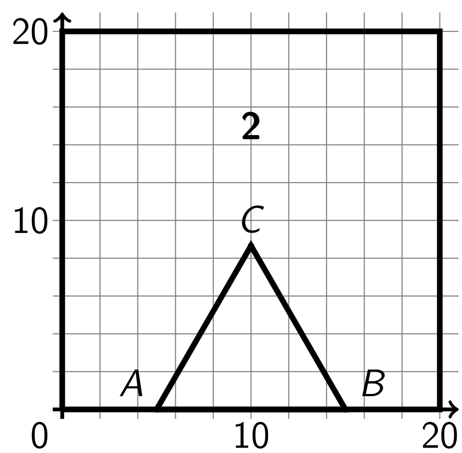
Ergebnis

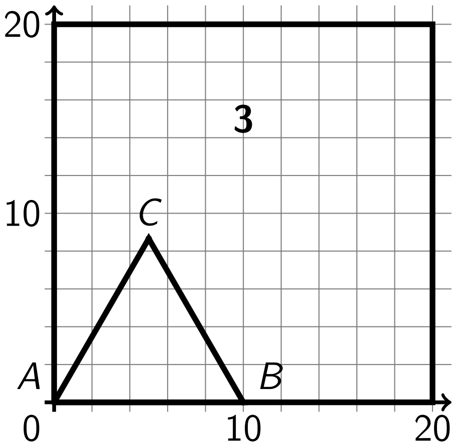
Die Punkte A und B legen jeder 80cm bei einer vollständigen Wanderung im Quadrat zurück. Der Punkt C legt ungefähr $4 \cdot 10 + 8 \cdot 5{,}019 = 80{,}152$cm zurück. Somit legt Punkt C ungefähr 1,5mm mehr zurück als die Punkte A und B.

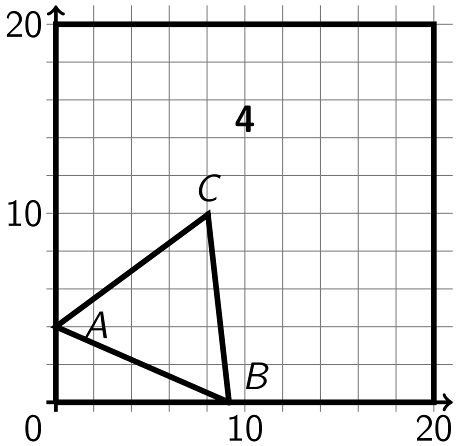
Hinweis: Benutzt man zur Berechnung der Bogenlänge den Weg über die Dreiecksbildung, so werden für den Lösungsweg nur Mathematikkenntnisse der Sekundarstufe I benötigt.

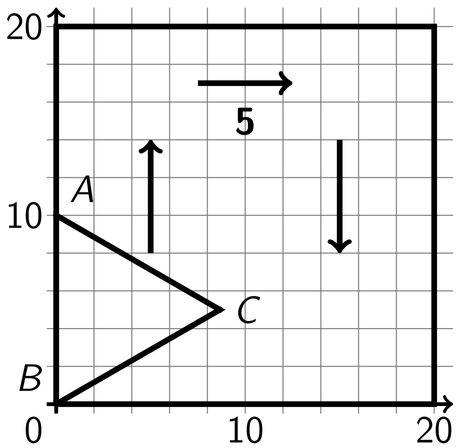
Rundlauf des Dreiecks







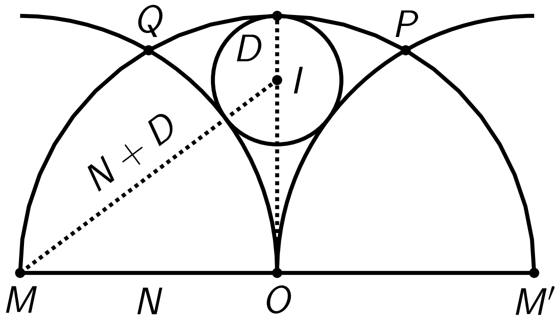




Position auf der neuen Quadratseite

Monoidale Spielerei

von Hartwig Fuchs



In der Figur sei das krummlinig begrenzte Dreieck OPQ der Durchschnitt der 3 Kreise mit den Mittelpunkten: M, O und M', sowie mit den jeweils gleichen Radien N. Der Kreis mit Mittelpunkt I und Radius D, D eine postivie ganze Zahl, berühre die drei anderen Kreise so wie in der Figur.

Wenn nun MO und OI die Längen der Verbindungsstrecken der Punkte M und O sowie der Punkte O und I bezeichnen, dann gilt:

(1) $MO + N + OI + D$ ist ein Vielfaches von 12

Nachweis

Nach dem Satz des Phytagoras gilt:
$(MO)^2 + (OI)^2 = (MI)^2$. Daraus folgt wegen $MO = N, OI = N - D$ und $MI = N + D$:
$N^2 + (N - D)^2 = (N + D)^2$, so dass $N^2 = 4ND$ ist. Also gilt:

(2) $N = 4D$. Damit ergibt sich:

$MO + N + OI + D = N + N + (N - D) + D = 3N = 3 \cdot 4D =$ ein Vielfaches von 12.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Peter, Paul und Marie verbringen die Ferien am Strand. Mittlerweile haben sie genau 2024 Muscheln gesammelt und neben ihnen liegt ein Schlauchboot für zwei Personen. Da schlägt Peter ein Spiel vor:
„Wir nehmen jeder der Reihe nach eine, zwei oder drei Muscheln von dem Haufen weg, wobei Marie beginnen darf, dann komme ich dran und dann Paul. In dieser Reihenfolge geht es immer weiter. Wer die letzte Muschel nehmen muss, bleibt an Land, und die beiden anderen drehen mit dem Schlauchboot eine Runde im Meer.“
Alle sind einverstanden, aber Paul traut Peter nicht über den Weg und beschließt, jedes Mal eine andere Anzahl Muscheln zu nehmen als Peter gerade vor ihm. Wer kann unter diesen Bedingungen durch geschicktes Ziehen für sich einen Platz auf dem Schlauchboot sicher erreichen, und mit welcher Strategie klappt das? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2024 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 156

In Heft 156 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Peter ist verblüfft. „Der Nikolaus hat mir keine Süßigkeiten in den Sack gesteckt, sondern einen Zettel mit einer Rechenaufgabe. Auf der Rückseite steht, dass ich eine Belohnung erhalte, wenn ich die Aufgabe gelöst habe“, sagt er zu Paul. „Ich löse Deine Aufgabe und wir teilen die Belohnung“, entgegnet Paul. „Zeig mal her!“
„Ich soll in dieser Bruchgleichung in jedem Kästchen eine andere Ziffer von 1 bis 9 einsetzen. Der Nikolaus hat freundlicherweise die 1 schon vorgegeben“, berichtet Peter und zeigt Paul den Zettel:

$$\boxed{\frac{1}{\square\cdot\square}+\frac{\square}{\square\cdot\square}+\frac{\square}{\square\cdot\square}=1}$$

Gibt es eine gültige Möglichkeit, die Ziffern einzusetzen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Es gibt bis auf Vertauschungen der Faktoren in den Nennern sowie Vertauschung des 2. und 3. Summanden genau eine Möglichkeit:

$$\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{5}{8\cdot 9}+\frac{7}{2\cdot 4}=1$$

Begründung

Erweitern auf den Hauptnenner 72 zeigt, dass die angegebene Summe tatsächlich den Wert 1 hat. Um nicht alle denkbaren Fälle durchprobieren zu müssen, betrachten wir die unter den Zahlen von 2 bis 9 vorkommenden Primfaktoren. Die 5 und die 7 treten jeweils nur einmal auf. Wenn eine dieser Zahlen im Nenner steht, kann die Summe nicht ganzzahlig sein, weil die beiden anderen Bruchzahlen diesen Nenner nicht ausgleichen können. Also müssen 5 und 7 in den beiden von 1 verschiedenen Zählern stehen.

Der Primfaktor 3 kommt in der 9 doppelt und in der 6 sowie in der 3 jeweils einfach vor. Wären diese drei Zahlen auf alle drei Nenner verteilt, so könnte das doppelte Vorkommen in dem Nenner mit der 9 nicht durch die beiden anderen Brüche ausgeglichen werden, um eine ganzzahlige Summe zu erreichen. Also kommt in einem Nenner die 9 vor und ein anderer Nenner lautet $3\cdot 6$.

