

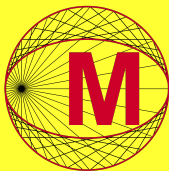
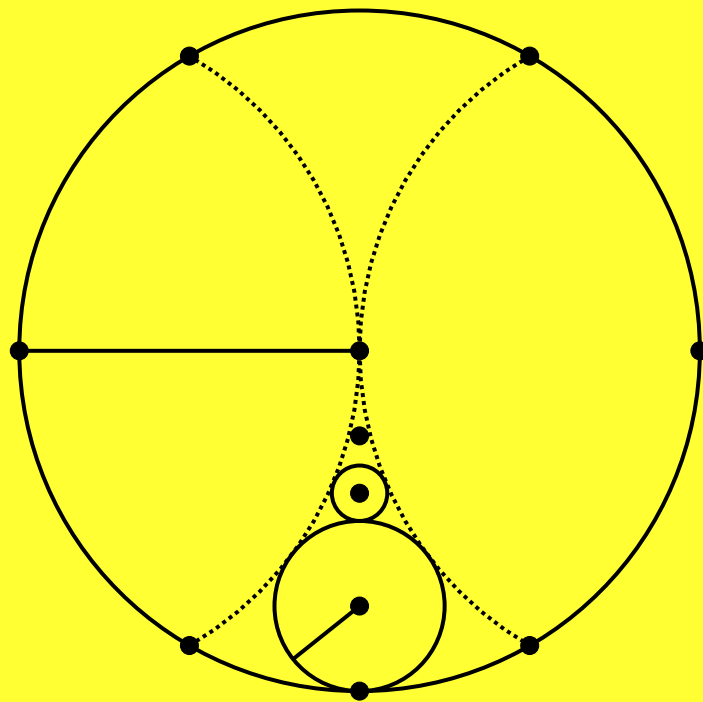
Jahrgang 44

Heft 159

Sept. 2024

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler

herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15. November 2024.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

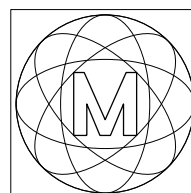
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



Einladung zur MONOID-Jahresfeier

Alle Freunde und Förderer von MONOID sind herzlich eingeladen, an der MONOID-Feier 2024 teilzunehmen. Dabei werden unter anderem Preise an erfolgreiche Löserinnen und Löser des Schuljahres 2023/24 vergeben. Die Feier findet am

Samstag, den 16. November 2024,
ab 10 Uhr,
in der Alten Mensa der Universität Mainz

statt. Den Festvortrag „Geometrie mit Stangen“ wird Prof. Dr. Rainer Kaenders halten.

Alle Preisträgerinnen und Preisträger werden auch gesondert per Post eingeladen.

Die Veranstaltung wird musikalisch begleitet. Im Anschluss an die Feier, gegen 12:30 Uhr, sind alle Gäste zu einem kleinen Imbiss und Austausch herzlich eingeladen.

Beweis in einer Zeile

von Hartwig Fuchs

Für jedes reelle $a > 0$ gilt: $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Begründe dies in einer Zeile.

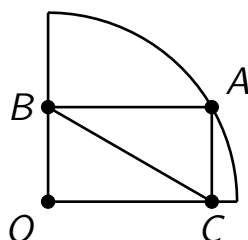
Lösung

$$a + \frac{1}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2$$

Mathematische Miniatur

Länge einer Hypotenuse

von Hartwig Fuchs



Ein Punkt A liege auf einem Viertelkreis mit dem Kreismittelpunkt O und dem Radius r ; B und C seien Punkte auf den Radien – wie in der Figur – so dass für das Dreieck ABC gilt:

ABC ist rechtwinklig bei A und seine Seite AB ist parallel zu OC . Bestimme die Länge $|BC|$ von BC .

Lösung

Wegen $AB \parallel OC$ gilt $\angle ABO = \angle OCA = \angle BOC = 90^\circ$. Daher ist $ABOC$ ein Rechteck. Für die Diagonalen in diesem Rechteck gilt: $|BC| = |OA| = r$.

Die besondere Aufgabe

Primteiler von Fermatzahl-Zwillingen

von Hartwig Fuchs

Es sei $2[n] = 2^{(2^n)}$, n eine ganze Zahl größer Null. Dann gilt

- (1) $2[n] - 1$ hat mindestens n verschiedene Primteiler p_i mit $p_1 > 2$,
 $i = 1, 2, \dots, n$.

Nachweis mit vollständiger Induktion

Für $n = 1$ gilt (1) wegen $2[1] - 1 = 3$.

Die Behauptung (1) sei für ein beliebiges $n \geq 1$ bewiesen. Sie gilt dann auch für $n + 1$.

Zunächst: Ist p_i ein Teiler von $2[n] - 1$, $1 \leq i < n$, so gilt $2[n] - 1 = k_i p_i$ mit einem ganzzahligen Faktor k_i . Daraus folgt:

- (2) Kein p_i ist ein Teiler von $2[n] + 1$, da $p_i > 2$ ist.

Wegen $2[n+1] = 2^{2^{n+1}} = 2[n]^2$ gilt $2[n+1]^2 - 1 = (2[n] - 1)(2[n] + 1)$ und deshalb ist jeder Teiler p_i von $2[n] - 1$ auch ein Teiler von $2[n+1]^2 - 1$, jedoch ist keiner von ihnen ein Teiler von $2[n] + 1$. Folglich besitzt $2[n+1] - 1$ mindestens einen von jedem p_i verschiedenen Primteiler – und somit hat $2[n+1] - 1$ mindestens $n + 1$ verschiedene Primteiler.

Bemerkung:

Für Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – man nennt sie Fermatzahlen – gibt es (noch) keine der Aussage (1) für die Zahlen $2^{(2^n)}$, $n \geq 0$ entsprechende Behauptung.

Zunächst sind die fünf Zahlen F_n , $n = 0, 1, 2, 3, 4$ – das sind 3, 5, 17, 257, 65537 – allesamt Primzahlen. Bis heute hat man keinen Weg gefunden – sofern es ihn überhaupt gibt –, wie man zu einer Aussage über die Anzahl der Primteiler von nicht primen Fermat-Zahlen gelangen könnte.

Wo liegt der Fehler?

von Hartwig Fuchs

Wenn man die linke Seite der Gleichung

$$(1) \quad 1 + \frac{4x-10}{1-x} = \frac{3x-9}{2-x}$$

mit $x \neq 1$ und $x \neq 2$ umformt zu

$$(2) \quad \frac{(1-x)+(4x-10)}{1-x} = \frac{3x-9}{2-x},$$

so folgt aus (2)

$$(3) \quad \frac{3x-9}{1-x} = \frac{3x-9}{2-x}$$

Da in (3) die Zähler übereinstimmen, sind dort auch die Nenner gleich. Also ist $1 - x = 2 - x$ und daher ist $1 = 2$. Wegen $1 + 1 = 2 + 1$ ist dann auch $2 = 3$; usw. Also gilt:

(4) Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

Wo liegt der Fehler?

Lösung

Der zu diesem Ergebnis führende Trugschluss entsteht so:

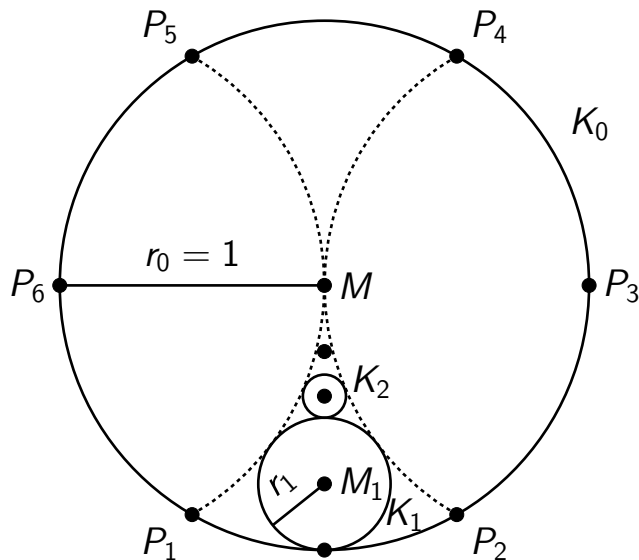
Aus $\frac{k}{m} = \frac{k}{n}$ mit ganzen Zahlen k, m, n folgt nur dann $m = n$, wenn $k \neq 0$ ist. Genau diese Bedingung erfüllt die Gleichung (1) nicht, denn aus (1) folgt $x - 3 = 0$ und somit auch $3x - 9 = 0$. Damit sind die Zähler in (3) beide null. Dann aber folgt aus der richtigen Gleichung $\frac{0}{1-x} = \frac{0}{2-x}$ nicht, dass $1 - x = 2 - x$ eine wahre Aussage ist.

Und daher kann man aus dieser Gleichung auch keine zutreffenden Schlüsse ziehen – insbesondere nicht die Behauptung (4) begründen.

Eine anschauliche Paradoxie

von Hartwig Fuchs

Es sei K_0 ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r_0 = 1$; die Kreispunkte



$P_1, P_2, \dots, P_6$ seien Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Das krummlinig begrenzte Dreieck MP_1P_2 sei D . Es sei nun K_1 der größte Kreis mit Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 , der jede Seite von D von innen berührt; ganz entsprechend sei K_2 mit Mittelpunkt M_2 und Radius r_2 der größte Kreis, der die Seiten MP_1 und MP_2 von innen und K_1 von außen berührt – so wie in der Figur – entsprechend $K_3, K_4, \dots$. Dann gilt:

- (1) Die Umfänge aller Kreise $K_1, K_2, K_3, \dots$ sind zusammen halb so groß wie der Umfang des Kreises K_0 .

Die Aussage (1) widerspricht wohl dem, was uns die geometrische Anschauung sagt. Aber auf elegante Weise lässt sich zeigen, dass (1) zutrifft. Der Umfang des Kreises K_0 mit dem Radius $r_0 = 1$ beträgt 2π . Wegen $2r_1 + 2r_2 + \dots = r_0 = 1$ ist die Summe der Umfänge von $K_1, K_2, K_3, \dots$:

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 + \dots = \pi(2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \dots) = \pi.$$

Der Schreiber, der nicht zählen konnte

von Hartwig Fuchs

Bei einer Friedensverhandlung am Limes saßen sich Römer auf vierbeinigen Stühlen und einige Germanen auf dreibeinigen Hockern gegenüber; fünf Germanen verfolgten die Gespräche im Stehen. Der stets zu Späßen aufgelegte römische Schreiber Scriba, der das Protokoll der Verhandlungen an einem vierbeinigen Tisch schrieb, vermerkte in seinem Bericht:

Ich zähle insgesamt 43 Beine. Alle Stühle und Hocker waren besetzt.

Übrigens: ein Germane hatte nur ein Bein.

Einige Wochen später erhielt Julius Cäsar in Rom das Protokoll. Nachdem er es gründlich studiert hatte – in Staatsangelegenheiten nahm er es sehr genau – ordnete er an: Der Schreiber Scriba ist unverzüglich zu entlassen.

Die politischen Gegner des Julius C., die dem Imperator schon lange einen von Willkür geprägten Regierungsstil nachweisen wollten, beauftragten den Staatsarithmeticus um die mathematische Bestätigung, dass Scriba grundlos entlassen worden war.

Der Arithmeticus machte sich ans Werk.

Ausgehend von der Annahme, dass Scriba korrekt gezählt hatte, machte er die folgende Nachzählung, bei der er die Anzahl sitzender Römer mit r und die der sitzenden Germanen mit g bezeichnete.

Zählung der Beine

Sitzende Römer: $(2 + 4)r = 6r$ Beine

Tisch: 4 Beine

(a) Der einbeinige Germane stand

sitzende Germanen: $(2 + 3)g = 5g$ Beine

stehende Germanen: $4 \cdot 2 + 1 = 9$ Beine

(b) Der einbeinige Germane saß

sitzende Germanen: $(2 + 3)g - 1 = 5g - 1$ Beine

stehende Germanen: $5 \cdot 2 = 10$ Beine

Gesamtzahl der Beine

$$(a) \quad (6r + 4) + (5g + 9) = 43 - \text{also } 6r + 5g = 30$$

$$(b) \quad (6r + 4) + (5g - 1) + 10 = 43 - \text{also } 6r + 5g = 30$$

Lösung des Problems

Aus der in beiden Fällen (a) und (b) gültigen Gleichung $6r + 5g = 30$ folgt:

g ist eine gerade Zahl – zunächst also ist $g = 0, 2, 4$ oder 6 .