Eine ähnliche Überlegung für den Primfaktor 2 schließt das Auftreten von mehr als drei Faktoren 2 in einem der Nenner aus, so dass nur die Kombinationen $9\cdot 8$ und $2\cdot 4$ für die beiden anderen Nenner übrigbleiben. Damit sind nur noch die sechs möglichen Verteilungen der Zähler auf die Nenner zu untersuchen, von denen nur die oben angegebene alle Bedingungen erfüllt.

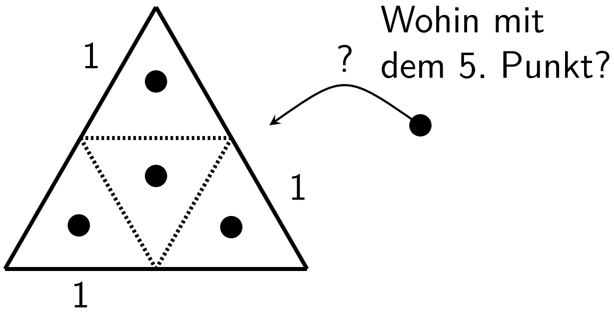
Eine richtige Lösung wurde von Lea Amend eingesandt.

Übers Jahr hat der Nikolaus erfahren, dass sein Zettel von zwei Kindern bearbeitet wurde. Daher hat er beim nächsten Mal Paul dieselbe Rechenaufgabe in den Sack gesteckt mit dem einzigen Unterschied, dass rechts vom Gleichheitszeichen eine 2 steht. Gibt es auch hier eine Lösung? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Beweis ohne Worte
Fünf Punkte im Dreieck
von Hartwig Fuchs

Im Innengebiet eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge zwei liegen fünf Punkte.
Zeige: Zwei dieser Punkte haben einen Abstand, der kleiner als eins ist.

Beweis ohne Worte



Ein Blick hinter die Kulissen
Die Sekundenrechnung
von Hardwig Fuchs

Mathis hat einen neuen Rechentrick entwickelt, den er mit seinem Freund Matheo durchspielen möchte.
Deshalb gibt er Matheo einen Taschenrechner und eine Stoppuhr und stellt ihm dann die Aufgabe:

- Wähle eine natürliche Zahl m sie sollte mindestens 4-stellig sein, um den Trick verblüffend zu machen. Setze die Stoppuhr in Gang;
- addiere m und die 9 auf m folgenden natürlichen Zahlen;
- von der so berechneten Summe subtrahiere 5; lies von der Stoppuhr die für die Rechnung benötigte Zeit ab;
- nenne mir die gedachte Zahl m.

Mathis behauptet – und er behält damit in mehreren Spieldurchgängen Recht – er könnte Matheos Rechenergebnis in weniger als $\frac{1}{10}$ von Matheos Rechenzeit, auf jeden Fall aber in weniger als einer Sekunde bestimmen, sobald er die Zahl m kennt.
Welche Erklärung gibt es für Mathis Trick?

Des Rätsels Lösung

Es ist $m+m+1+...+(m+9)-5 = 10m+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10-5 = 10m+40 = 10(m+4)$. Sobald also Mathis die Zahl m von Matheo erfährt, bestimmt er $m+4$ und hängt an die Zifferdarstellung von $m+4$ eine Null an – diese Operationen kann er tatsächlich leicht in weniger als 1 Sekunde ausführen.

Matheo rechnet $\xrightarrow{4639+4640+...+4648-5=46430}$
0sec mind. 15sec

Mathis rechnet $\xrightarrow{4639 \xrightarrow{+4} 4643 \xrightarrow{\cdot 10} 46430}$
0sec höchstens 1sec

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 157

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Produktdarstellung einer Zahlendifferenz

Es sei $n = 112296^2 - 79896^2$. Zeige, ohne n zu berechnen, dass gilt:
Man kann n als Produkt der Zahlen 1, 2, 3, ..., 10, 11, 12, 13 schreiben.

Hinweis: Die 3. binomische Formel $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist hilfreich. (H.F.)

Lösung:

Mit der angegebenen Formel ist

$$\begin{aligned} n &= (112296-79896)(112296+79896) \\ &= 32400 \cdot 192192 \\ &= (18^2 \cdot 100)\cdot(2^4 \cdot 12 \cdot 1001) \\ &= (2\cdot 3\cdot 6\cdot 9\cdot 5\cdot 10\cdot 2)(4\cdot 4\cdot 12\cdot 7\cdot 11\cdot 13) \\ &= 2\cdot 3\cdot 6\cdot 9\cdot 5\cdot 10\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 12\cdot 7\cdot 11\cdot 13 \\ &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13 \end{aligned}$$

II. Vergleich mit 1

Wenn für zwei positive Zahlen $a < 1$ und $b > 1$ gilt, dann folgt:
Die Differenz ihrer Summe S und ihres Produktes P ist größer als eins.
Stimmt dies? (H.F.)

Lösung:

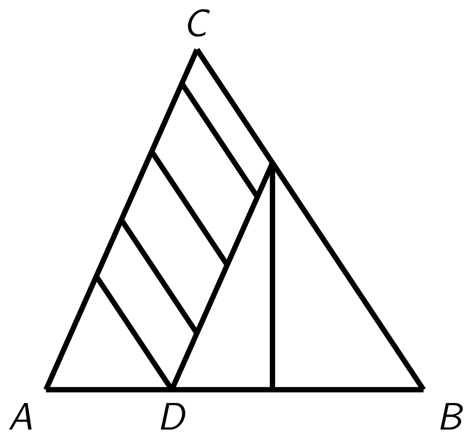
Es sei $a = 1-r$ und $b = 1+s$. Dann ist $S = 2-r+s$ und $P = (1-r)(1+s)$ sowie $S-P = (2-r+s)-(1-r+s-rs) = 1+rs > 1$. Da $0 < a < 1$ und $b > 1$ gilt $0 < r < 1$ und $s > 0$. Somit stimmt die Aussage.

III. Zerlegung eines Dreiecks

Zerlege ein spitzwinkliges Dreieck nur mit Geodreieck und Bleistift in vier Parallelogramme und drei Dreiecke.

(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:



Hier eine mögliche Lösung und das Vorgehen, um diese zu erhalten. Markiere einen Punkt D auf der Seite $\overline{AB}$. Zeichne durch diesen Punkt Parallelen zu den anderen beiden Seiten. Das so entstehende Parallelogramm zerlegt sich durch drei weitere Parallelen zu $\overline{BC}$ in vier Teile. Außerdem zerlegt eine weitere Gerade eines der beiden so entstandenen Dreieck in zwei Dreiecke.

IV. Fünf Freundinnen

Beate ist an eine Mädchenschule gewechselt. In ihrer Klasse sind insgesamt 23 Schülerinnen mit Beate. Nach 14 Tagen erzählt Beate zu Hause: „Heute haben wir festgestellt, dass in unserer Klasse jede genau fünf Freundinnen hat und jede die Freundin von genau fünf Mitschülerinnen ist.“ Darauf behauptet ihre Mutter „Das kann doch gar nicht sein.“ Hat sie recht?

(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

Zu jeder Freundschaft gehören zwei Mädchen. Wenn Beates Erzählung stimmt, ergeben sich also die Hälfte von $5 \cdot 23 = 115$ Freundschaften. Das sind $\frac{115}{2} = 57{,}5$ Freundschaften. Dies ist nicht möglich.

V. Buchstaben Rätsel

$$(AB)^2 = CAB$$

Ersetze jeden Buchstaben so durch eine Ziffer, dass eine richtige Gleichung mit Zahlen größer null entsteht. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Die führenden Ziffern A und C sind beide ungleich Null. (H.F.)

Lösung:

Zweistellige Zahlen, deren Quadrate dreistellig sind, sind größer gleich 10 und kleiner gleich 31. Wenn man die Einerziffer B betrachtet, sieht man, dass das Quadrat die gleiche Einerziffer hat wie die zweistellige Zahl. Für B gilt das nur für $0, 5$ und 6, da B^2 dann 00, 25 und 36 ist. $B = 0$ scheidet allerdings aus, da bei Vielfachen von 10 die letzten beiden Ziffern des Quadrates dann 0 sind. Dies geht hier nicht, da $A \neq 0$ in CAB ist. Somit müssen nur die Zahlen $15, 16, 25$ und 26 betrachtet werden. Die Lösung ist demnach $25^2 = 625$.