Es gilt aber: $g \neq 0$ wegen des einbeinigen Germanen und $g \neq 6$, denn $r \neq 0$

wegen des Schreibers Scriba. Für $g = 2$ und $g = 4$ ist r nicht ganzzahlig. Es zeigt sich somit:

Die eingangs getroffene Annahme des Arithmeticus war falsch – Julius C. hatte daher Scriba nicht willkürlich, sondern wohlüberlegt entlassen.

Monoidale Frage

von Hartwig Fuchs

Mit den Buchstaben M, O, N, I, D seien positive reelle Zahlen – die auch gleich sein dürfen – bezeichnet. Hat dann die Gleichung

$$(1) \quad M^2 + O^2 + N^2 + O^2 + I^2 + D^2 = 2(M + O + N + O + I + D) - 6$$

eine Lösung?

Lösung

Die Gleichung (1) lässt sich umformen in die Gleichung

$$(M^2 - 2M + 1) + 2(O^2 - 2O + 1) + (I^2 - 2I + 1) + (N^2 - 2N + 1) + (D^2 - 2D + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (M - 1)^2 + 2(O - 1)^2 + (N - 1)^2 + (I - 1)^2 + (D - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow M = O = N = O = I = D = 1$$

Heron-Dreiecke

von Hartwig Fuchs

Pythagoras von Samos (um 500 v. Chr.) hat rechtwinklige Dreiecke in dem nach ihm benannten Satz durch eine numerische Eigenschaft so charakterisiert:

Für jedes rechtwinklige Dreieck mit den Katheten von Länge a, b und der Hypotenuse mit Länge c gilt

$$(1) \quad a^2 + b^2 = c^2 \text{ – und umgekehrt.}$$

Dieser Satz führte P. – für den ganze Zahlen sehr wichtig waren – zu der naheliegenden Frage: Welches sind die pythagoreischen Dreiecke – das sind rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen – und wie findet man sie? Er hat eine heute allgemein bekannte Methode zur Lösung dieses Problems gefunden.

Es sei D ein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen a, b und c , Umfang s und Fläche f . Dann gilt:

Das Dreieck D ist mit $c > a, b$ pythagoreisch, wenn

$$(2) \quad a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2 \text{ und } c = u^2 + v^2 \text{ ist und man daher } s = 2u(u + v) \text{ und } f = uv(u^2 - v^2) \text{ setzt, wobei } u \text{ und } v \text{ beliebige wählbare ganze Zahlen mit } u > v \geq 1 \text{ sind.}$$

Beispiel 1

Für $u = 2$, $v = 1$ erhält man aus (2) das pythagoreische Dreieck mit $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $s = 12$ und $f = 6$.

Bei der Aussage (2) ist zu klären:

(a) Gibt es überhaupt ein Dreieck D mit den in (2) definierten Seitenlängen?

Das ist der Fall, wenn die drei Dreiecksungleichungen $a + b > c$, $b + c > a$ und $c + a > b$ zutreffen – und das tun sie. Zum Beispiel gilt wegen $u > v$, dass $b + c = u^2 - v^2 + u^2 + v^2 = 2u^2 > 2uv = a$.

(b) Ist das Dreieck D rechtwinklig?

Für die Zahlen a , b und c in (2) gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ (überprüfe dies selbst!). Aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras folgt daher, dass D rechtwinklig ist. Damit ist nachgewiesen: Die mit (2) erzeugten Dreiecke sind pythagoreisch.

Die Frage des Pythagoras nach ganzzahligen Dreiecken lässt sich in naheliegender Weise verallgemeinern zu der Frage: Wie findet man Dreiecke, bei denen Seitenlängen, Umfang und Fläche rationale Zahlen sind?* Solche Dreiecke gibt es. Man nennt sie *Heron-Dreiecke*, um an den griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (um 10 - 70 n. Chr) zu erinnern, der wie Pythagoras nach numerischen Zusammenhängen in Dreiecken suchte.**

Mit der folgenden Regel lassen sich alle Heron-Dreiecke erzeugen.

(2) Es seien $k > 0$, $u > 1$, $v > 1$ rationale Zahlen. Dann erzeugt jedes Tripel (k, u, v) ein Heron-Dreieck D , wenn für dessen Seitenlängen a, b, c und Umfang s sowie Fläche f gilt:

$$a = k \left(u + \frac{1}{u} \right), \quad b = k \left(v + \frac{1}{v} \right), \quad c = k \left(u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} \right), \\ s = 2k(u + v), \quad f = k^2 \left(u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} \right)$$

Beispiel 2

(a) Für $u = 2$, $v = 3$, $k = \frac{6}{5}$ ist das Dreieck D in Bsp. 1 das pythagoreische Heron-Dreieck mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$.

(b) Für $u = v = 2$, $k = \frac{1}{3}$ ist D das gleichschenklige Heron-Dreieck mit $a = b = \frac{5}{6}$ und $c = 1$.

Zum Nachweis der Behauptung (2) zeigen wir:

Die Dreiecksungleichungen $a + b > c$, $b + c > a$ und $a + c > b$, welche die Existenz eines Dreiecks D der Seitenlängen a, b und c garantieren, sind erfüllt.

Vorweg: Aus $u > 1$, $v > 1$ folgt $1 > \frac{1}{u}$, $1 > \frac{1}{v}$, so dass $u > \frac{1}{v}$ und $v > \frac{1}{u}$ ist.

* Eine Zahl r heißt rational, wenn $r = \frac{s}{t}$ mit ganzen Zahlen s und t sowie $t \neq 0$ ist.

** Heron hat z.B. den Satz bewiesen: Ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c hat die Fläche $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Damit gilt:

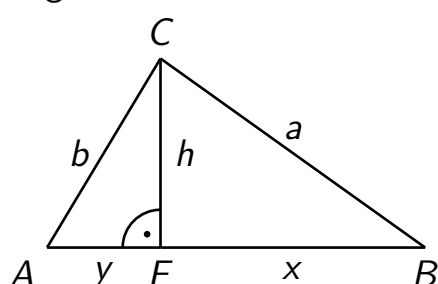
$$a + b = k \left(u + \frac{1}{u} + v + \frac{1}{v} \right) > k \left(u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} \right) = c;$$

$$b + c = k \left(v + \frac{1}{v} + u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} \right) > k \left(\frac{1}{u} + u - \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \right) = a;$$

$$c + a = k \left(u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} + u + \frac{1}{u} \right) > k \left(\frac{1}{v} + v - \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \right) = b.$$

Die Folgerung $b + c > a$ ist möglich wegen $v > \frac{1}{u}$ und die Folgerung $c + a > b$ aufgrund von $u > \frac{1}{v}$.

Wir wollen nun noch der Frage nachgehen: Wie wurden die Gleichungen (2) hergeleitet?



Es sei ABC ein Heron-Dreieck D mit den Seitenlängen a, b, c und mit der Fläche f . Die Länge des Lotes aus C auf AB sei h ; der Lotfußpunkt F zerlege AB in Teilstrecken der Längen x und y (vgl. Figur). Dann gilt:

(3) h, x und y sind rational.

Nachweis

Da die Strecke c und die Fläche f des Dreiecks D rational sind, folgt aus $f = \frac{1}{2}hc$, dass h rational ist.

Für die Dreiecke BCF und AFC gilt der Satz von Pythagoras:

$$(3) \quad h^2 = a^2 - x^2 \text{ sowie}$$

$$(3') \quad h^2 = b^2 - y^2.$$

Daraus folgt:

$$(4) \quad a^2 - b^2 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Weil in (4) a^2, b^2 und $x + y = c$ rational sind, ist auch $x - y$ rational und aus $(x + y) + (x - y) = 2x$ folgt: x ist rational und somit auch $y = c - x$.

Herleitung von (2) mit (3): Das Dreieck D mit der Höhe h kann man durch eine Ähnlichkeitsabbildung in ein Dreieck D' mit dem Seitenlängen a', b', c' und der Höhe $h' = 1$ transformieren. Für D' lautet dann (3): $1 = (a' + x)(a' - x)$. Setzt man nun $a' + x = u$, so muss $a' - x = \frac{1}{u}$ sein.

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich:

$$(5) \quad a' = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \text{ sowie } x = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right).$$

Welche Zahlen u sind in (5) zulässig?

Es ist $a' + x = u$ sowie nach der Dreiecksungleichung $a' + x > h' = 1$. Folglich gilt (5) für jedes rationale $u > 1$.

Auf die gleiche Weise wie (5) erhält man mit der Setzung $b' + y = v$ und $b' - y = \frac{1}{v}$:

$$(6) \quad b' = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \text{ sowie } y = \frac{1}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right), \quad v > 1 \text{ rational.}$$

Für die Seitenlängen $c' = x + y$, den Umfang $s' = a' + b' + c'$ und die Fläche $f' = \frac{1}{2} h' c'$ mit $h' = 1$ von D' gilt dann:

$$(7) \quad c' = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} \right), \quad s' = u + v, \quad f' = \frac{1}{4} \left(u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} \right), \quad v > 1 \text{ rational.}$$

Wenn man nun das Dreieck D' durch eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem rationalen Faktor $2k$, $k > 0$ in das ursprünglich gegebene Heron-Dreieck D transformiert, dann gilt für D :

$$a = 2ka', \quad b = 2kb', \quad c = 2kc', \quad s = 2ks' \text{ und } f = (2k)^2 f' = k^2 \left(u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} \right).$$

Damit ergeben sich aus (5) - (7) unmittelbar die Gleichungen in (2).

Weil nun D ein beliebig vorgegebenes Heron-Dreieck ist, gilt die Erzeugungsregel (2) für jedes Heron-Dreieck.

Aufgabe

Man finde eine Regel zur Erzeugung aller heronischer Dreiecke mit ganzzahligen Größen a, b, c, s und f . Die Lösung zu dieser Aufgaben ist auf Seite 27 zu finden.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

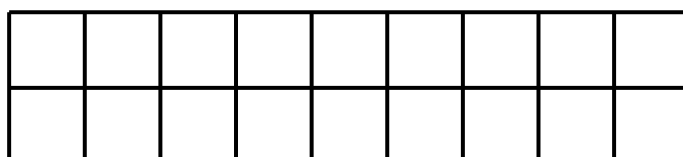
Es ist eine triviale Aufgabe, ein 10×10 -Quadrat in 100 kongruente Vierecke zu zerlegen, die jeweils einen Umkreis besitzen, dessen Durchmesser $\sqrt{2}$ beträgt. Aber kann man ein 10×10 -Quadrat auch in 100 kongruente Vierecke zerlegen, die jeweils einen Umkreis besitzen, dessen Durchmesser $\sqrt{3}$ beträgt? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2024 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 157

In Heft 157 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Robinson Crusoe und sein Gefährte Freitag langweilen sich auf ihrer Insel. Daher zeichnet Robinson ein 9×2 -Rechteck in den Sand und schlägt Freitag folgendes Spiel vor:



Jeder Spieler markiert abwechselnd entweder ein Feld oder zwei benachbarte (mit einer gemeinsamen Kante versehene) Felder des Rechtecks, wobei Robinson beginnt. Wer das letzte Feld markiert, gewinnt.

Für welchen der Spieler gibt es eine sichere Gewinnstrategie? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Robinson kann mit seinem ersten Zug das Spielfeld in zwei symmetrische Teile aufspalten, indem er die beiden mittleren Felder markiert. Nun braucht er nur noch nach jedem Zug von Freitag dessen Markierung symmetrisch nachzumachen und hat damit sicher den letzten Zug zum Gewinn. Wenn Robinson diese Symmetrie zu Beginn nicht erzeugt, kann er auch gewinnen, doch ist dann eine Begründung wesentlich komplizierter.

Eine weitgehend richtige Lösung wurde von Daniel Laibach Muniz eingesandt.

Auch dieses Spiel wurde rasch langweilig, und so schlug Freitag als Variante vor, beim Markieren von zwei Feldern auf die Bedingung der Nachbarschaft zu verzichten. Hat auch hier der erste Spieler eine Gewinnstrategie? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Lösung der Informatik-Aufgabe aus MONOID 157

In Heft 157 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Schreibe ein Computerprogramm, das nach einem geschickten „Branch and Bound“ – Verfahren Affenpuzzle löst. Hinweis: Auf einem modernen Computer sollte das hier gezeigte 5x5-Puzzle in etwa einer Sekunde erledigt sein.

Eine noch größere Herausforderung ist es, mit einem Programm neue Affenpuzzle zu generieren, die lediglich vier Lösungen besitzen. Bitte beachte, dass alle Spielkarten unterschiedlich sein müssen, da man sonst ja durch Vertauschen bereits mehrere Lösungen erzeugen könnte. Du kannst auch die Zahl der Farben variieren oder das Puzzle mit gleichseitigen Dreiecken oder Sechsecken gestalten. Schicke uns Deine Lösung! Die erste Einsendung eines 7x7-Puzzles auf Basis von quadratischen Affenpuzzlekarten mit vier Farben mit einem korrekten Nachweis, dass es lediglich vier Lösungen besitzt (die durch Drehen um 90° ineinander überführbar sind), wird mit untenstehendem Buch prämiert. Der Nachweis darf selbstverständlich auch mit Software erbracht werden, falls diese auf einem handelsüblichen Rechner in unter einem Tag Laufzeit das Ergebnis berechnet.