VI. 5-stellige Zahlen gesucht

Bestimme

a) die kleinste ...

b) die größte ...

fünfstellige Zahl, die durch $2, 3, 4, 5, 6$ und 7 teilbar ist.

(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

Ist eine Zahl durch drei und vier teilbar, so auch durch zwei und sechs. Wir suchen also nach Zahlen, die durch drei, vier, fünf und sieben, also durch $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ teilbar sind. Nun liegt

a) $\frac{10000}{420}$ zwischen 23 und 24, die kleinste durch 420 teilbare Zahl oberhalb von 10000 ist also $24 \cdot 420 = 10080$.

b) $\frac{99999}{420}$ liegt zwischen 238 und 239. Die größte durch 420 teilbare Zahl unterhalb von 99999 ist also $238 \cdot 420 = 99960$.

VII. Die letzten drei Ziffern

Die Fakultät $n!$ ist das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. Bestimme die letzten drei Ziffern der Summe $1! + 2! + 3! + ... + 50!$

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Keine Angst, man muss keine 50 Multiplikationen mit immer größeren Zahlen ausführen. Da nur die letzten drei Ziffern gefragt sind, kann man immer mit den letzten drei Ziffern weiterrechnen:

$$1! = 1$$

$$1 \xrightarrow{\cdot 2} 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{\cdot 4} 24 \xrightarrow{\cdot 5} 120 \xrightarrow{\cdot 6} 720 \xrightarrow{\cdot 7} 040 \xrightarrow{\cdot 8} 320 \xrightarrow{\cdot 9} 880 \xrightarrow{\cdot 10} 800$$
$$\xrightarrow{\cdot 11} 800 \xrightarrow{\cdot 12} 600 \xrightarrow{\cdot 13} 800 \xrightarrow{\cdot 14} 200 \xrightarrow{\cdot 15} 000.$$

Da alle Vielfache von 15! mit 000 enden, enden auch die Fakultäten ab 16! mit 000, d.h. die letzten drei Ziffern von $1! + 2! + 3! + ... + 50!$ sind die Summe der letzten drei Ziffern von 1! bis 14!. Rechnung:

$$1+2+6+24+120+720+040+320+880+800+800+600+800+200 = 5313$$

Diese Summe endet mit den letzten drei Ziffern 313 und das sind auch die letzten drei Ziffern von $1! + 2! + 3! + ... + 50!$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. August 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Aus Ungleichungen folgen Ungleichungen

Ersetze jeweils mit Begründungen in 1. bis 5. die Kästchen $\square$ durch eines der Symbole $>$, $<$, oder $=$, sodass man jeweils eine wahre Aussage erhält.

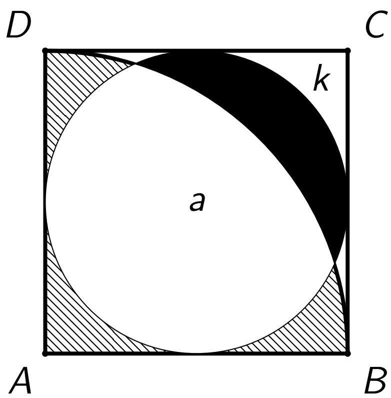
1. Aus $x > y$, $y > 0$ folgt $2x + z \square \frac{1}{2}y + z$;
2. aus $x > y$, $z < 0$ folgt $xz \square yz + 1$;
3. aus $x < y < 0$ folgt $x^2 \square y^2$;
4. aus $0 < x < y < 1$ folgt $xy \square \frac{1}{xy}$;
5. aus $x < 1$ folgt $x^3 \square x^2$.

Hinweis: Für Zahlen a, b, c gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ sowie $ac < bc$, falls $c > 0$ und $ac > bc$, falls $c < 0$. (H.F.)

II. Winkel gesucht

In einem gleichseitigen Dreieck ABC sei ein Punkt D auf der Seite AB und ein Punkt E auf der Seite AC so gewählt, dass $|AE| = |BD|$ ist. Bestimme die Winkel, die die Strecken BE und CD in ihrem Schnittpunkt S bilden. (H.F.)

III. Flächenvergleich - ein anschauliches Paradox



Es sei k der Kreis, der die vier Seiten des Quadrates $ABCD$ von innen berührt. v sei der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $r = |AB|$.
Es sei m die Fläche des schwarzen „Mondes“ und s sei die Gesammtfläche der drei schraffierten „Sicheln“.
Gilt nun $m > s$ oder $m = s$ oder $m < s$? Begründe deine Entscheidung. (H.F.)

IV. Ziffernvertauschung

Wenn man bei 2-ziffrigen natürlichen Zahlen die Ziffern vertauscht, dann sind einige der neuen Zahlen größer als die alten Zahlen – z.B. erhält man aus 45 die

Zahl 54. Wie oft kommt das vor bei Vertauschung der Ziffern der 10, 11, 12, ..., 99 ? (H.F.)

V. Summendarstellung von Primzahlen

Bilde aus den Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots, 12, 13$

a) 7 zweigliedrige Summen, die sechs verschiedene Primzahlen darstellen;

b) 2 Summen, welche die kleinstmögliche und die größtmögliche Primzahl ergeben.

(H.F.)

VI. Divisionsrest 1

Welches ist die kleinste positive ganze Zahl n, die bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 jeweils den Rest 1 übrig lässt? (H.F.)

VII. Ein Produkt und einige seiner Teiler

Für jede natürliche Zahl n, $n \geq 1$, gilt: Das Produkt

$$P_n = (n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (2n)$$

mit $P_1 = 2$, $P_2 = 3 \cdot 4$ und so weiter hat die Teiler 2^m mit $m = 1, 2, 3, \dots, n$ und $\frac{P_n}{2^n}$ ist dabei immer eine ungerade Zahl.
Zeige dies. (H.F.)

Die MONOID Redaktion wünscht allen L(o)eserinnen und L(o)esern einen schönen Sommer.

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. August 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1345: Ein altes Problem

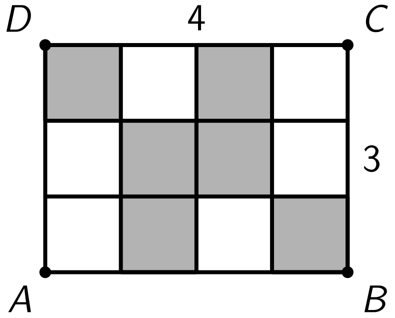
Gegeben ist eine Strecke r.

a) Teile diese Strecke in zwei Teile, so dass das Produkt der Teilstücke maximal wird.

b) Teile diese Strecke in drei Teile, so dass das Produkt der Teilstücke maximal wird.

(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 1346: Färbung eines Rechtecks

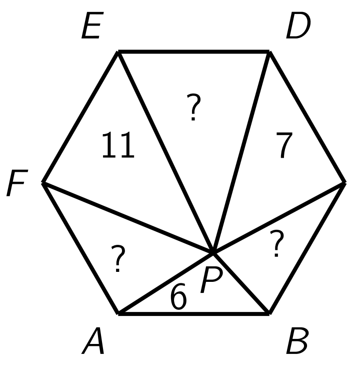


Ein Rechteck R mit den Seitenlängen 4 und 3 ist in Einheitsquadrate unterteilt. Diese sollen rot oder blau gefärbt werden, wobei jede Farbe mindestens einmal vorkommen soll.

Wie viele punktsymmetrische verschiedene Färbungsmuster sind möglich?

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1347: Flächeninhalte im Dreieck



In einem regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ ist P ein innerer Punkt des Sechsecks. Verbindet man P mit den Ecken, so entstehen sechs Dreiecke, von denen drei Flächeninhalte angegeben sind.

Wie groß sind die anderen drei Flächeninhalte?

Hinweis: Eine Strategie wäre das Sechseck in ein gleichseitiges Dreieck einzubetten.

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1348: Mathematischer Ausflug in die USA

Auf wie viele Arten kann man unter Verwendung aller Buchstaben von

a) FLORIDA ...

b) TENNESSEE ...

... „Wörter“ (auch unsinnige wie EEEENNSST) bilden? (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1349: Augensumme zweier Spielwürfel

Zwei Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen. Beide Spielwürfel besitzen sechs Seiten mit den natürlichen Zahlen eins bis sechs aufgedruckt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme der beiden geworfenen Würfel größer als sieben ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht man mindestens, mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens drei Würfe der beiden Würfel, bis die geworfene Augensumme erstmals größer als sieben zeigt.

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1350: Quadratzahl

Zeige: Für jede positive ganze Zahl n ist

$$n \cdot (n+2) \cdot (n+4) \cdot (n+6) + 16$$

eine Quadratzahl. (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1351: Teilbarkeit durch 7

Man schreibe unter die Ziffern einer Zahl von rechts her, das heißt beginnend mit der Einerziffer,
$1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, \ldots$, multipliziere dann übereinanderstehende Ziffern und addiere die Reste bei Division durch sieben. Zeige

a) Ist das Ergebnis durch sieben teilbar, so auch die ursprüngliche Zahl.

b) Es gilt sogar: Der Rest bei Division durch sieben ist der gleiche bei diesem Ergebnis und bei der ursprünglichen Zahl. (Wolfgang J. Bühler)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 157

Klassen 9–13

Aufgabe 1331: ? gesucht

Finde eine Lösung für die folgenden Gleichungen. Wenn Du eine zweite findest, bekommst Du einen Extrapunkt.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 16 \\ a \cdot b &= 24 \\ a + b &= ? \end{aligned}$$

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Nach der 1. binomischen Formel gilt:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = 16 + 48 = 64$
Also ist $a + b = 8$. Das Ergebnis $a + b = -8$ scheidet aus, da $a \cdot b = 24$ zum Widerspruch $(a+4)^2 = -8$ führt.

Aufgabe 1332: Aufgaben zur Uhrzeit

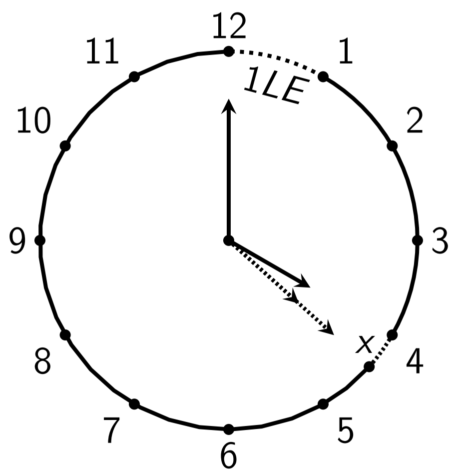
Auf einer Uhr ...

a) ... stehen die beiden Zeiger zwischen 4 und 5 Uhr exakt übereinander.
Wie viel Uhr ist es (in Minuten und Sekunden)?

b) ... bilden die beiden Zeiger zwischen 4 und 5 Uhr einen Winkel von 180°.
Wie viel Uhr ist es (in Minuten und Sekunden)?

(Christoph Sievert)

Lösung:



Lösung zu *a*), Startposition 4 Uhr.
In der Zeit, in der der große Zeiger $(4+x)$ LE zurücklegt, legt der kleine Zeiger x LE zurück.
Da der große Zeiger 12-mal schneller ist, muss gelten:

$$12x = 4 + x$$
$$x = \frac{4}{11}$$

$\frac{4}{11}$ ist der Anteil von einer Stunde, in Minuten:
$\frac{4}{11} \cdot 60 = 21,\overline{81}$min der gesuchte Zeitpunkt: 4h 21min $49,\overline{09}$ s

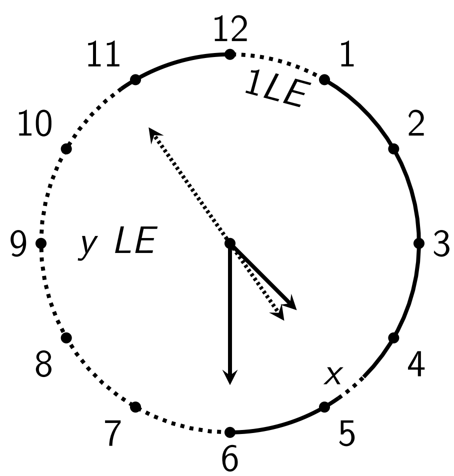
Lösung zu *b*), Startposition 4 : 30 Uhr.
In der Zeit, in der der kleine Zeiger x LE zurücklegt, legt der große Zeiger y LE zurück:

$$2x = y. \qquad \text{(I)}$$

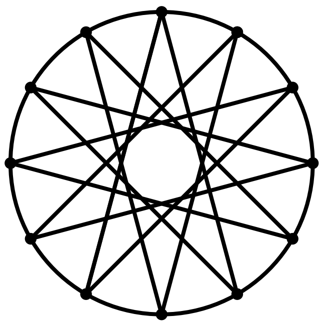
Damit die beiden Zeiger einen Winkel von 180° bilden, muss gelten

$$\frac{1}{2} - x + 1 + y = 6. \qquad \text{(II)}$$

Aus (I) und (II) ergibt sich: $x = \frac{9}{22}$.
Der gesuchte Zeitpunkt: 4h 54min $32,\overline{72}$ s

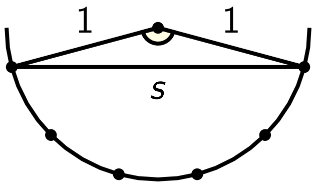


Aufgabe 1333: Sternfigur



Auf einem Kreis mit Radius eins sind - wie bei einer Uhr - zwölf Punkte im gleichen Abstand markiert. Nun wird eine „Sternfigur" gezeichnet: Man wählt einen beliebigen Punkt, geht im Uhrzeigersinn fünf Punkte weiter und verbindet diese beiden. Von dem abgezählten Punkt geht man wieder fünf Punkte weiter und verbindet dann diese beiden Punkte. Dieses Verfahren wiederholt man insgesamt zwölfmal, bis man wieder am Anfangspunkt angelangt ist. Welche Länge besitzen alle gezeichneten Strecken zusammen? (Klaus Ronellenfitsch)

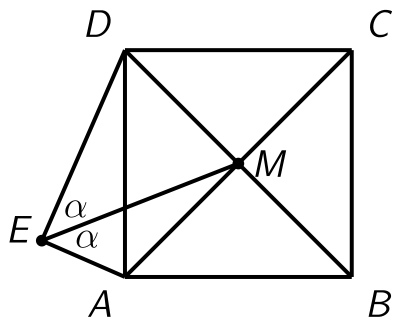
Lösung:



Ist s die Länge einer Strecke der Sternfigur, so hat der Gegenwinkel von s im Dreieck mit den Seiten 1, s und 1 die Größe $5 \cdot 30° = 150°$. Nach dem Kosinussatz kann man s berechnen: $s^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(150°)$.
Da $\cos(150°) = -\cos(30°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, gilt also $s^2 = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{3}$ bzw. $s = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.
Daher hat die gesamte Sternfigur die Länge $12s = 12 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 23{,}18$.

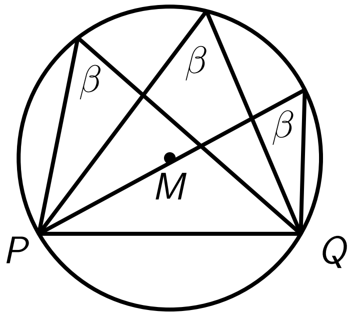
Aufgabe 1334: Quadrat und rechtwinkliges Dreieck

Im Quadrat $ABCD$ sei M der Diagonalschnittpunkt und das Dreieck $\triangle ADE$ sei rechtwinklig beim Punkt E. Zeige: Die Winkel $\sphericalangle AEM$ und $\sphericalangle MED$ sind beide $45°$ groß. (H.F.)



Lösung:

Der Punkt E liegt auf dem gleichen Halbkreis mit Durchmesser AD, ebenso liegt der Punkt M auf dem Halbkreis des Thales mit Durchmesser AD, weil die Diagonalen eines Quadrates sich in M unter einem $90°$-Winkel schneiden.



Die Randwinkel β eines Kreises über derselben Sehne PQ sind nach dem Peripheriewinkelsatz gleich groß.
Denkt man sich nun die nebenstehende Figur um einen beliebigen Winkel um den Mittelpunkt des Kreises gedreht, dann sind die Originalfigur und die gedrehte Figur deckungsgleich.

Deshalb gilt der Satz:
Die Randwinkel eines Kreises über zwei verschiedenen, gleichlangen Sehnen sind gleich groß.
Wendet man diesen Satz auf den Kreis durch die Punkte A, M, D, E und die Sehnen AM und DM dieses Kreises an, dann ist $|\sphericalangle AEM| = |\sphericalangle MED|$ und da die beiden Winkel zusammen 90° groß sind, gilt die Behauptung.