(JG)

Weitere Informationen

Auf der Webseite www.abenteuer-informatik.de findest Du die Open-Access-Kapitel des Buchs „Abenteuer Informatik“ zum freien Herunterladen und viele weitere Aktivitäten.

Hier noch die Bibliographie des vollständigen Buches:

Jens Gallenbacher „Abenteuer Informatik: IT zum Anfassen für alle von 9 bis 99 – vom Navi bis Social Media“,

5. Auflage, Springer Nature Verlag, 2021, ISBN 978-3-662-63738-8

Lösung

Eine Lösung für diese Aufgabe wurde von Dr. Gero Scholz verfasst und kann als Code auf unserer Website unter

<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/AusblickAufDieInformatik.php>

eingesehen werden.

Anschauliche Anomalie

von Hartwig Fuchs

Prof. Quaoar, Mathematiker mit besonderem Interesse an den Problemen, die im Zusammenhang mit dem Unendlichen in der Mathematik auftreten, spricht in einer seiner Vorlesungen über sein Lieblingsthema.

Prof. Q.: Man stellt sich das Unendliche oft als ein einheitliches Ganzes vor, das nur eine erkennbare Eigenschaft besitze: seine Unendlichkeit eben. Aber das ist ein Irrtum, wie man seit Georg Cantor (1845 - 1918), dem Begründer der Mengentheorie, weiß. Er hat gezeigt, dass das Unendliche eine hoch-komplexe Struktur mit bemerkenswerten Eigenschaften besitzt. Diese Eigenschaften sind meist alle logisch problemlos – oft aber sind sie anschaulich nur schwer oder gar nicht akzeptabel.

Diese Kluft zwischen mathematischer Realität und der Anschauung will Prof. Q. nun anhand einiger Eigenschaften der Menge der nicht negativen rationalen Zahlen (kurz: r -Zahlen) aufzeigen. Dabei spielt die „Dichte“ der r -Zahlen in dieser Menge eine Rolle.

Prof. Q: Es sei B die Menge der r -Zahlen $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$ und m, n positive ganze Zahlen, m und n ohne gemeinsamen Teiler $\neq 1$.

Dann gilt die anschaulich unmittelbar einleuchtende Behauptung:

- (1) Die r -Zahlen liegen in B „dicht beieinander“.

Die Mathematiker präzisieren „Dichte“ so:

- (2) Zu jeden zwei r -Zahlen $a, b \in B$ mit $a < b$ gibt es stets eine r -Zahl $c \in B$, so dass $a < c < b$ ist – zum Beispiel ist $c = \frac{a+b}{2}$ eine solche Zahl.

Die Elemente von B erfüllen die Bedingung (2). Damit ist die intuitive Vorstellung von „Dichte“ in (1) in eine mathematische Form gebracht.*

Eine erste anschauliche Anomalie

Jede r -Zahl lässt sich geometrisch so veranschaulichen:

In der Ebene sei eine Halbgerade h mit dem Anfangspunkt O gegeben.** Man ordnet dann einer r -Zahl a denjenigen Punkt von h zu, der den Abstand a von O besitzt. Der so festgelegte Punkt sei der *rationale Punkt* a (kurz: r -Punkt a) genannt und P sei die Menge aller r -Punkte a . Die umkehrbar eindeutige Zuordnung $B \leftrightarrow P$ bewirkt, dass gilt:

- (3) Die r -Punkte liegen in P „dicht beieinander“,
 – was geometrisch bedeutet: „zwischen“ jeden zwei r -Punkten a, b liegt stets ein r -Punkt c , etwa der Punkt, welcher der Zahl $c = \frac{a+b}{2}$ entspricht.

Man kann nun für r -Punkte a, b eine Beziehung „ a vor b “ definieren, die zusammen mit (3) zu einer bemerkenswerten anschaulichen Anomalie führt.

Wegen (3) scheint es ausgeschlossen, dass man die r -Punkte wie Perlen in einer Kette aneinander oder wie Quadratzahlen der Größe nach in eine Liste aufführen kann – mathematisch ausgedrückt: in einer Folge anordnen kann. Und doch ist das möglich!

Prof. Q.: Es sei P_1 die Menge der r -Punkte a von P , die zwischen den Punkten 0 und 1, 1 eingeschlossen, liegen.

Dann ist $a = \frac{1}{1}$ oder $a = \frac{m}{n}$ mit $1 \leq m < n$, m und n ohne gemeinsamen Teiler $\neq 1$.

Wir fassen nun die r -Punkte a mit gleicher Summe $S = m + n$ zusammen zu einer Gruppe G_s und ordnen die Gruppen G_s , $s = 2, 3, 4, \dots$ nach wachsender Größe von s zu einer Folge an. Daraus folgt – da jede Gruppe G_s nur endliche viele Elemente – besitzt:

- (4) Die r -Zahlen aus P_1 sind in einer Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ anordenbar.

Beispiel 1

Aus der folgenden Tabelle liest man ein Anfangsstück der Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ ab.

$S = m + n$	2	3	4	5	6	7	8	...
$\frac{m}{n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...
Gruppe G_s	(a_1)	(a_2)	(a_3)	(a_4, a_5)	(a_6)	(a_7, a_8, a_9)	(a_{10}, a_{11})	...

Damit folgt: $P_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

* Intuition: Das Wesentliche einer Sache unmittelbar durch Anschauung erkennen.

** Die Halbgerade h bezeichnet man üblicher Weise als *Zahlenstrahl*.

Zwei weitere anschauliche Anomalien

Prof. Q: Die r -Punkte b der Menge P , $b = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden $m \geq 1$, $n \geq 1$, können auf die gleiche Weise wie die r -Punkte der Teilmenge P_1 von P nach der Größe der Summen $s = m + n$ in jeweils endliche Gruppen G'_s eingeteilt und diese Gruppen dann in einer Folge angeordnet werden. Daraus folgt:

(5) Die r -Punkte von P sind in einer Folge $b_1, b_2, b_3, \dots$ anordenbar.

Beispiel 2

Ein Anfangsstück der Folge $b_1, b_2, b_3, \dots$

$s = m + n$	2	3	4	5	6	...
$\frac{m}{n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}$	...
Gruppe G'_s	(b_1)	(b_2, b_3)	(b_4, b_5)	(b_6, b_7, b_8, b_9)	(b_{10}, b_{11})	...

Womit folgt: $P = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$.

Die jeder intuitiven geometrischen Vorstellung widersprechende Aussage (5) führt unmittelbar zu einer weiteren viel diskutierten anschaulichen Anomalie. Schreibt man die beiden Folgen aus (4) und (5) so wie in der Figur

$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ \dots$ untereinander, so sieht man, dass für $i = 1, 2, 3, \dots$ gilt:
 $\updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow$ Jedem r -Punkt a_i ist der r -Punkt b_i und umgekehrt
 $b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ \dots$ jedem r -Punkt b_i ist der r -Punkt a_i zugeordnet.

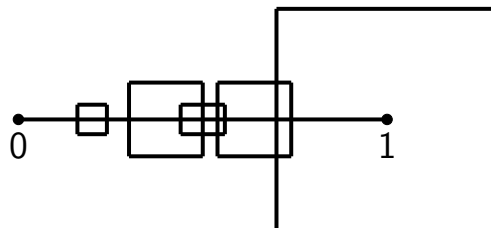
Daraus ergibt sich die unbezweifelbare Aussage, zugleich aber auch die anschauliche Anomalie:

(6) Die Teilmenge P_1 der Punktmenge P enthält gleich viele Punkte wie P .

Noch eine anschauliche Anomalie

Prof. Q.: Es sei T die Teilstrecke der Strecke mit den Endpunkten 0 und 1, in der alle r -Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ von P_1 (vgl. (4)) liegen. Für $i = 1, 2, 3, \dots$ sei a_i der Mittelpunkt eines Quadrates Q_i mit zwei zum Zahlenstrahl parallelen Seiten. Dann gilt:

(7) Für jedes Quadrat Q_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ kann man die Länge l_i seiner Seiten so festlegen, dass die Quadrate Q_i zusammen die Strecke T nicht überdecken.



Nachweis

Vorweg: Für jedes d mit $-1 < d < 1$ gilt $1 + d + d^2 + \dots + d^n = \frac{1-d^{n+1}}{1-d}$ (man sieht dies, wenn man die Gleichung mit $1-d$ multipliziert).

Nun zu (7). Für d sei $0 < d < 1$ und es gelte $l_1 = d, l_2 = d^2, l_3 = d^3, \dots$. Dann ist für jedes $n \geq 1$:

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{n+1} = d(1 + d + d^2 + \dots + d^n) = d \cdot \frac{1 - d^{n+1}}{1 - d}.$$

Wenn n gegen unendlich strebt, dann konvergiert d^{n+1} gegen null. Somit gilt:

$$(8) \quad l = l_1 + l_2 + l_3 + \dots = \frac{d}{1-d}.$$

Ist nun z.B. $d = \frac{1}{11}$, so gilt $l = \frac{1}{10}$ und geometrisch bedeutet das:

Die Quadrate Q_i zusammen überdecken nur 10% der Strecke T der Länge 1 – ein Ergebnis, das wegen (3) im Grunde mit der Anschauung unvereinbar ist.

Die Behauptung (7) trifft immer dann zu, wenn in (8) $l < 1$, also $\frac{d}{1-d} < 1$ und daher $d < \frac{1}{2}$ ist. Sie bleibt sogar gültig für den gesamten Zahlenstrahl. Das ergibt wie oben die Behauptung (7) – man ersetzte dort nur die Folge der r -Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ aus der Strecke T durch die Folge $b_1, b_2, b_3, \dots$ der r -Punkte des ganzen Zahlenstrahls.

Prof. Q.: Die Behauptung (7) und ihre Verallgemeinerung werfen natürlich die Frage auf: Welche Art von Punkten liegen in den von Quadraten nicht überdeckten Lücken der Strecke T und des Zahlenstrahls?

Es sind nicht-rationale Punkte wie $\sqrt{2}$ und π – aber das ist ein anderes, tief liegendes Thema.

Bemerkung

Die anschaulichen Anomalien (4) und (5) gehen zurück auf Überlegungen von Georg Cantor; (6) war allerdings schon Galileo Galilei (1564 - 1642) oder vielleicht auch schon früher bekannt. Und Axel Harnack (1851 - 1888) hat im Jahr 1885 die anschauliche Anomalie (7) entdeckt.

Ein Altersproblem

von Hartwig Fuchs

Ein Lehrer (L) unterhält sich mit seiner Kollegin (K).

L: „Sie haben drei Kinder. Wie alt sind sie?“

K: „Wenn man ihre Alter (in ganzen Jahren) addiert, dann erhält man 13.“

L: „Damit finde ich keine Antwort auf meine Frage.“

K: „Das Produkt der Alter meiner Kinder ist 36.“

L: „Auch damit kann ich das Alter der Kinder nicht bestimmen.“

K: „Mein ältestes Kind hat rote Haare.“

L: „Jetzt weiß ich, was ich wissen wollte.“

Die letzte Aussage von K erlaubt es auch dem Leser, das Alter der Kinder zu bestimmen.

Lösung

Es gibt 14 Kombinationen für die Darstellung von 13 als eine Summe. Für jede dieser Kombinationen ist das Produkt der drei Summanden bestimmbar.

Alter der Kinder

	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4
	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	3	4	5	4
	11	10	9	8	7	6	9	8	7	6	7	6	5	5
II	11	20	27	32	35	36	36	48	56	60	63	72	75	80

Die untere Zeile zeigt das Produkt aus den Altern der einzelnen Kinder.

Die zweite Aussage von K belegt:

Die Kinder sind 1, 6, 6 oder 2, 2, 9 Jahre alt – denn in jedem anderen Fall folgt aus der Tabelle: Das Produkt der Alter ist ungleich 36.

Aus der 3. Aussage von K folgt: Ein Kind ist älter als die beiden Anderen. Also sind die Kinder 2, 2 und 9 Jahre alt.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 158

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Aus Ungleichungen folgen Ungleichungen

Ersetze jeweils mit Begründungen in 1. bis 5. die Kästchen $\square$ durch eines der Symbole $>$, $<$, oder $=$, sodass man jeweils eine wahre Aussage erhält.