Aufgabe 1335: Zahlenquadrat der anderen Art

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Wähle zwei benachbarte Felder der gleichen Zeile oder Spalte und ersetze eine der beiden Zahlen durch die Summe, die andere durch das Produkt der beiden Zahlen.
Ist es möglich, dass zum Schluss jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale eine gerade Zahlensumme besitzt?

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:
Bei dem Ausgangsquadrat stehen nur in den Ecken gerade Zahlen und sonst ungerade Zahlen. Das gewünschte Resultat wird erreicht, wenn zum Schluss entweder

(1) alle Zahlen gerade sind oder
(2) nur in den vier Ecken ungerade Zahlen und sonst gerade Zahlen stehen (d.h. genau umgekehrt wie beim Ausgangsquadrat).

Resultat (1) lässt sich *nicht* erreichen, denn bei dem zulässigen Rechenvorgang nimmt die Anzahl der ungeraden Zahlen entweder gar nicht (bei zwei geraden oder einer geraden und einer ungeraden ausgewählten Zahl) oder um eins (bei zwei ungeraden ausgewählten Zahlen) ab. Da es am Anfang fünf ungerade Zahlen sind, bleibt zum Schluss immer mindestens eine ungerade Zahl übrig.

13	42	11
40	6	18
13	12	7

Resultat (2) lässt sich jedoch z.B. wie folgt erreichen:
Wähle die Zahlen 1 und 5 und ersetze sie durch $5 = 1 \cdot 5$ und $6 = 1 + 5$.
Dadurch steht in der Mitte die gerade Zahl 6, die nun nicht mehr verändert wird.
Die restlichen vier geraden und vier ungeraden Zahlen müssen jetzt genau ihre Eigenschaft gerade/ungerade (ihre Parität) vertauschen. Ersetze 6 und 7 durch

13 und 42, 2 und 9 durch 11 und 18, 4 und 3 durch 7 und 12 sowie 8 und 5 (aus der 1. Ersetzung) durch 13 und 40. Dann hat das Resultat die gewünschte Form.

Aufgabe 1336: Neunstellige Zahlen

Eine neunstellige Zahl bestehe aus den Ziffern $1, 2, \dots, 9$ in zufälliger Reihenfolge, wobei jede Ziffer nur einmal verwendet wird. Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

a) Die Zahl ist kleiner als $630\,000\,000$.

b) Die mittleren drei Ziffern sind abwechselnd gerade und ungerade (g, u, g oder u, g, u).

c) Das Produkt der mittleren drei Ziffern ist gerade.

d) Die Summe der drei mittleren Ziffern ist gerade. (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

a) Das Ergebnis tritt ein, wenn entweder die erste Ziffer kleiner als sechs oder die erste Ziffer gleich sechs und die zweite kleiner als drei ist. Die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{5}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12} \approx 58{,}33\%$.
Für die Aufgabenteile b), c) und d) stellen wir uns vor, die 4., 5. und 6. Ziffern werden zuerst bestimmt, dann sehen wir

b) Die Wahrscheinlichkeit ist
$\mathbb{P}(g, u, g) + \mathbb{P}(u, g, u) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{18} \approx 27{,}78\%$

c) $\mathbb{P}(\text{Produkt gerade}) = 1 - \mathbb{P}(u, u, u) = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42} \approx 88{,}10\%$

d) $\mathbb{P}(\text{Summe gerade}) = \mathbb{P}(g, g, g) + \mathbb{P}(g, u, u) + \mathbb{P}(u, g, u) + \mathbb{P}(u, u, g)$
$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{11}{21} \approx 52{,}38\%$

Aufgabe 1337: Sechsstellige Zahlen mit der Ziffer 9

Bei wie vielen sechsstelligen natürlichen Zahlen kommt:

a) mindestens einmal ...

b) genau einmal ...

... die Ziffer neun vor? (Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Die sechsstelligen natürlichen Zahlen gehen von 100000 bis 999999. Das sind $999999 - 99999 = 900000$ Zahlen. Dabei gibt es für die erste Ziffer (ohne 0) neun Möglichkeiten, für die anderen Ziffern (mit 0) jeweils zehn Möglichkeiten.

a) Die Anzahl der Zahlen, bei denen *keine* neun vorkommt ist $8 \cdot 9^5$. Also ist die gesuchte Anzahl $900000 - 8 \cdot 9^5 = 427608$.

b) Steht die neun an erster Stelle, so gibt es für die anderen fünf Ziffern jeweils neun Möglichkeiten. Also gibt es insgesamt $9^5 + 5 \cdot 8 \cdot 9^4 = 9^4 \cdot (9 + 5 \cdot 8) = 321489$ Zahlen dieser Art.

Mathematische Entdeckungen

Welche n-ten Potenzen natürlicher Zahlen sind n-ziffrig?
Gesucht sind also natürliche Zahlen a und n, so dass in Zifferdarstellung

$$a^n = z_1 z_2 \dots z_n.$$

1. Finde je ein Beispiel für eine n-ziffrige n-te Potenz für $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = 9$.
2. Wie groß kann a höchstens sein, damit n-ziffrige n-te Potenzen existieren können?
3. Wie groß kann n höchstens sein, damit n-ziffrige n-te Potenzen existieren können?
4. Wie viele n-ziffrige n-te Potenzen gibt es? (H.F)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. August 2024 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Zur Aufgabe aus Heft 156

In Heft 156 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Im Monoid Heft 149 haben wir das Läuferecken-Problem kennengelernt. Dabei läuft ein Läufer auf einem $n \times m$ Schachbrett startend in der linken unteren Ecke, bis er wieder in einer Ecke ankommt. Dabei durchläuft er die einzelnen Felder, alles Quadrate, entlang ihrer Diagonalen. Im Heft 151 haben wir die Anzahl Schritte untersucht, die der Läufer dabei läuft.

Im Monoid Heft 153 haben wir das Problem eine Dimension höher betrachtet: Wir können einen Quader mit Kantenlängen n, m, k in $n \cdot m \cdot k$ kleine Würfel mit Kantenlänge 1 unterteilen. Jeder kleine Würfel ist damit durch 3 ganzzahlige Koordinaten beschrieben. Wir starten links unten in der Ecke 0 mit den Koordinaten $(1, 1, 1)$ und lassen einen Läufer in den Würfel $(2, 2, 2)$ laufen. Dann nach $(3, 3, 3)$ usw. immer entlang der Würfeldiagonalen, bis wir an eine Wand laufen, ab da wird von einer Koordinate immer 1 subtrahiert statt addiert. Das führen wir analog zum 2-dimensionalen Fall fort, bis wir in einer Ecke landen.

Man kann aber auch in beliebige Dimensionen gehen. Wir betrachten den n-dimensionalen Quader Q mit Kantenlängen $m_1, \dots, m_n$. Er hat 2^n Ecken mit den Bezeichnungen $0, \dots, 2^n - 1$. Außerdem hat er 2^{n-1} Diagonalen in jedem seiner $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ n-dimensionalen Würfel. Startet also ein Läufer in der Ecke 0 und läuft entlang der Diagonalen der kleinen Würfel, bis er in einer Ecke landet, so kann er jeden Würfel maximal 2^{n-1} mal durchlaufen, weil jeder Würfel 2^{n-1} Diagonalen hat. Simuliert man mit einem entsprechenden Programm den Lauf des Läufers, so stellt man fest, dass ein Würfel s mal durchlaufen wird, wobei $s \in \{0, 1, 2, 4, 8, ...\}$. Niemals wird ein Würfel 3, 5, 6 oder 7 mal durchlaufen. Man beweise also:

Vermutung: Läuft ein Läufer in einem n-dimensionalen Quader von einer Ecke aus entlang den Diagonalen eines Würfels bis er wieder in einer Ecke landet, so hat er jeden Würfel entweder 0 mal oder 2^k mal durchlaufen für ein $k \in \mathbb{N}$.

(Stephan Rosebrock)

Stand der Vermutung

Kein Monoid-L(o)eser konnte die Vermutung beweisen oder widerlegen, sie bleibt also ein offenes Problem. Gern könnt Ihr auch noch zu einem späteren Zeitpunkt Eure (Teil-)Lösung einreichen.

In den Monoid Heften 149, 151 und 153 haben wir uns mit dem Läuferecken-Problem in den Dimensionen 2 und 3 beschäftigt. Hierzu hat unser L(o)eser Johannes Seiz die zentralen Erkenntnisse noch einmal zusammengefasst.

Das Läuferecken-Problem beschäftigt sich mit der Bewegung eines Läufers auf einem Schachbrett und in höheren Dimensionen. Es beginnt in der ersten Ausgabe, Monoid Heft 149, mit der Frage, wohin ein Läufer gelangt, wenn er in der linken unteren Ecke eines Schachbretts startet und sich wie eine Billardkugel diagonal bewegt, an den Wänden abprallt, bis er in einer der Ecken landet.
Das Schachbrett hat Kantenlängen n und m (beide größer als 1). Der Läufer startet auf einem schwarzen Feld und bleibt auf schwarzen Feldern. Ziel ist es, die Endposition des Läufers, bezeichnet als $\lambda_2(n, m)$, zu bestimmen.
Bei $\lambda_2(n, n)$ landet der Läufer stets in der gegenüberliegenden Ecke. Der Lauf endet nie in der Ecke 0, da der Läufer bei jedem Abprallen an einer Wand die Diagonale wechselt und somit nie auf die Startposition zurückkehrt. Die Symmetrie zwischen $\lambda_2(n, m)$ und $\lambda_2(m, n)$ zeigt, wie der Endpunkt sich ändert, wenn die Kantenlängen vertauscht werden. (Der Weg des Läufers wird mitgespiegelt).
Wenn n und m beide gerade sind, landet der Läufer stets oben rechts. In Fällen, wo einer der beiden Werte ungerade ist, helfen einfache Symmetriebetrachtungen, $\lambda_2(n, m)$ zu bestimmen.

In der übernächsten Ausgabe, Monoid Heft 151, wird das Problem in die dritte Dimension erweitert. Ein Läufer bewegt sich nun in einem Quader mit Kantenlängen n, m und k. Er startet in der Ecke (1,1,1) und bewegt sich entlang der Diagonalen der kleinen Würfel, die den Quader bilden, und prallt an den Wänden ab. Die kleinen Würfel besitzen die Kantenlänge 1. Der Läufer durchquert dabei verschiedene Arten von Würfeln: innere Würfel, Würfel an einer Wand und Würfel an einer Kante. Auch hier wird eine Funktion $\lambda_3(n, m, k)$ definiert, die die Eckennummer angibt, in der der Läufer landet. Es wird gezeigt, dass der Läufer nur Würfel betritt, für die alle 3 Koordinaten dieselbe Parität haben, und, dass der Läufer nie in der Ecke 0 landet, also $\lambda_3(n, m, k) \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen n, m, k.

Die dritte Ausgabe, Monoid Heft 153, erweitert das Problem in den n-dimensionalen Raum. Ein n-dimensionaler Quader mit Kantenlängen $m_1, m_2, \cdots, m_n$ wird in kleine Würfel mit Kantenlänge 1 unterteilt, wobei der Läufer in der Ecke (1,1,...,1) startet und entlang der Diagonalen der Würfel läuft. Es wird festgestellt, dass jeder Würfel 2^n Ecken und maximal 2^{n-1} Diagonalen hat, wobei n die Dimension ist, in der man sich befindet.
Durch eine Computer-Simulation wurde die Vermutung aufgestellt, dass der Läufer jeden Würfel entweder 0 Mal oder 2^k Mal durchläuft, wobei $k \in \mathbb{N}$. Diese Vermutung besagt ebenfalls, dass der Läufer nie $3, 5, 6$ oder 7 mal durch einen Würfel läuft.

Zusammenfassend befasst sich das Läuferecken-Problem mit der komplexen Bewegung eines Läufers in verschiedenen Dimensionen. Es beginnt mit der einfachen zweidimensionalen Bewegung auf einem Schachbrett, erweitert sich auf die dreidimensionale Bewegung in einem Quader und schließlich auf die n-dimensionale Bewegung in einem Hyperquader.
Jede Dimension bringt neue Herausforderungen und Erkenntnisse über Symmetrien und Bewegungsmuster mit sich, was das Problem zu einer faszinierenden Kombination aus Geometrie und Algebra macht. (Johannes Seiz)

Die Dreiecksungleichung
und einiges Drumherum
von Hartwig Fuchs

Der griechische Mathematiker Euklid (um 300 v. Chr.) hat ein für die Entwicklung der Mathematik grundlegendes Werk geschrieben – das Buch „Elemente“. Darin hat er vorgemacht, wie man Mathematik betreiben sollte:
Ausgehend von einigen nicht zu hinterfragenden und daher als wahr geltenden Sätzen (= Axiome) sind alle weiteren Behauptungen einer Theorie – auch solche, die unmittelbar einleuchtend sind* – allein mit logischen Begründungen herzuleiten.

* Siehe dazu den Anhang auf Seite 31.

So hat er im 1. Teil seines Buches den anschaulich nicht widerlegbaren, also offensichtlich wahren Satz 19 dennoch allein durch logische Argumentation bewiesen.

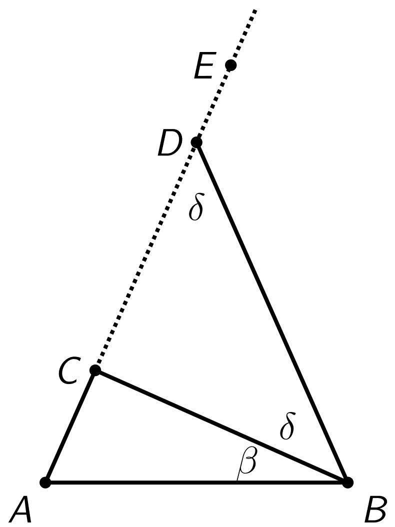
(1) **Euklids Satz 19**
In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die längere Seite gegenüber.

Beispiel 1

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse stets länger als jede der beiden Katheten.
Dies gilt deshalb, weil der rechte Winkel, der der Hypotenuse gegenüber liegt, größer als jeder der beiden übrigen Dreieckswinkel ist.
Denn wäre einer von ihnen $\geq 90°$, dann wäre die Winkelsumme im Dreieck $> 180°$ – ein Widerspruch.
Eine Folgerung aus (1) ist die Dreiecksungleichung (Euklids Satz 20) – ein wichtiger Satz der Geometrie – dessen Beweis allerdings einige Zeitgenossen Euklids für überflüssig erklärten, da doch sogar jeder Esel wisse, dass er wahr sei.*

(2) **Euklids Satz 20**
In jedem Dreieck sind jede zwei Seiten zusammengenommen länger als die dritte Seite.

Beweis



Wir zeigen, dass in jedem Dreieck ABC gilt:

(3) |AC|+|CB|>|AB|
(Ein Beweis der beiden anderen möglichen Ungleichungen verläuft analog).

Man verlängere AC bis zu einem Punkt E, so dass $|CE| > |CB|$ ist. Von C aus trage man auf CE eine Strecke der Länge $|CB|$ ab; man erhält so den Punkt D. Zeichne die Strecke DB. Im gleichschenkligen Dreieck BDC gilt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = \delta$.
Ist $\sphericalangle ABC = \beta$, dann ist im Dreieck ABD:
$\beta + \delta > \delta$, woraus mit (1) folgt:
$|AC|+|CD| > |AB|$ und wegen $|CD| = |CB|$ erhält man daraus: $|AC| + |CB| > |AB|$.

Einige Anwendungsbeispiele der Dreiecksungleichung

Beispiel 2

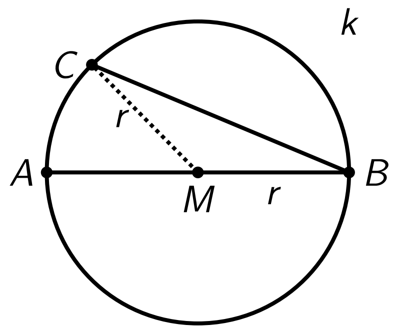
a) Welches der Dreiecke mit den Seitenlängen 4, 5, 10 bzw. 4, 6, 10 bzw. 4, 7, 10 ist konstruierbar?
In den beiden ersten Fällen gilt $4+5 < 10$ bzw. $4+6 = 10$ – im Widerspruch zu (3) – es gibt daher keine Dreiecke mit den zwei ersten Längen-Tripeln.