1. Aus $x > y$, $y > 0$ folgt $2x + z \square \frac{1}{2}y + z$;

2. aus $x > y$, $z < 0$ folgt $xz \square yz + 1$;

3. aus $x < y < 0$ folgt $x^2 \square y^2$;

4. aus $0 < x < y < 1$ folgt $xy \square \frac{1}{xy}$;

5. aus $x < 1$ folgt $x^3 \square x^2$.

Hinweis: Für Zahlen a, b, c gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ sowie $ac < bc$, falls $c > 0$ und $ac > bc$, falls $c < 0$. (H.F.)

Lösung:

1. $2x + z > \frac{1}{2}y + z$, denn $x > y \Rightarrow 2x + z > 2y + z > \frac{1}{2}y + z$.

2. $xz < yz + 1$, denn aus $z < 0$ und $x > y \Rightarrow xz < yz < yz + 1$.

3. $x^2 > y^2$, denn $-x > 0$, $-y > 0$ und aus $x < y \Rightarrow -x > -y \Rightarrow (-x)^2 = x^2 > (-y)^2 = y^2$.

4. $xy < \frac{1}{xy}$, denn aus $0 < x < 1$ und $0 < y < 1 \Rightarrow 0 < xy < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{xy}$.

5. Es sei $x = 0 \Rightarrow x^3 = x^2$;

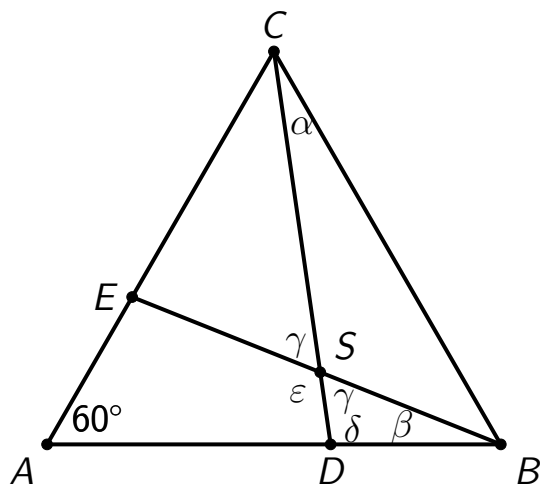
es sei $x < 0 \Rightarrow x^3 < 0$ und $x^2 > 0$, so dass $x^3 < x^2$ ist;

es sei $x > 0$. Aus $x < 1 \Rightarrow x^3 = x^2 \cdot x < x^2 \cdot 1 = x^2$. Also ist $x^3 < x^2$.

II. Winkel gesucht

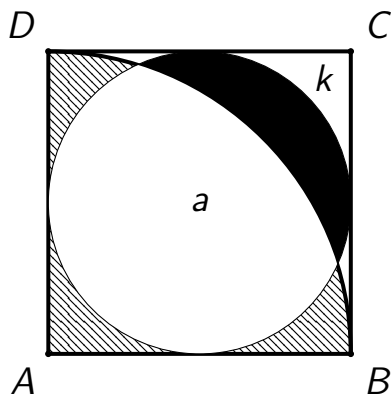
In einem gleichseitigen Dreieck ABC sei ein Punkt D auf der Seite AB und ein Punkt E auf der Seite AC so gewählt, dass $|AE| = |BD|$ ist. Bestimme die Winkel, die die Strecken BE und CD in ihrem Schnittpunkt S bilden. (H.F.)

Lösung:



Die Dreiecke ABE und BCD sind kongruent, da $|AB| = |BC|$ sowie $|AE| = |BD|$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 60^\circ$ (SWS-Satz). Mit den Bezeichnungen der Winkel in der Figur gilt dann: $\alpha = \beta$. Im Dreieck BSD ist dann $\delta = 180^\circ - \gamma - \beta$ und im Dreieck BCD gilt: $\alpha + \delta + 60^\circ = 180^\circ$ und daher $\beta + (180^\circ - \gamma - \beta) + 60^\circ = 180^\circ$. Also ist $\gamma = 60^\circ$ und sein Nebenwinkel $\varepsilon = 120^\circ$.

III. Flächenvergleich - ein anschauliches Paradox



Es sei k der Kreis, der die vier Seiten des Quadrates $ABCD$ von innen berührt, v sei der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $r = |AB|$. Es sei m die Fläche des schwarzen „Mondes“ und s sei die Gesamtfläche der drei schraffierten „Sicheln“. Gilt nun $m > s$ oder $m = s$ oder $m < s$? Begründe deine Entscheidung. (H.F.)

Lösung:

Es sei a die Fläche des zentralen weißen Gebietes. Dann hat der Kreis k die Fläche $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2 = a + m$. Mit $|AB| = r$ gilt daher

$$(1) \quad a + m = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Für die Fläche des Viertelkreises v gilt: $a + s = \frac{1}{4}\pi \cdot |AB|^2$, so dass

$$(2) \quad a + s = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2$$

gilt, Aus (1) und (2) ergibt sich: $m=s$.

IV. Ziffernvertauschung

Wenn man bei 2-ziffrigen natürlichen Zahlen die Ziffern vertauscht, dann sind einige der neuen Zahlen größer als die alten Zahlen – z.B. erhält man aus 45 die Zahl 54. Wie oft kommt das vor bei Vertauschung der Ziffern der 10, 11, 12, ..., 99 ? (H.F.)

Lösung:

Es sei $A(10 \leq n \leq 99)$ die Anzahl der neuen Zahlen, die größer als die alten Zahlen n sind, $10 \leq n \leq 99$.

Es gilt

$$A(10 \leq n \leq 19) = 8, A(20 \leq n \leq 29) = 7, A(30 \leq n \leq 39) = 6, \dots,$$

$$A(80 \leq n \leq 89) = 1 \text{ und } A(90 \leq n \leq 99) = 0 \Rightarrow$$

$$A(10 \leq n \leq 99) = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.$$

V. Summendarstellung von Primzahlen

Bilde aus den Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots, 12, 13$

- a) 7 zweigliedrige Summen, die sechs verschiedene Primzahlen darstellen;
- b) 2 Summen, welche die kleinstmögliche und die größtmögliche Primzahl ergeben.

(H.F.)

Lösung:

a) $0 + 13 = 13, 1 + 6 = 7, 2 + 3 = 5, 4 + 7 = 11, 5 + 8 = 13, 9 + 10 = 19, 11 + 12 = 23$

b) $1 + 2 + 3 + \dots + 13 = 91$. Weil $91 - 2 = 89$ und 89 eine Primzahl ist, gilt: die größtmögliche Primzahl ist $1 + 3 + 4 + \dots + 12 + 13 = 89$ und die kleinstmögliche Primzahl ist $0 + 2 = 2$.

VI. Divisionsrest 1

Welches ist die kleinste positive ganze Zahl n , die bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 jeweils den Rest 1 übrig lässt? (H.F.)

Lösung:

Die Zahl $k = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ ist durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 ohne Rest teilbar. Gleiches gilt dann für $m = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$.

Daher erfüllt jede Zahl $n = a \cdot 2520 + 1$, $a = 1, 2, 3, \dots$ (und nicht nur diese) die vorgegebenen Bedingungen.

Für $a = 1$ ergibt sich dann die gesuchte kleinste Zahl $n = 2521$.

VII. Ein Produkt und einige seiner Teiler

Für jede natürliche Zahl n , $n \geq 1$, gilt: Das Produkt

$$P_n = (n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n)$$

mit $P_1 = 2$, $P_2 = 3 \cdot 4$ und so weiter hat die Teiler 2^m mit $m = 1, 2, 3, \dots, n$ und $\frac{P_n}{2^n}$ ist dabei immer eine ungerade Zahl.

Zeige dies.

(H.F.)

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{P_n}{2^n} &= \frac{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n)}{2^n} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1) \dots (2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot 2^n} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. November 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Gekürzte rationale Zahlen

Eine rationale Zahl $\frac{x}{y}$, wobei x und y natürliche Zahlen sind, nennen wir *gekürzt*, wenn 1 der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.

Wie viele rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ gibt es, für die gilt: $x > 0$, $y > 0$ und $x + y = 90$?
(H.F.)

II. Ziffernsumme

Wie groß ist die Summe der **Ziffern** aller Zahlen

- a) von 0 bis 100 ?
- b) von 0 bis 1000

(H.F.)

III. Eine Aufgabe von Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci (1452 - 1519), der große Künstler und erfindungsreiche Konstrukteur mechanischer Maschinen, interessierte sich sehr für die Mathematik. Die folgende Aufgabe stammt von ihm.

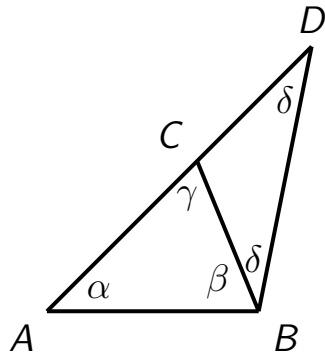
Gegeben seien zwei kongruente Kreise, die sich in den Punkten P und Q schneiden, $P \neq Q$.

Dann ist jeder Punkt der Geraden durch P und Q gleich weit von den Mittelpunkten M_1 und M_2 der beiden Kreise entfernt.

Begründe, dass Leonardo Recht hat.

(H.F.)

IV. Stumpfwinkliges Dreieck



Es sei ABC ein beliebiges, jedoch nicht gleichschenkeliges Dreieck mit $|AC| > |BC|$. Man verlängere AC über C hinaus bis zu einem Punkt D , wobei $|CD| = |BC|$ sei.

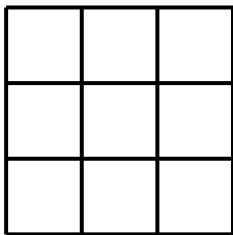
a) Zeige: $\delta = \frac{1}{2}\gamma$

b) Zeige nun: Der Winkel $\sphericalangle ABD$ ist größer als 90° .

Hinweis: Im Dreieck gilt: der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

(H.F.)

V. Bunte Quadrate



Neun gleich große Quadrate seien wie in der Figur angeordnet. Färbe jedes Quadrat mit einer der Farben schwarz (S), weiß (W) oder grau (G), so dass gilt:

- jedes schwarze Quadrat hat mit genau einem grauen Quadrat,
- jedes graue Quadrat hat mit genau einem weißen Quadrat,
- jedes weiße Quadrat hat mit genau einem schwarzen Quadrat,

jeweils genau eine Seite gemeinsam.

(H.F.)

VI. Besondere Quadratzahlen

Bestimme rechnerisch alle vierstelligen Quadratzahlen, deren ersten beiden und letzten beiden Ziffern übereinstimmen. Gesucht sind also alle Quadratzahlen mit der Form $xyxy$.

(Wolfgang J. Bühler)

VII. Anzahl von Teilern

Es sei p eine Primzahl. Bestimme die Anzahl der Teiler von $20p$.

Hinweis: Unterscheide die Fälle $p = 2, 3, 5$ und $p \geq 7$.

(H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

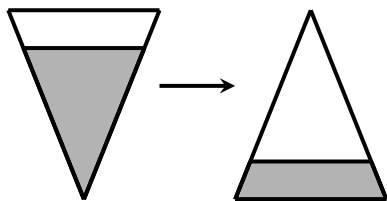
- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. November 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1352: Gleichung mit 3er-Potenzen

Finde alle reellen Lösungen der Gleichung $3^{3x} + 3^{2x} + 3^x = 39$.

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1353: Wasser im Kegel



Ein 8cm hohes kegelförmiges Gefäß (Spitze unten, siehe Bild) ist bis 1 cm unter dem oberen Rand mit Wasser gefüllt. Nun deckt man die obere Gefäßfläche dicht ab und dreht das Gefäß um.

Wie hoch ist jetzt das Gefäß mit Wasser gefüllt?

(Klaus Ronellenfitsch)

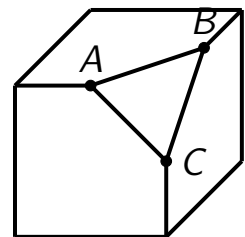
Bemerkung: Es fällt vielleicht auf, dass der Radius des kegelförmigen Gefäßes nicht angegeben ist. Er spielt aber beim Ergebnis keine Rolle, da er sich bei der Bestimmungsgleichung der Höhe h herauskürzt. Hinweis: Verwende die Strahlensätze.

Aufgabe 1354: Abgeschnittener Würfel

Welcher Bruchteil des Würfels ist abgeschnitten, wenn die Punkte A , B und C jeweils die Mittelpunkte der Kanten sind?

Hinweis: Kopfrechnen reicht, Taschenrechner wird nicht gebraucht.

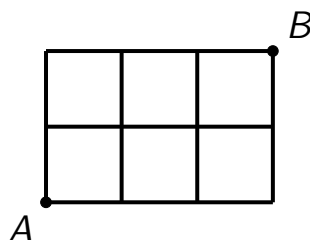
(Christoph Sievert)



Aufgabe 1355: Rundwanderwege

Das Wegenetz zeigt verschiedene Wege von A nach B .

a) Wie viele kürzeste „Rundwanderwege“ gibt es von A nach B und wieder zurück nach A ?



b) Wie viele „Rundwanderwege ohne Wegwiederholung“ gibt es, wenn beim Rückweg kein auf dem Hinweg bereits gegangener Teilweg nochmals gegangen werden darf?

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1356: Durch 33 teilbar

Die sechsstellige Zahl 132312 enthält je zweimal die Ziffern 1, 2 und 3.

- Wie viele solcher Zahlen gibt es?
- Wie viele davon sind durch 33 teilbar?

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1357: Schubladen-Beweis

Unter sechs verschiedenen positiven ganzen Zahlen größer gleich Null gibt es ein Zahlenpaar, dessen Summe oder Differenz durch 9 teilbar ist. Zeige dies. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 158

Klassen 9–13

Aufgabe 1345: Ein altes Problem

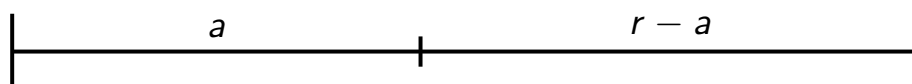
Gegeben ist eine Strecke r .

- Teile diese Strecke in zwei Teile, so dass das Produkt der Teilstücke maximal wird.
- Teile diese Strecke in drei Teile, so dass das Produkt der Teilstücke maximal wird.

(Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:

- Betrachten wir zunächst den Fall, dass r in zwei Teile geteilt wird.
Behauptung: Das Produkt der Teilstücke wird dann maximal, wenn die Strecke halbiert wird.



Zu zeigen:

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 > a(r - a) \quad \text{mit } a < r \text{ und } a \neq \frac{r}{2}$$

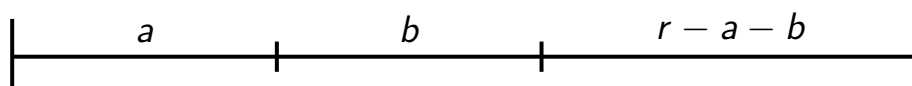
$$\frac{r^2}{4} > ar - a^2$$

$$r^2 - 4ar + 4a^2 > 0$$

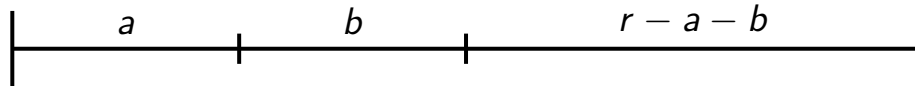
$$(r - 2a)^2 > 0$$

stets wahr, außer für $a = \frac{r}{2}$ (siehe oben).

- Betrachten wir nun den Fall, dass eine Strecke in drei Teile geteilt wird.



Wie im ersten Fall zu sehen wird das Produkt aus a und b maximal, wenn a gleich b ist:



Zu zeigen:

$$\left(\frac{r}{3}\right)^3 > a^2(r - 2a) \quad \text{mit } a < r \text{ und } a \neq \frac{r}{3}$$

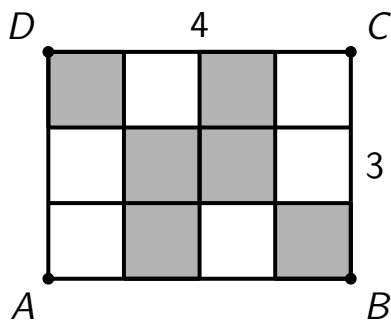
$$\frac{r^3}{27} > a^2r - 2a^3$$

$$r^3 - 27a^2r + 54a^3 > 0$$

$$(r - 3a)^2(r + 6a) > 0$$

stets wahr, außer für $a = \frac{r}{3}$ (siehe oben).

Aufgabe 1346: Färbung eines Rechtecks

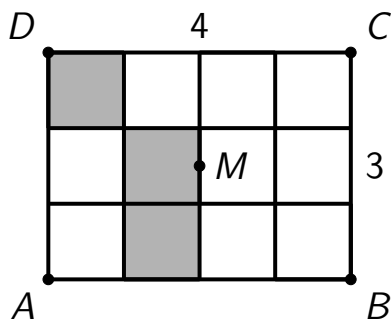


Ein Rechteck R mit den Seitenlängen 4 und 3 ist in Einheitsquadrate unterteilt. Diese sollen rot oder blau gefärbt werden, wobei jede Farbe mindestens einmal vorkommen soll.

Wie viele punktsymmetrische verschiedene Färbungsmuster sind möglich?

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:



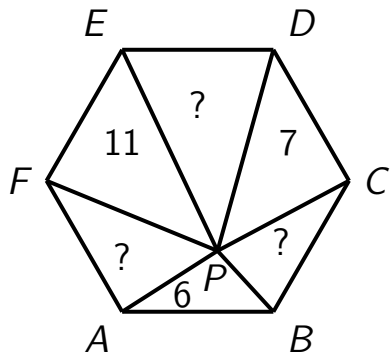
Betrachte das halbe Rechteck R^* mit den Seitenlängen 2 und 3. Jede Färbung von R^* ergibt durch Punktspiegelung am Mittelpunkt M von R eine Färbung des ganzen Rechtecks R . R^* hat $k = 6$ Felder. Wir betrachten alle möglichen Blaufärbungen von R^* (dann sind die restlichen Felder rot gefärbt). Dafür gibt es (da blau mindestens einmal und höchstens $k - 1$ mal vorkommt)

$\binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k-1}$ Möglichkeiten.

Da $\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = 2^k$ ist (siehe eine Formelsammlung), ist die gesuchte Anzahl $2^k - \binom{k}{0} - \binom{k}{k} = 2^k - 1 - 1 = 2^k - 2$.

Das Rechteck besitzt also $2^6 - 2 = 62$ punktsymmetrische Färbungsmuster.

Aufgabe 1347: Flächeninhalte im Dreieck



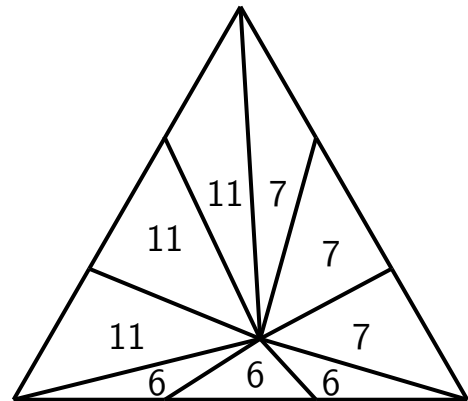
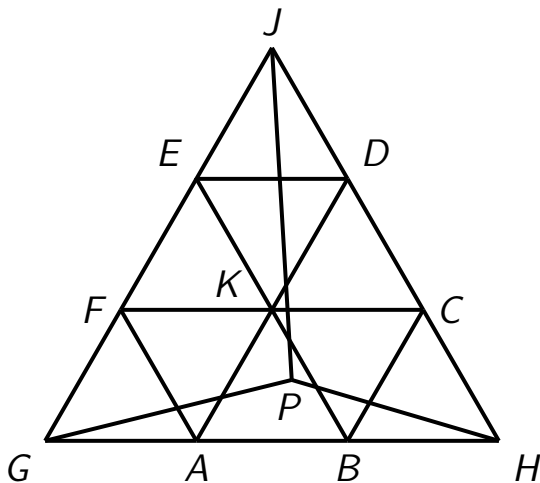
In einem regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ ist P ein innerer Punkt des Sechsecks. Verbindet man P mit den Ecken, so entstehen sechs Dreiecke, von denen drei Flächeninhalte angegeben sind.

Wie groß sind die anderen drei Flächeninhalte?

Hinweis: Eine Strategie wäre das Sechseck in ein gleichseitiges Dreieck einzubetten.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:



Bettet man das Sechseck in ein gleichseitiges Dreieck GHJ ein, so enthält dieses neun gleichseitige und kongruente Dreiecke GAF , AKF , ABK usw.

Zieht man nun die Verbindungsstrecken von P zu den Eckpunkten des Sechsecks und den Eckpunkten des großen Dreiecks, so entstehen neun Dreiecke, von denen je drei den gleichen Flächeninhalt haben (gleiche Grundseite und Höhe). Also hat das große Dreieck den Flächeninhalt $(6 + 7 + 11) \cdot 3 = 72$ und jedes der neun kongruenten Teildreiecke den Flächeninhalt $\frac{72}{9} = 8$. Daher hat Dreieck BCP den Flächeninhalt $6 + 7 - 8 = 5$, das Dreieck DEP hat den Flächeninhalt $11 + 7 - 8 = 10$ und das Dreieck FAP hat den Flächeninhalt $11 + 6 - 8 = 9$.

Aufgabe 1348: Mathematischer Ausflug in die USA

Auf wie viele Arten kann man unter Verwendung aller Buchstaben von

a) FLORIDA ...

b) TENNESSEE ...

... „Wörter“ (auch unsinnige wie EEEENNSST) bilden? (Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

- a) Besteht ein Wort aus n verschiedenen Buchstaben, so kann der erste Buchstabe an n verschiedenen Plätzen im Wort stehen, der zweite nur noch an $n - 1$ Plätzen, der dritte nur noch an $n - 2$ Plätzen usw. Insgesamt gibt es hierfür $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ („ n Fakultät“) Möglichkeiten. Dies ist bei dem Wort FLORIDA mit 7 verschiedenen Buchstaben der Fall. Also kann man mit den Buchstaben von FLORIDA $7! = 5.040$ „Wörter“ bilden.
- b) Kommt in einem Wort mit n Buchstaben der gleiche Buchstabe k -mal vor, so gibt es für diese k Plätze im Wort $k!$ Vertauschungsmöglichkeiten. Also ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch $k!$ zu teilen. Bei dem Wort TENNESSEE mit 9 Buchstaben kommt E viermal vor, N zweimal, S zweimal und T einmal. Also kann man mit den Buchstaben von TENNESSEE $\frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = 3.780$ „Wörter“ bilden.

Aufgabe 1349: Augensumme zweier Spielwürfel

Zwei Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen. Beide Spielwürfel besitzen sechs Seiten mit den natürlichen Zahlen eins bis sechs aufgedruckt.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme der beiden geworfenen Würfel größer als sieben ist?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht man mindestens, mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens drei Würfe der beiden Würfel, bis die geworfene Augensumme erstmals größer als sieben zeigt.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

- a) Augensumme acht bedeutet (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (fünf Ergebnisse); Augensumme neun bedeutet (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) (vier Ergebnisse), Augensumme zehn bedeutet (4, 6), (5, 5), (6, 4) (drei Ergebnisse), Augensumme elf bedeutet (5, 6), (6, 5) (zwei Ergebnisse) und Augensumme zwölf bedeutet (6, 6) (ein Ergebnis). Da es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Ergebnisse gibt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0,42$.
- b) Man braucht mindestens drei Würfe, wenn bei den ersten beiden Würfeln die Augensumme nicht größer als sieben ist. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{95}{144} \approx 0,66$.
Man braucht höchstens drei Würfe, wenn die Augensumme schon beim ersten oder beim zweiten oder beim dritten Wurf größer als sieben ist. Dafür ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \left(1 + \frac{7}{12} + \frac{49}{144}\right) = \frac{1385}{1728} \approx 0,80$.

Aufgabe 1350: Quadratzahl

Zeige: Für jede positive ganze Zahl n ist

$$n \cdot (n + 2) \cdot (n + 4) \cdot (n + 6) + 16$$

eine Quadratzahl.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

1. Möglichkeit

Löst man bei $f(n) = n \cdot (n + 2) \cdot (n + 4) \cdot (n + 6) + 16$ alle Klammern auf, so erhält man: $f(n) = n^4 + 12n^3 + 44n^2 + 48n + 16$. Der Anfang und das Ende dieses Terms legen es nahe, $f(n)$ mit $g(n) = (n^2 + an + 4)^2$ gleichzusetzen. Berechnet man $g(n)$, so erhält man: $g(n) = n^4 + 2an^3 + (8 + a^2)n^2 + 8an + 16$. Ein Koeffizientenvergleich mit $f(n)$ ergibt: $2a = 12$, $8 + a^2 = 44$ und $8a = 48$. Alle drei Gleichungen ergeben $a = 6$, also ist $f(n) = (n^2 + 6n + 4)^2$.

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned} f(n) &= n \cdot (n + 2) \cdot (n + 4) \cdot (n + 6) + 16 \\ &= (n \cdot (n + 6)) \cdot ((n + 2) \cdot (n + 4)) + 16 \\ &= (n^2 + 6n) \cdot (n^2 + 6n + 8) + 16 \end{aligned}$$

Für $x = n^2 + 6n$ ist

$$\begin{aligned} f(n) &= x \cdot (x + 8) + 16 \\ &= x^2 + 8x + 16 \\ &= (x + 4)^2 \\ &= (n^2 + 6n + 4)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1351: Teilbarkeit durch 7

Man schreibe unter die Ziffern einer Zahl von rechts her, das heißt beginnend mit der Einerziffer,

1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, ..., multipliziere dann übereinanderstehende Ziffern und addiere die Reste bei Division durch sieben. Zeige

- a) Ist das Ergebnis durch sieben teilbar, so auch die ursprüngliche Zahl.
- b) Es gilt sogar: Der Rest bei Division durch sieben ist der gleiche bei diesem Ergebnis und bei der ursprünglichen Zahl.

(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

- a) Die Lösung von Aufgabenteil a) folgt aus der Lösung von Aufgabenteil b), deshalb wird hier nur ein Beispiel betrachtet.

$$\begin{array}{r}
 6835764203 \\
 6231546231 \\
 \hline
 1225033403
 \end{array}$$

Hier haben wir in der dritten Zeile gleich die Siebener-Reste der Produkte notiert, Es ist dann

$$1 + 2 + 2 + 5 + 0 + 3 + 3 + 4 + 0 + 3 = 23 = 3 \cdot 7 \text{ Rest } 2 \text{ und}$$

$$6835764203 : 7 = 976537743 \text{ Rest } 2.$$

Anmerkung

Der Rest ist die Einerstelle in der Darstellung der Zahl im System mit der Basis sieben.

b) Die Reste bei Division durch sieben von 1, 10, 100, ... sind 1, 3, 5, 4, 6, 2, 1, 3, ...

Deshalb hat

$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + \dots$ (im Dezimalsystem geschrieben als $\dots a_3 a_2 a_1 a_0$)
den gleichen Siebenerrest wie $1 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2 + 4 \cdot a_3 + \dots$

Lösung der Aufgabe aus Artikel Heron-Dreiecke (S. 7)

Es sei n ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von u und v . Man erhält dann die gesuchte Regel, wenn man in den Gleichungen (2) $k = n$ setzt.

Beispiel

Das kleinste gemeinsame Vielfache von $u = 5$ und $v = 2$ ist 10. Setzt man daher in (2) $k = 10$, so erhält man das Heron-Dreieck mit $a = 52$, $b = 25$, $c = 63$, $s = 140$ und $f = 630$.

Bundeswettbewerb Mathematik Zweite Runde 2024

von Stefan Kermer, Volker Priebe und Bastian Schneider

Aufgabe 1

Bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen, die die Gleichung $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen.

Behauptung

Die einzige Lösung ist $(x, y) = (-1, 0)$.

Beweis

Die linke Seite der Gleichung in der Aufgabenstellung lässt sich umformen zu

$$(x+2)^4 - x^4 = 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = (2x+2)^3 + 4 \cdot (2x+2),$$

das heißt, für ein Paar (x, y) ganzer Zahlen, die die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllen, ist das Paar (y, z) mit $z := 2x + 2$ eine Lösung der Gleichung

$$y^3 = z^3 + 4z \quad \text{für Paare } (y, z) \text{ ganzer Zahlen.} \quad (1.1)$$

Wir bestimmen zunächst alle Paare (y, z) ganzer Zahlen, die (1.1) erfüllen, und überprüfen anschließend, welche davon Paaren (x, y) ganzer Zahlen entsprechen, die die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllen.

Es gibt keine Paare (y, z) ganzer Zahlen mit $z \neq 0$, die Lösungen von (1.1) sind; wir unterscheiden zum Nachweis zwei Fälle: Für $z \geq 1$ folgt aus (1.1), dass $y^3 \geq z^3 + 4 > z^3$, damit muss für eine Lösung (y, z) ganzer Zahlen von (1.1) aus Monotoniegründen $y > z$ gelten, also $y \geq z + 1$, und

$$y^3 - z^3 \geq (z+1)^3 - z^3 = 3z^2 + 3z + 1 > 6z > 4z.$$

Analog folgt für $z \leq -1$ aus (1.1), dass $y^3 \leq z^3 - 4 < z^3$, damit muss für eine Lösung (y, z) ganzer Zahlen von (1.1) aus Monotoniegründen gelten, dass $y < z$, also $y \leq z - 1$, und

$$y^3 - z^3 \leq (z-1)^3 - z^3 = -3z^2 + 3z - 1 \leq 6z - 1 < 4z.$$

Ist $z = 0$, so muss in (1.1) auch $y = 0$ gelten. Das heißt, das Paar $(0, 0)$ ist die einzige Lösung von (1.1). Es kann damit auch höchstens eine Lösung (x, y) der Gleichung der Aufgabenstellung geben.

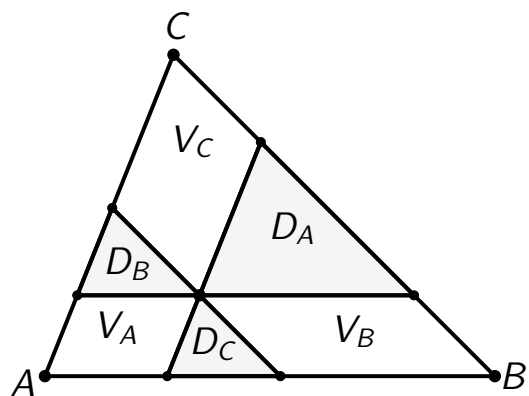
Das Tupel $(y, z) = (0, 0)$ entspricht dem Tupel $(x, y) = (-1, 0)$, und man rechnet schnell nach, dass $(x, y) = (-1, 0)$ die Gleichung der Aufgabenstellung tatsächlich erfüllt. $\square$

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Durch jeden Punkt P im Inneren des Dreiecks können die Parallelen zu den drei Seiten des Dreiecks gezeichnet werden. Diese zerlegen das Dreieck $\triangle ABC$ in drei Dreiecke und drei Vierecke.

Dasjenige Viereck, das A als Eckpunkt besitzt, habe den Flächeninhalt V_A und dasjenige Dreieck, bei dem eine Seite auf der Strecke BC liegt, habe den Flächeninhalt D_A . Analog sind V_B und D_B bzw. sind V_C und D_C definiert.

Bestimme die Menge aller Werte, die der Term $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ annehmen kann, wenn P im Inneren von Dreieck $\triangle ABC$ variiert.

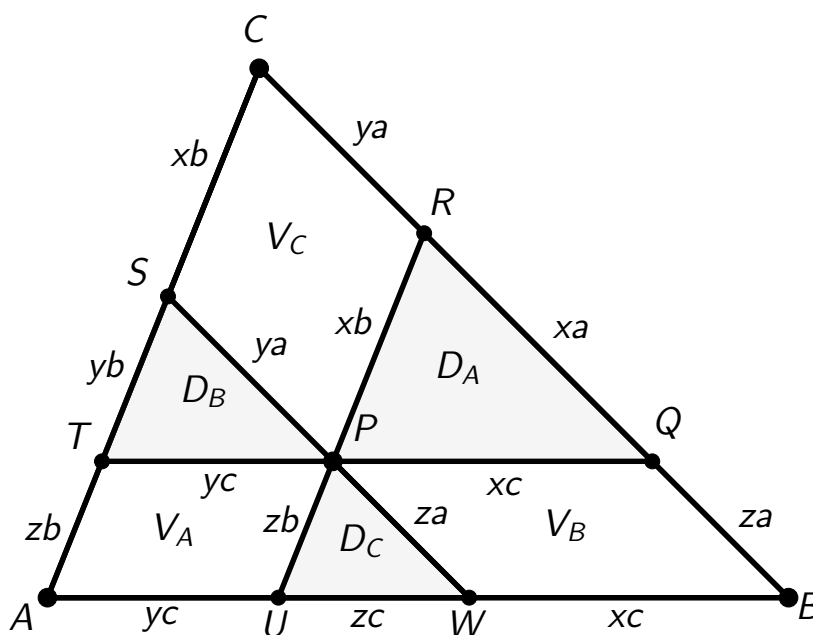


Behauptung

Wenn der Punkt P im Inneren von Dreieck $\triangle ABC$ variiert, kann der Term $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ als Wert alle reelle Zahlen annehmen, die größer oder gleich $\frac{3}{2}$ sind.

Beweis (ähnliche Dreiecke)

Über die Bezeichnungen in der Aufgabenstellung hinaus seien die Punkte, in denen die Parallele zu einer Seite des Dreiecks die beiden anderen Dreiecksseiten schneidet, wie in Skizze 3.1 mit Q, R, S, T, U, W bezeichnet; außerdem seien im Dreieck $\triangle ABC$ die Seitenlängen mit $\overline{BC} =: a$, $\overline{CA} =: b$ und $\overline{AB} =: c$ abgekürzt.



Skizze 3.1: Folgerungen aus den Ähnlichkeitsbeziehungen

Auf Grund der Parallelitätsbeziehungen $(WS) \parallel (BC)$, $(RU) \parallel (CA)$, $(QT) \parallel (AB)$ sind die Dreiecke $\triangle PQR$, $\triangle TPS$ bzw. $\triangle UWP$ jeweils ähnlich zum Dreieck $\triangle ABC$ (Ähnlichkeitssatz $W : W : W$). Aus der Ähnlichkeit von $\triangle PQR$ und $\triangle ABC$ folgern wir, dass

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} =: x \Leftrightarrow \overline{QR} = xa, \overline{RP} = xb, \overline{PQ} = xc \quad \text{mit } 0 < x < 1, \quad (3.1)$$

und weil die Vierecke $\square PRCS$ bzw. $\square WBQP$ auf Grund der Parallelitätsbeziehungen Parallelogramme sind, folgt aus (3.1), dass ebenfalls

$$\overline{CS} = xb \quad \text{bzw.} \quad \overline{WB} = xc. \quad (3.2)$$

Analog schließen wir aus der Betrachtung der Ähnlichkeit von $\triangle TPS$ und $\triangle ABC$ mit $y := \overline{ST} : \overline{CA}$ bzw. $\triangle UWP$ und $\triangle ABC$ mit $z := \overline{UW} : \overline{AB}$, dass

$$\overline{PS} = \overline{RC} = ya, \overline{ST} = yb, \overline{TP} = \overline{AU} = yc \quad \text{mit } 0 < y < 1 \text{ bzw.}$$

$$\overline{WP} = \overline{BQ} = za, \overline{PU} = \overline{TA} = zb, \overline{UW} = zc \quad \text{mit } 0 < z < 1; \quad (3.3)$$

siehe Skizze 3.1. Wir folgern aus (3.1) und (3.3), dass für die Summe von x, y, z notwendig

$$x + y + z = \frac{xa + ya + za}{a} = \frac{\overline{QR} + \overline{RC} + \overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = 1 \quad (3.4)$$

gilt. Und umgekehrt: Zu jedem Tripel (x, y, z) positiver reeller Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ existiert ein Punkt P im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$, so dass (3.1), (3.2) und (3.3) erfüllt sind. Denn es lassen sich nach Voraussetzung Punkte Q, R auf BC wählen, so dass $\overline{BQ} = za, \overline{QR} = xa, \overline{RC} = ya$. Die Parallele zu AB durch Q möge CA im Punkt T schneiden, die Parallele zu CA durch R möge AB im Punkt U schneiden und P sei der Schnittpunkt von QT und RU , der im Inneren von $\triangle ABC$ liegen muss. Definieren wir zudem die Punkte S bzw. W als Schnittpunkt der Parallele zu BC durch P mit CA bzw. AB , so folgt aus dem Ähnlichkeitssatz $W : W : W$, dass (3.1), (3.2) und (3.3) erfüllt sind.

Wir betrachten nun den Term $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ der Aufgabenstellung. Mit (3.1), (3.2) und (3.3) können wir schließen, dass wegen $\sphericalangle QPR = \sphericalangle TPU$ (Gegenwinkel)

$$\frac{D_A}{V_A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{RP} \cdot \overline{PQ} \cdot \sin(\sphericalangle QPR)}{\overline{TP} \cdot \overline{PU} \cdot \sin(\sphericalangle TPU)} = \frac{x^2 bc}{2yzbc} = \frac{x^2}{2yz},$$

und durch analoge Schlüsse folgt

$$\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C} = \frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2zx} + \frac{z^2}{2xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz}. \quad (3.5)$$

Für den Term in (3.5) stellen wir fest: Auf Grund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der positiven reellen Zahlen x^3, y^3, z^3 ist

$$\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz} \geq \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3}}{2xyz} = \frac{3}{2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y = z = \frac{1}{3}$ (der Punkt P ist dann der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$). Der Term in (3.5) kann beliebig groß werden. Für eine positive reelle Zahl N sei $\nu := \frac{N}{1+2N} = \frac{1}{2+N^{-1}}$; es ist dann ν eine positive reelle Zahl mit $0 < 2\nu < 1$. Mit P_ν bezeichnen wir den Punkt im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$, der zu den positiven reellen Zahlen $x = y = \nu$ und $z = 1 - 2\nu$ mit $x + y + z = 1$ gehört. Für P_ν ist

$$\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C} = \frac{\nu^3 + \nu^3 + (1 - 2\nu)^3}{2\nu^2(1 - 2\nu)} = \frac{\nu}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - 2\nu}{\nu} \right)^2 = N + \frac{1}{2N^2}. \quad (3.6)$$

Der Term rechts in (3.6) ist für positive reelle Zahlen N als Summe zweier wohldefinierter stetiger Funktionen in N selbst eine stetige Funktion in N , die

für $N = 1$ den Wert $\frac{3}{2}$ annimmt und in $N \geq 1$ stets einen Wert größer als N annimmt, die Werte also beliebig groß werden können. Nach dem Zwischenwertsatz und (3.6) nimmt $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ als Wert alle reellen Zahlen an, die größer oder gleich $\frac{3}{2}$ sind.

Das beweist die Behauptung. □

Bemerkung

Die Parametrisierung aus Skizze 3.1 erlaubt weitere interessante Aussagen für die Konstruktion der Aufgabenstellung. Für einen beliebigen Punkt P im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ ist wegen (3.4) stets

$$\frac{\overline{WS}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{RU}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{TQ}}{\overline{AB}} = \frac{(y+z)a}{a} + \frac{(z+x)b}{b} + \frac{(x+y)c}{c} = 2(x+y+z) = 2.$$

Aufgabe 4

Im Land Sikinien gibt es 2024 Städte. Zwischen manchen von ihnen gibt es direkte, in beiden Richtungen nutzbare Flugverbindungen. Dabei hat keine Stadt mit allen 2023 anderen Städten eine direkte Flugverbindung. Es ist aber bekannt, dass für eine bestimmte positive ganze Zahl n gilt: Zu beliebigen n Städten in Sikinien gibt es stets eine andere Stadt, die mit jeder dieser n Städte eine direkte Flugverbindung hat.

Bestimme den größten Wert, den n unter dieser Bedingung annehmen kann.

Behauptung

Der größte Wert, den n unter diesen Bedingungen annehmen kann, ist $n = 1011$.

Beweis

Wir betrachten allgemeiner die Situationen, dass es für eine positive ganze Zahl m im Land Sikinien $2m$ Städte gibt und zwischen manchen von ihnen direkte, in beide Richtungen nutzbare Flugverbindungen. Dabei hat keine Stadt mit allen $2m - 1$ anderen Städten eine direkte Flugverbindung. Aber für eine bestimmte positive ganze Zahl n gilt, dass es zu beliebigen n Städten in Sikinien stets eine andere Stadt gibt, die mit jeder dieser n Städte eine direkte Flugverbindung hat. Wir werden zeigen, dass n unter diesen Bedingungen höchstens den Wert $m - 1$ annehmen kann.

Wir zeigen zunächst durch Widerspruch, dass unter der Bedingung der (verallgemeinerten) Aufgabenstellung $n \leq m - 1$ gelten muss. Wir nehmen an, dass n unter der Bedingung der (verallgemeinerten) Aufgabenstellung einen Wert annehmen kann, der größer oder gleich m ist. Dann gilt auch, dass es zu beliebigen m Städten in Sikinien stets eine andere Stadt gibt, die mit jeder dieser m Städte eine direkte Flugverbindung hat.

Sei s_0 eine beliebige, aber fest gewählte Stadt in Sikinien. Wir wählen $m - 1$ weitere beliebige Städte aus. Zu diesen insgesamt m Städten existiert nach Voraussetzung eine andere Stadt s_1 , die mit jeder dieser m Städte eine direkte

Flugverbindung hat, also auch zu s_0 . Auch die Stadt s_1 sei von nun an fest gewählt. Im nächsten Schritt ergänzen wir s_0, s_1 um $m - 2$ weitere beliebige Städte. Zu diesen insgesamt m Städten existiert nach Voraussetzung einer andere Stadt s_2 (ungleich s_0, s_1), die mit jeder dieser m Städte eine direkte Flugverbindung hat; auch s_2 sei von nun an fest gewählt. Indem man diese Schritte entsprechend wiederholt, gelangt man zu einer Menge von m Städten $s_i, 0 \leq i \leq m - 1$, die paarweise verschieden sind. Die Konstruktion stellt sicher, dass je zwei von ihnen eine direkte Flugverbindung haben: Denn für zwei Indizes i, j mit $0 \leq i < j \leq m - 1$ wurde s_j so gewählt, dass es eine direkte Flugverbindung mit jeder Stadt in einer Menge von m Städten hat, die s_i enthält, und Flugverbindungen sind in beide Richtungen nutzbar.

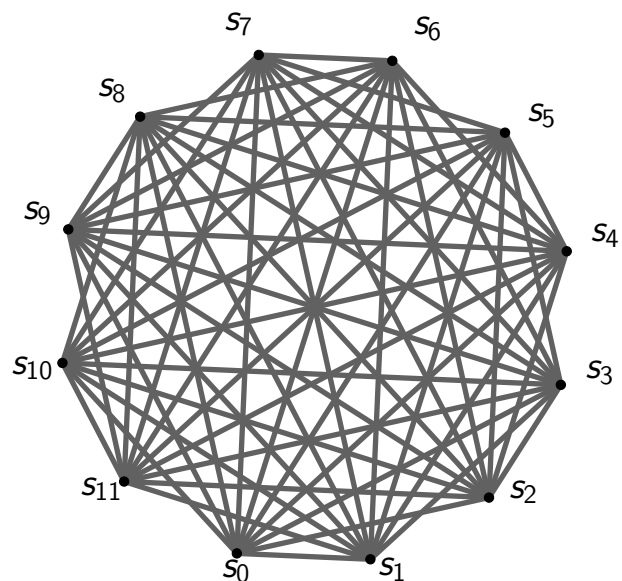
Wir betrachten nun die Menge T all der Städte in Sikinien, die nicht in $\{s_0, s_1, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}\}$ enthalten sind; dies sind $2m - m = m$ Städte. Für diese m Städte in T existiert eine andere Stadt t , die mit allen Städten in T eine direkte Flugverbindung hat. Nach Konstruktion ist t eine der Städte $s_i, 0 \leq i \leq m - 1$, und gemäß der Beobachtung aus dem vorigen Absatz hat t auch mit allen Städten $s_i, 0 \leq i \leq m - 1, s_i \neq t$, eine direkte Flugverbindung. Die Stadt t hat also mit allen anderen Städten eine direkte Flugverbindung – ein Widerspruch zur Bedingung der (verallgemeinerten) Aufgabenstellung. Das beweist, dass $n \leq m - 1$ gelten muss.

Wir geben abschließend ein Beispiel für Flugverbindungen zwischen den $2m$ Städten in Sikinien, bei denen keine Stadt direkte Flugverbindungen zu allen anderen Städten hat und die Bedingung der Aufgabenstellung für $n = m - 1$ erfüllt ist. Wir bezeichnen die Städte in Sikinien als s_i mit Indizes $i, 0 \leq i \leq 2m - 1$. Genau m Städte in Sikinien haben also einen ungeraden bzw. geraden Index; es seien zudem $s_{2m} := s_0$ und $s_{-1} := s_{2m-1}$.

Eine beliebige Stadt s_i in Sikinien mit ungeradem Index i möge eine direkte Flugverbindung zur Stadt s_j genau dann haben, wenn j ein ungerader Index, $j \neq i$, oder ein gerader Index, $j \neq i + 1$, ist; eine direkte Flugverbindung existiert also zu $2(m - 1) < 2m - 1$ Städten.

Da Flugverbindungen in beide Richtungen nutzbar sind, hat eine Stadt s_i mit geradem Index i nach der vorigen Definition zu den $m - 1$ Städten

s_j mit ungeradem Index $j, j \neq i - 1$, eine direkte Flugverbindung; sie möge zusätzlich eine direkte Flugverbindung zu allen $m - 1$ anderen Städten s_j mit



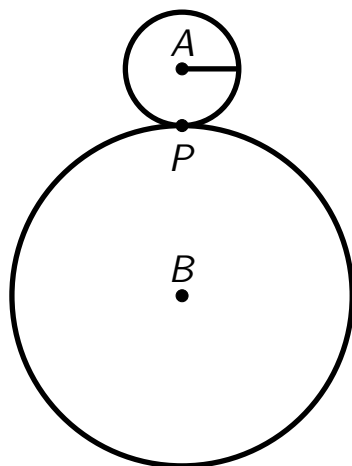
geradem Index j , $j \neq i$, haben. Eine beliebige Stadt s_i mit geradem Index i hat also direkte Flugverbindungen zu $2(m-1) < 2m-1$ anderen Städten. Die Skizze zeigt die Flugverbindungen für den Fall $m=6$.

Wir betrachten die m Teilmengen $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, ..., $\{2m-3, 2m-2\}$, $\{2m-1, 0\}$ der Indizes aller Städte in Sikinien. Für eine beliebige Menge S , die $n = m-1$ Städte in Sikinien umfasst, gibt es mindestens eine dieser 2-elementigen Teilmengen $\{2k-1, 2k\}$, $1 \leq k \leq m$, die keinen Index der Städte in S enthält. Die Städte s_{2k-1} und s_{2k} sind also nicht in S enthalten, und die Stadt s_{2k-1} hat nach Konstruktion zu allen $2m-2$ Städten s_j , $j \notin \{2k-1, 2k\}$, eine direkte Flugverbindung. Insbesondere hat s_{2k-1} zu allen $m-1$ Städten in S eine direkte Flugverbindung.

Das beweist für $m=1012$ die Behauptung. □

Wir danken Herrn StD a.D. Karl Fegert, Herrn Friedemann Schwarz und Herrn OStR Dr. Robert Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Mathematische Entdeckungen



Ein kleiner Kreis mit Radius $\frac{1}{3}$ rollt um einen Kreis mit Radius 1 bis an seinen Ausgangspunkt P .

- a) Wie oft dreht sich der Kreis um den großen insgesamt und warum?
- b) Wenn der kleine Kreis Radius $\frac{1}{n}$ mit n einer ganzen Zahl besitzt, wie oft dreht er sich dann um den großen Kreis und warum?

Wiederentdeckt von Benjamin Landgraf

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2024 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Zur Aufgabe aus Heft 157

In Heft 157 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Bezeichne $(l_0, l_1 \dots l_{n-1})$ n Lampen, die im Kreis aufgebaut sind.

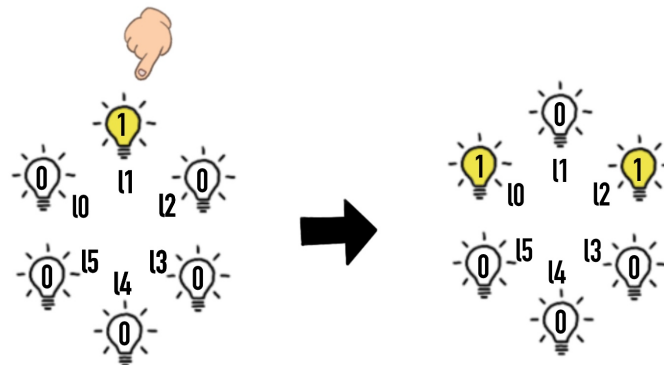
$(m_0, m_1 \dots m_{n-1})$ beschreiben die Schalter der Lampen. m_i steht dabei für den Schalter der Lampe l_i .

$l_i = 1 \leftrightarrow$ Die Lampe i ist eingeschaltet.

$l_i = 0 \leftrightarrow$ Die Lampe i ist ausgeschaltet.

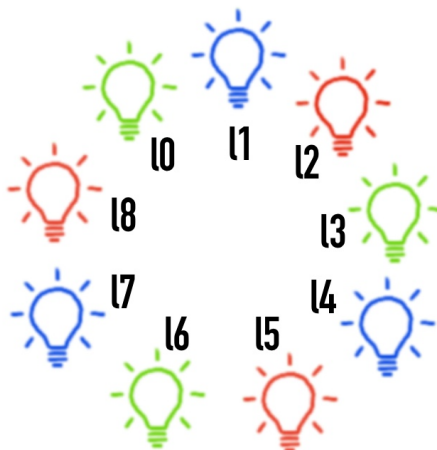
Durch Drücken des Schalters m_i ändert sich der Zustand der Lampen l_{i-1} , l_i , l_{i+1} .

Dabei bezeichne $l(n) = l(0)$ und $l(n+1) = l(1)$. Eine zuvor eingeschaltete Lampe geht aus, eine ausgeschaltete Lampe geht an. Im folgenden Beispiel für $n=6$ ändern sich durch Drücken des Schalters m_1 die Zustände der Lampen l_0 , l_1 und l_2 .



Ziel des Spiels ist es, von einer gegebenen Grundstellung alle Lampen auszuschalten, also $l_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0; i \leq n$

1. Finde ein Vorgehen, mit dem du bei $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ das Spiel immer gewinnst, wenn 2 Lampen eingeschaltet sind.
2. Wende dieses Verfahren auf die Lampenanzahl n mit $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ an. Bei welchen Ausgangssituationen mit 2 angeschalteten Lampen funktioniert das Schema?
3. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade ist, so ist die Stellung lösbar.



Die Lampen l_{3i} sind hier grün dargestellt, l_{3i+1} blau und l_{3i+2} rot.

4. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils ungerade ist, so ist die Stellung lösbar.

5. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Stellung lösbar ist, so ist die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade oder jeweils ungerade. (Marco Riehle)

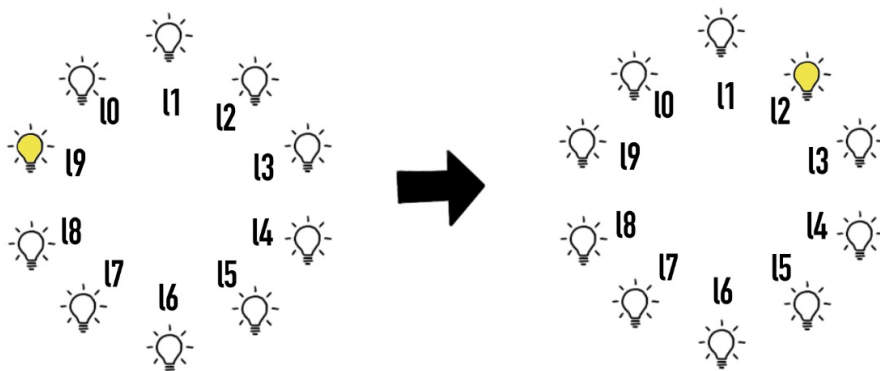
Lösung

1. Ist eine beliebige Lampe l_i eingeschaltet, so kann man die eingeschaltete Lampe durch Drücken der Schalter m_{i+1} und m_{i+2} um drei Lampen wandern lassen. Dieses Vorgehen wendet man so lange an, bis die erste Lampe auf die zweite gewandert ist und diese ausschaltet.

Für $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ funktioniert das immer.

Mögliche Erklärung: Wir lassen eine Lampe im Uhrzeigersinn wandern, im Allgemeinen erhöht sich die Nummer der eingeschalteten Lampe also bei jedem Schritt um 3. Gelangen wir mit diesem Verfahren zur Lampe l_{n-1}, l_{n-2} oder l_{n-3} , so verringert sich die Nummer der eingeschalteten Lampe um $n-3$.

Beispiel für $n=10$. Wir lassen die eingeschaltete Lampe l_9 um 3 Lampen im Uhrzeigersinn wandern.



Für $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ führt der letzte Schritt dazu, dass die eingeschaltete Lampe nun "beim nächsten Umlauf" nicht mehr die gleichen Lampen passiert. (Es ändert sich im zuletzt beschriebenen Schritt bei der Nummer der eingeschalteten Lampen der Rest bei der Teilbarkeit durch 3 um 1.) Dadurch kann im Fall $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ eine eingeschaltete Lampe auf alle möglichen Lampen wandern. Wir können also eine der eingeschalteten Lampen auf jede weitere angeschaltete Lampe wandern lassen und diese so ausschalten. Für $n = 3k$ gilt dies nicht, da sich für die Nummer der eingeschalteten Lampe, welche gleich dem Rest bei der Teilbarkeit durch drei ist, nicht ändert.

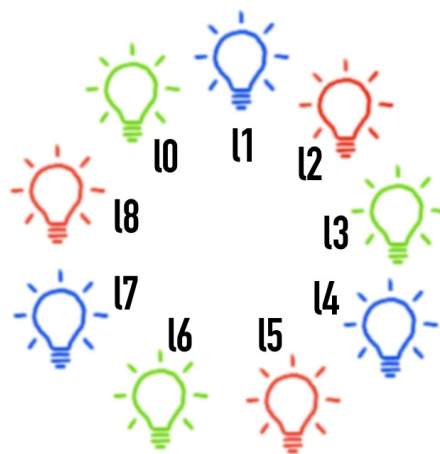
2. Haben die eingeschalteten Lampen bei $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ einen Abstand von Vielfachen der Drei, so funktioniert das Verfahren. Ist dies nicht der Fall, ist es mit diesem Verfahren nicht möglich, beide Lampen auszuschalten.

Eine eingeschaltete Lampe kann immer um 3 Stellen wandern, sie kann also schrittweise auf eine Lampe im Abstand von 3 Lampen wandern. Wiederholen wir diesen Schritt also auf jede Lampe, die einen Abstand von Vielfachen der 3 besitzt. Sind also exakt 2 Lampen eingeschaltet, die den Abstand von Vielfachen von 3 haben, so können wir diese ausschalten, indem wir eine Lampe wandern lassen, bis sie auf die bereits eingeschaltete Lampe trifft.

Ist der Abstand kein Vielfaches von 3, so funktioniert dieses Verfahren nicht.

(In Aufgabe 5 zeigen wir, dass es auch kein anderes Verfahren gibt, sondern diese Lampenstellung nicht lösbar wäre.)

3. Wir markieren die Lampen in drei Farben, die wie im Bild eingefärbt werden.



Mithilfe des Vorgehens aus Aufgabe 1 können wir 2 Lampen einer Farbe ausschalten (indem wir beispielsweise eine eingeschaltete grüne Lampe 3 Lampen wandern lassen, bis sie auf eine weitere eingeschaltete grüne Lampe trifft). Da die Anzahl grüner angeschalteter Lampen nach Voraussetzung gerade ist, können wir so alle grünen Lampen ausschalten (und es bleibt keine angeschaltete Lampe übrig). Dies machen wir für alle Farben.

Durch das Ausschalten der grünen Lampen werden die blauen und roten Lampen nicht verändert, sodass man nacheinander die Lampe jeder Farbe ausschalten kann, ohne die anderen Farben zu beeinflussen.

4. Lösungsmöglichkeit 1:

Wir wiederholen das Vorgehen aus Aufgabe 3. Da die Anzahl angeschalteter Lampen ungerade war, bleibt in jeder Farbe eine Lampe eingeschaltet übrig. Diese drei Lampen lassen wir wandern, bis sich die 3 eingeschalteten Lampen nebeneinander befinden. Diese können wir dann ausschalten, indem wir auf die mittlere Lampe drücken.

Lösungsmöglichkeit 2:

Durch das Drücken einer beliebigen Lampe wird eine grüne, eine blaue und eine rote Lampe umgeschaltet. Es ändert sich also die Anzahl eingeschalteter Lampen jeder Farbe, entweder erhöht sie sich um 1 (wenn eine ausgeschaltete Lampe eingeschaltet wird) oder verringert sich um 1 (wenn eine eingeschaltete Lampe ausgeschaltet wird). Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i} , l_{3i+1} und l_{3i+2} ; $i \in \mathbb{N}_0$ jeweils ungerade ist, wird sie durch das Drücken jeweils gerade.

Wenn eine Lampenstellung S lösbar ist, muss sie durch eine Kombination von Drücken der Lampen in die "Aus-Stellung" überführt werden können. Die Lampenstellung S muss aber demnach auch durch eine Kombination von Drücken der Lampen aus der "Aus-Stellung" entstanden sein. In der Aus-Stellung ist die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i} , l_{3i+1} und l_{3i+2} ; $i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade (nämlich 0). Durch das einmalige Drücken einer Lampe wird die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i} , l_{3i+1} und l_{3i+2} ; $i \in \mathbb{N}_0$ ungerade (Siehe Aufgabe 4 Lösungsmöglichkeit 2). Durch den nächsten Drücker wird sie wieder gerade, durch den darauffolgenden Drücker wieder ungerade und so weiter. Für jede lösbare Stellung gilt also: die Anzahl angeschalteter Lampen ist für l_{3i} , l_{3i+1} und l_{3i+2} ; $i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade oder jeweils ungerade.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 157

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 6: Levi Brunn 4, Noah Fitting 10, Quirin Fritsch 12, Christina Karst 50, Felix Pick 4, Sina Marie Uherek Reyes 23;

Kl. 7: Robert Schmitt 20;

Kl. 8: Nikolas Kaminski 21, Peter Knobloch 41, Lisa Schäfer 34,5;

Kl. 9: Rachel Tao 21,5, Mai Chi Tran 22

Bingen, Stefan-Georg Gymnasium

Kl. 6: Tim Jockers 25;

Kl. 7: Clemens Pie 4, Lena Rohr 4;

Kl. 9: Smilla Kleffman 6, Semen Ludlik 2

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:

Kl. 6: Cornelia Meyer 6, Silas Salloch 10, Joana Schwettlick 6;

Kl. 9: Aleksandr Silantev 19

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag):

Kl. 7: Nico Mathy 27, Philip Mühlbeyer 8;

Kl. 8: Wibke Goez 8

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:

Kl. 10: Malcom Carandany 20, Philippos Dimitriou 68

Idar-Oberstein, Göttenbach-Gymnasium

Kl. 10: Joschua Jung 22

Ingelheim, Sebastian-Münster Gymnasium:

Kl. 11: Elanor Kondla 36

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:

Kl. 6: Imran Aouzi 10;

Kl. 10: Jabir Aouzi 27

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:

Kl. 7: Maria Kröner 9;

Kl. 8: Nikita Mallasch 5

Kl. 11: Kadir Kocyigit 24, Boris Petkot 22

Mainz, Gymnasium Oberstadt:

Kl. 6: Jonas Dürkes 39;

Kl. 8: Philippa Lamke 41

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 9: Victor Mayer 23,5; Lea Amend 62,5

Mainz, Willigis-Gymnasium:

Kl. 7: Ioan Salaru 60

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis):

Kl. 6: Philipp Mühl 6, Martin Schroff 15;

Kl. 8: Jona Gooldmann 3, Daniel Laibach Muñoz 77;

Kl. 9: Johannes Kiehn 52;

Kl. 10: Georgi Koynov 61,5;

Kl. 12: Sascha Sprengler 20

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Otto-Schule

Kl. 6: Eric Reichardt 6;

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 6: Jasmin Borrmann 19;

Kl. 10: Dóra Emilia Mézáros 35, Emilie Borrmann 11

Saarburg, Gymnasium:

Kl. 11: Nils Angel 34;

Tangermünde, Diesterweg-Gymnasium:

Kl. 9: Mai Linh Dang 72; **Kl. 12:** Tu Sam Dang 65

Trier, Angela-Merici-Gymnasium:

Kl. 11: Felicitas Bauer 28

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:

Kl. keine Angabe: Marie Baumgartner 12

Worms, Gauß-Gymnasium:

Kl. 6: Sultan Amer 6, Helena Röhrenbeck 1, Jana Röhrenbeck 1

Schülerinnen und Schüler, bei denen keine Schule angegeben wurde:

Kl. keine Angabe: Manuel Heuss 6, Melina Rumpf 11

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2024/25 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).

Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Claudia Jockers, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe

Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub

Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Inhalt

Einladung zur MONOID-Jahresfeier	3
H. Fuchs: Beweis in einer Zeile	3
H. Fuchs: Mathematische Miniatur	3
H. Fuchs: Die besondere Aufgabe	4
H. Fuchs: Wo liegt der Fehler	4
H. Fuchs: Eine anschauliche Paradoxie	5
H. Fuchs: Der Schreiber, der nicht zählen konnte	6
H. Fuchs: Monodiale Frage	7
H. Fuchs: Heron-Dreiecke	7
H. Sewerin: Das Denkerchen	10
Lösung der Informatik-Aufgabe aus MONOID 157	11
H. Fuchs: Anschauliche Anomalie	12
H. Fuchs: Ein Altersproblem	15
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 158	16
Neue Mathespielereien	19
Neue Aufgaben	21
Gelöste Aufgaben aus MONOID 158	22
Lösung der Aufgabe aus Heron-Dreiecke	27
S. Kermer, V. Priebe, B. Schneider: Bundeswettbewerb Mathematik	27
Mathematische Entdeckungen	33
Rubrik der Löserinnen und Löser	37
Mitteilungen	39
Redaktion	39
Impressum	41

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>