Dagegen ist ein Dreieck mit den Seitenlängen 4, 7, 10 konstruierbar, denn jetzt gelten die von (3) geforderten Ungleichungen $4 + 7 > 10$, $4 + 10 > 7$ und $7 + 10 > 4$.

b) Wie viele verschiedene Dreiecke vom Umfang 12 mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es? Überprüfe selbst: Es gibt drei solcher Dreiecke und zwar mit den Seitenlängen 2, 5, 5 bzw. 3, 4, 5 bzw. 4, 4, 4.

Beispiel 3

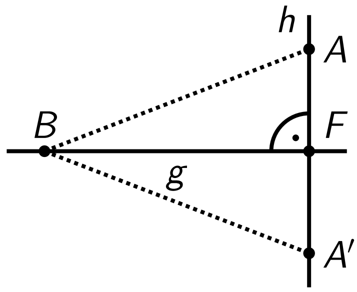
In einem Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r ist jede Sehne, die kein Durchmesser ist, kürzer als ein Durchmesser.



Nachweis:
Es sei B ein beliebiger Punkt des Kreises und BA sei ein Durchmesser; ferner sei BC mit $C \in k$ und $C \neq A$ und $C \neq B$ eine beliebige Sehne.
Im Dreieck BCM gilt dann wegen (3):
$|BC| < |BM| + |MC| = 2r = |AB|$ – was die Behauptung beweist.

Beispiel 4

Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt $A \notin g$; F sei der Schnittpunkt von g und der zu g orthogonalen Gerade h. Dann ist F der Punkt, der von allen Punkten auf g den kürzesten Abstand von A hat.



Nachweis:
Man spiegelt A an g in den Punkt A'.
Wenn dann B ein beliebiger Punkt auf g ist, $B \neq F$, dann folgt aus (3) für das Dreieck ABA':
$|AA'| < |AB| + |BA'| = 2|AB|$.
Weil nun $|AA'| = 2|AF|$ ist, gilt
$2|AF| < 2|AB|$, so dass $|AF| < |AB|$ ist – wie auch immer $B \in g$, $B \neq F$, gewählt wird.

Beispiel 5

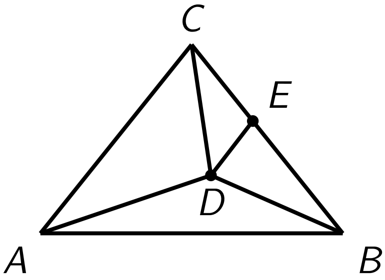
Es sei D ein beliebiger Punkt im Innengebiet eines Dreiecks ABC vom Umfang u. Dann gilt:

a) Von den beiden geknickten Strecken ACB und ADB ist ADB die kürzere.

b) Ist a die Summe der Abstände des Punktes D von den Eckpunkten des Dreiecks, so ist $\frac{1}{2}u < a$.

c) Es sei $S = P_0P_1 \dots P_{n+1}E$, $n \geq 0$, ein Streckenzug zwischen den Punkten P_0, P_1, P_2, ..., P_{n+1}, E. Dann gilt: Die Strecke $T = P_0E$ ist kürzer als jeder von T verschiedene Streckenzug S.

Nachweis von a) von Herr Rehm:

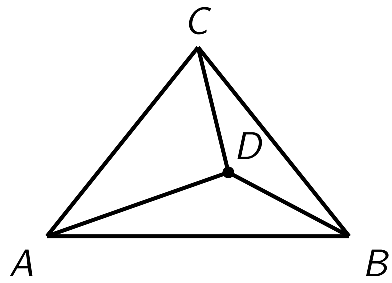


Man verbinde D mit A, B und C.
Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit Dreieck ADC nicht stumpf, dann müssen die Dreiecke ABD und BCD stumpf sein und man kann die Strecke BD auf BC abtragen zu BE.

Das Dreieck BDE ist dann gleichschenklig mit $\sphericalangle BDE < 90°$. Analog muss dann auch Dreieck ADE stumpf sein mit $AE > AD$. Wendet man nun die Dreiecksungleichung an ergibt sich:
$AC + BC = (AC + CE) + BE > AE + BE = AE + BD > AD + BD$.

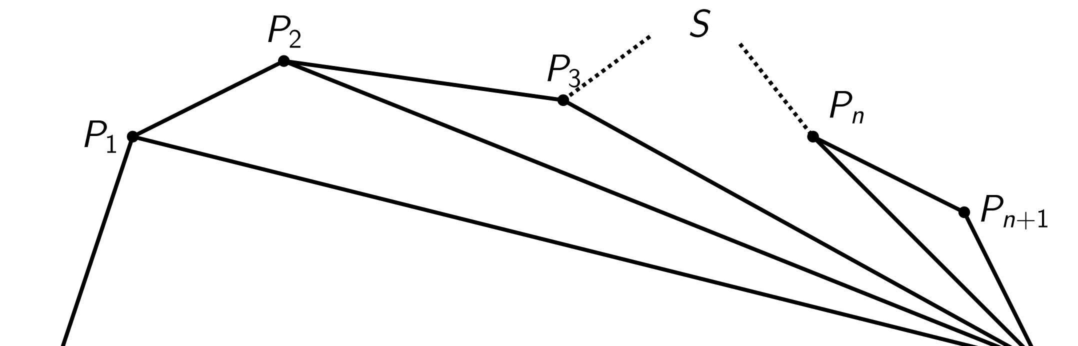
Nachweis von b) durch dreifache Anwendung der Dreiecksungleichung:

Man verbinde D mit A, mit B und mit C. Für die so gebildeten Dreieck gilt dann:
$|AB| < |AD| + |BD|$, $|AC| < |AD| + |DC|$,
$|BC| < |BD| + |DC|$.
Durch Addition der drei Ungleichungen ergibt sich
$|AB| + |BC| + |AC| < 2|AD| + 2|BD| + 2|DC|$.



Also ist $u < 2a$, so dass $\frac{1}{2}u < a$ ist.

Nachweis von c) durch n-fache Anwendung der Dreiecksungleichung:
Man verbinde E mit den Punkten P_0, P_1, P_2, ..., P_n. Dann erhält man durch n-malige Anwendung von (3):



$|T| = |P_0E| < |P_0P_1| + |P_1E|$
$\uparrow |P_1E| < |P_1P_2| + |P_2E|$
$\uparrow |P_2E| < |P_2P_3| + |P_3E|$
...
$\uparrow |P_nE| < |P_nP_{n+1} + |P_{n+1}E|$.

Wenn man an den mit Pfeilen bezeichneten Stellen jeweils $|P_iE|$ durch

$$|P_iP_{i+1}| + |P_{i+1}E|, i = 1, 2, \dots, n$$

ersetzt, dann ergibt sich:

$$|T| = |P_0E| < |P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + ... + |P_nP_{n+1}| + |P_{n+1}E| = |S|$$

Es gilt daher die Behauptung.

Anhang

Der spätantike Philosoph Proklos (412 - 485 n. Chr.) berichtet in seinem uns überlieferten Kommentar zu Euklids Geometrie-Buch „Elemente“ von den Epikureern, einer Gruppe von Philosophen im alten Athen, die nach Antworten auf die Fragen des richtigen Lebens suchten, wobei ihnen die *Anschauung* und die *Erfahrung* als Weg zum Erfolg galten.

Als ein Beispiel für die Richtigkeit dieser ihrer Grundannahmen führten sie die Dreiecksungleichung ins Feld. Sie behaupteten nämlich:

(4) Jeder Esel kennt die Dreiecksungleichung.

Die epikureische Begründung:
Wenn man einen hungrigen Esel an den Eckpunkten A eines Dreiecks ABC stellt und einen Haufen Gras bei B deponiert, dann legt ihm die *Anschauung* nahe, dass er am schnellsten zu seinem Futter gelangt, wenn er längs der Strecke AB läuft, denn:

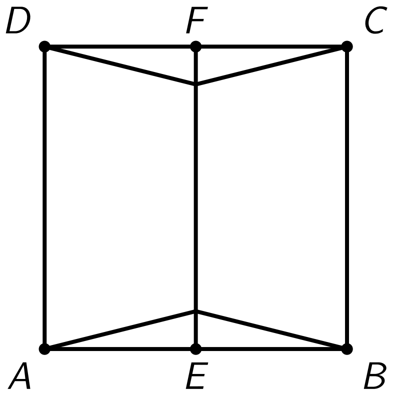
(5) jeder Weg, der über den Punkt C führt, ist länger als der Weg AB.

Und weil (5) in früheren ähnlichen Situationen ausnahmslos zutraf – ganz gleich, wo die Stelle C, $C \neq A$ und $C \neq B$, lag – ,so lehrten ihn diese *Erfahrung*:
(5) galt bisher stets und das wird auch immer so bleiben.

Nach Überzeugung der Epikureer zeigte dieses Beispiel, dass Euklids behauptete Dreiecksungleichung überhaupt keines Beweises bedürfe, da diese ja aus Gründen der Anschauung und der Erfahrung richtig sei. Proklos berichtet, dass die Epikureer daher bei jeder Gelegenheit versucht hätten, Euklids Vorgehensweise lächerlich zu machen.

Anhang zum Anhang

Proklos akzeptiert die der Geschichte vom Esel zu Grunde liegende Auffassung der Epikureer nicht. Er misstraut der unbeschränkten Gültigkeit ihrer Grundannahmen über den Wissenserwerb – lebte er heute, so hätte er sich zur Rechtfertigung auf die folgenden Beispiele berufen können:



(a) Die Anschauung kann trügen

Im Rechteck $ABCD$ sei EF das Mittellot der Seiten AB und CD. Welche Strecke ist länger: AB oder EF?
Die Anschauung führt zu der Behauptung: $|AB| < |EF|$. Tatsächlich aber ist $ABCD$ ein Quadrat, woraus folgt: $|AB| = |EF|$.

(b) Die Erfahrung kann sich irren

In der alten chinesischen Mathematik hat man nach einer Regel zur Bestimmung von Primzahlen gesucht und auch – wie man glaubte – eine gefunden:

(6) Eine ungerade Zahl $n+1$, $n \geq 2$, ist eine Primzahl, wenn sie ein Teiler von $2^n - 1$ ist.

Sie haben dazu (6) für jedes $n+1$ unterhalb einer bestimmten Schranke rechnerisch überprüft und so bestätigt.
Wären sie dabei aber zum Beispiel bis $n+1 = 101$ und damit bis zur 31-ziffrigen Zahl $2^{101} - 1$ gelangt, dann hätten sie so 51 im Sinne von (6) positive *Einzelerfahrungen* gemacht, aus denen sie dann auf die Richtigkeit von (6) für alle ungeraden $n+1$, $n \geq 1$ geschlossen hätten. Aber auf diese Weise hätten sie wohl kaum das richtige Ergebnis gefunden. Denn tatsächlich ist (6) falsch – erstmals für $n = 341$, denn wegen

$$2^{340} - 1 = \left(2^{10} - 1\right)\left(\left(2^{10}\right)^{33} + \left(2^{10}\right)^{32} + \ldots + 2^{10} + 1\right)$$

ist die 301-ziffrige Zahl $2^{340} - 1$ durch 341 teilbar, jedoch ist $341 = 11 \cdot 31$ keine Primzahl.

Eine merkwürdige Eigenschaft der Fermat-Zahlen

von Hartwig Fuchs

Der Zahlentheoretiker Pierre de Fermat (1601 - 1665) schrieb 1640 an den Mathematiker Bernard de Frénicle (1605 - 1675) er habe bemerkt, dass von den später nach ihm benannten Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ die ersten fünf, das sind $F_0 = 2^1 + 1 = 3$, $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^4 + 1 = 17$, $F_3 = 2^8 + 1 = 257$ und $F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$, Primzahlen sind. Daher vermute er, was er jedoch nicht beweisen könne:

(1) Jede Fermat-Zahl $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, ist eine Primzahl.
Bemerkung 2^{2^n} ist die verkürzte Schreibweise der Zahl $= 2^{(2^n)}$.

Eine kühne Vermutung- macht sie doch eine Aussage über Zahlen, die schon für kleine n wahre Zahlengiganten sind.
Beispiel: $F_{10} = 2^{1024} + 1$ hat nur 309 Ziffern*, aber F_{1945} hat bereits mehr als 10^{584} Ziffern und das sind mehr als die geschätzte Anzahl von 10^{80} aller Partikel im Universum.
Leonard Euler(1701 - 1783) hat 1732 die Vermutung (1) mit einem Gegenbeispiel ** widerlegt. Aber bis heute hat man trotz riesigem mathematischen Aufwand die

(2) Vermutung: Keine Fermat-Zahl F_n, $n \geq 5$, ist eine Primzahl.

weder beweisen noch widerlegen können. Sind also die Zahlen F_n mit großem n vielleicht zu groß, so dass sie mathematisch nicht erreichbar sind? Man sollte hier die Macht der Mathematik nicht unterschätzen! Wir können zum Beispiel eine ganz bestimmte Eigenschaft angeben, für die nachweisbar ist, dass all die unendlich vielen Zahlenmonster F_n, $n \geq 2$ sie besitzen:

(3) Jede Fermat-Zahl F_n mit $n \geq 2$ hat die Einerziffer 7.

Wir bezeichnen die Einerziffer einer natürlichen Zahl z in Dezimaldarstellung mit $|z|$. Es gilt: $|F_2| = |F_3| = |F_4| = 7$.
Annahme: (3) sei bewiesen für jede Fermat-Zahl $\neq F_0, F_1$, die $< F_n$ sei. Dann gilt (3) für F_n. Denn nach Annahme ist $|2^{2^{n-1}} + 1| = 7$, woraus $|2^{2^{n-1}}| = 6$ und daher $|(2^{2^{n-1}})^2| = 6$ folgt. Damit gilt:
$|F_n| = |2^{2^n} + 1| = |(2^{2^{n-1}})^2 + 1| = 6 + 1 = 7$

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 156

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Levi Brunn 4, Noah Fitting 10, Quirin Fritsch 7, Christina Karst 35, Felix Pick 4, Sina Marie Uherek Reyes 23;
Kl. 7: Robert Schmitt 15;
Kl. 8: Nikolas Kaminski 11, Peter Knobloch 27, Lisa Schäfer 26;
Kl. 9: Rachel Tao 12,5, Mai Chi Tran 14

Bingen, Stefan-Georg Gymnasium
Kl. 6: Tim Jockers 9;
Kl. 7: Lena Rohr 4;
Kl. 9: Semen Ludlik 2

* Aus $2 \approx 10^{0,301}$ und $2^{10} \approx 10^{3,01}$ sowie $2^{1945} \approx 10^{0,301 \cdot 1945} \approx 10^{585}$ folgt: $F_{10} \approx (10^{0,301})^{10^{3,01}} \approx 10^{308}$ und $F_{1945} \approx (10^{0,301})^{10^{585}} \approx 10^{584}$

** $F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 6: Cornelia Meyer 6, Silas Salloch 10, Joana Schwettlick 6;
Kl. 9: Aleksandr Silantev 19

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 7: Nico Mathy 27, Philip Mühlbeyer 8;
Kl. 8: Wibke Goez 9

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 10: Malcom Carandany 20, Philippos Dimitriou 44

Ingelheim, Sebastian-Münster Gymnasium:
Kl. 11: Elanor Kondla 14

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 6: Imran Aouzi 10;
Kl. 10: Jabir Aouzi 16

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 8: Philippa Lamke 41

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 9: Victor Mayer 15

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 7: Ioan Salaru 38

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 6: Philipp Mühl 6, Martin Schroff 15;
Kl. 8: Jona Gooldmann 3, Daniel Laibach Muniz 50,5;
Kl. 9: Johannes Kiehn 32;
Kl. 10: Georgi Koynov 42,5;
Kl. 12: Sascha Sprengler 20

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Otto-Schule
Kl. 6: Eric Reichardt 6;

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 6: Jasmin Borrmann 19;
Kl. 10: Dora Emilia Mezaros 35, Emilie Borrmann 11

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 11: Nils Angel 34;

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 9: Mai Linh Dang 39,5;
Kl. 12: Tu Sam Dang 42

Trier, Angela-Merici-Gymnasium:
Kl. 11: Felicitas Bauer 28

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 6: Sultan Amer 5

Schüler, bei denen keine Schule angegeben wurde:
Kl. keine Angabe: Junas Dürles 39

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2024/25 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Georg Sahliger, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf mit freundlicher Unterstützung von Johannes Seiz
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Jahrgang 44 | Heft 158 | Juni 2024

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid