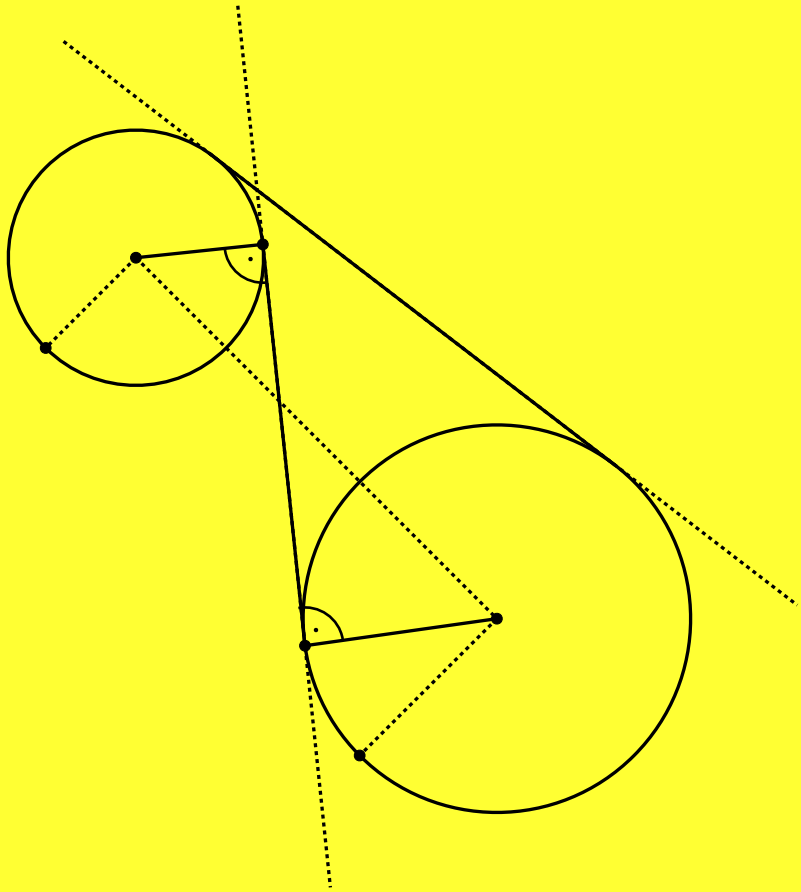
Jahrgang 44 Heft 160 Dez. 2024

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Februar 2025.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Vier Tage universitäre Mathematik
Die Mainzer Mathe-Akademie 2024

von Eleanor Kondla

Die MMA ist eine alljährlich in der Universität Mainz stattfindende Mathe-Akademie. Sie findet für gewöhnlich am Anfang des neuen Schuljahres statt und ist offen für alle Schüler ab 15 Jahren. Ich war dieses Jahr schon das zweite Mal dabei und auch diesmal hat es mir sehr viel Spaß gemacht, weswegen ich allen sehr empfehlen kann, auch einmal mitzumachen.

Die MMA ist so aufgebaut, dass der erste Tag ein Kennenlernen ist, es dann drei normale Mathetage gibt (mit Mathe-Rally und Tischtennisturnier) und schließlich eine Präsentation von dem Gelerntem bevor es dann viel zu früh wieder nach Hause geht.

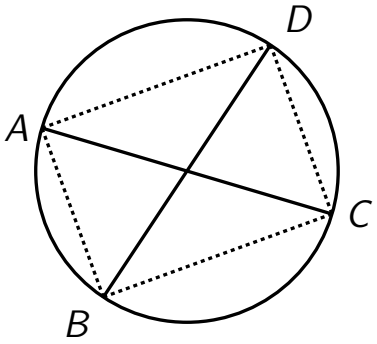
Allgemein sieht ein normaler Tag in der MMA so aus, dass man gegen halb 10 zur Uni läuft und dort in die Kurse geht, dabei kann es je nach Dozent stark zwischen sehr frontal und sehr selbstständig schwanken, die Themen sind aber eigentlich immer spannend, da man sich seinen Kurs aussuchen kann und somit alle eine gewisse Motivation mitbringen. Ab und zu wird die Mathematik dann unterbrochen, um eine Kaffee- und Kuchenpause zu machen bevor es wieder weiter an die Arbeit geht. Mittagessen gibt es auch an der Uni, das ist tatsächlich ziemlich lecker.
Nach etwas mehr Mathe und Kuchen geht es dann zwischen 16 und 17 Uhr wieder zurück zum Jugendhaus Don Bosco, wo mit einem Spieleabend der Tag ausklingt, bis alle nach dem doch anstrengendem Tag müde ins Bett fallen.

Mein persönliches Highlight der Akademie ist eindeutig die Atmosphäre. Es gibt einfach sehr wenige Orte, wo nach mehreren Stunden doch komplexer Mathematik das Erste, was in der Kuchenpause getan wird, ein gemeinsames Über-die-Matherätsel-beugen ist, die strategisch auf den Tischen verteilt sind. Und selbst spät am Abend gibt es immer irgendwen, der gerade nichts lieber will, als sich mit dir über höherdimensionale Polytopen zu unterhalten, was der ganzen Akademie eine besondere Atmosphäre verleiht.
Außerdem muss man sagen, dass man sich über das Essen wirklich nicht beschweren kann, manchmal habe ich das Gefühl, dass die MMA effektiv rein aus Essen und Mathe besteht (was ja nichts Schlechtes ist...).

Abschließend kann ich wirklich jedem Matheinteressierten die MMA sehr an Herz legen. Es sind tolle Menschen und eine tolle Zeit. Vielleicht sieht man sich ja nächstes Jahr.

Eine mathematische Miniatur

von Hartwig Fuchs



Die Endpunkte der Durchmesser AC und BD eines Kreises sind die Eckpunkte des Rechtecks $ABCD$. Denn nach dem Satz des Thales gilt: Die Winkel $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ADC$ über dem Durchmesser AC und die Winkel $\sphericalangle DCB$ sowie $\sphericalangle BAD$ über dem Durchmesser BD sind alle rechte Winkel.

Die besondere Aufgabe

Drei Strecken, ein Dreieck?

von Hartwig Fuchs

Es seien drei Strecken der Länge $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $b = 1+\sqrt{2}$ und $c = 2+\sqrt{2}$ gegeben. Gibt es ein Dreieck $\triangle$ mit diesen Seitenlängen?

Lösung

Mit den Näherungswerten $a \approx 2{,}4$, $b \approx 2{,}4$ und $c \approx 3{,}4$ lässt sich im Rahmen der Genauigkeit ein Dreieck zeichnen, das aussieht, als sei es gleichschenklig und rechtwinklig.

Vermutung

Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle$ der Kathetenlängen a und b mit $a = b$ und der Hypotenusenlänge c.

Nachweis

Zunächst gilt:
$a^3 = 7+5\sqrt{2}$ und $b^3 = \left(1+\sqrt{2}\right)^3 = 1+3\sqrt{2}+3\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3 = 7+5\sqrt{2}$.
Also ist $a^3 = b^3$ und daher auch $a = b = 1+\sqrt{2}$. Weiter ist
$c^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 = 6+4\sqrt{2}$ und $a^2+b^2 = 2\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 2\left(3+2\sqrt{2}\right)$.
Somit ist $c^2 = a^2+b^2$ und aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras folgt: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle$ mit den Kathetenlängen a und b und der Hypotenusenlänge c.
Damit ist die Vermutung bewiesen.

Bemerkung: Das Dreieck ist nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar, da dritte Wurzeln und somit die Strecke der Länge $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Mathematische Miniatur

von Frank Rehm

Reelle Zahlen können entweder rational oder irrational sein. Rational sind sie, wenn sie als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar sind, andernfalls sind sie irrational. Letztere werden wiederum in algebraische, irrationale und transzendente Zahlen unterschieden.

Algebraische Zahlen sind Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten. Zu den transzendenten Zahlen zählen zum Beispiel e und π, zu den algebraischen Zahlen gehören z.B. $\sqrt{2}$ und der goldene Schnitt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Jemand stellt nun die Frage, ob es zwei irrationale Zahlen x und y gibt, deren Potenz x^y eine rationale Zahl ist. Für die Summe, Differenz, das Produkt oder den Quotienten ist das leicht zu beantworten: es gibt sie, aber auch für die Potenzen?

Eine raffinierte Idee, die zwar keine Zahlen x und y benennt, aber beweist, dass es sie geben muss, ist die Folgende: $x = y = \sqrt{2}$. Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten: $z = x^y$ ist rational oder irrational. Ist z rational, ist die Existenz gezeigt. Ist z aber irrational, dann ist z^x rational. In der Tat gilt:

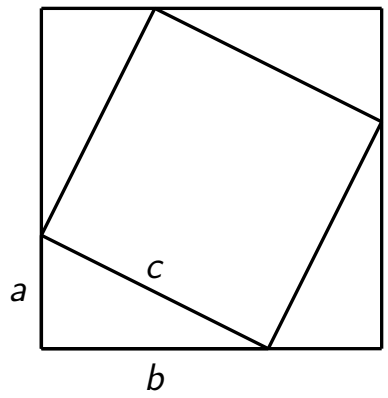
$$z^x = (x^y)^x = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2, \text{q.e.d.}$$

Hinweis: da im Beweis offengelassen wurde , welches konkrete Zahlenpaar eine rationale Potenz ergibt, möchten wir darauf hinweisen, dass tatsächlich nur der zweite Fall gilt, d.h. dass $z \approx 1,63$ wirklich irrational ist. Der Beweis dafür sprengt den Rahmen von Monoid.

Beweis ohne Worte

Der Satz des Pythagoras

von Hartwig Fuchs



Die Figur macht es möglich zu zeigen, dass gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.

Lösung

$$c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = (a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Monodiale Knobelei

von Hartwig Fuchs

Z_1 : $xxxxxxxxx : xxx = MONOID$
Z_2 : $\underline{xxx}$
Z_3 : $xxxx$
Z_4 : $\underline{xxx}$
Z_5 : $xxxx$
Z_6 : $\underline{xxxx}$
Z_7 : xx

Man ersetzte die Buchstaben und die Kreuze so durch Ziffern, dass man mit $N = 8$ eine eindeutige Division ohne Rest erhält. Wie lautet die Division?
Hinweis: Verschiedene Buchstaben können auch gleiche Ziffern bedeuten.

(1) Der Divisor *xxx* sei T genannt. Aus Z_3 folgt dann: Wäre $O = 0$ so wäre $O \cdot T > 100$ und Z_3 müsste *xxxx* lauten. Also ist das erste O in *MONOID* gleich 0. Ebenso ist auch das zweite $O = 0$ und da die Division ohne Rest aufgeht ist $Z_7 = 00$ und daher $D = 0$.

(2) Die Differenz einer 4-ziffrigen und einer 3-ziffrigen Zahl ist nur dann 2-ziffrig, wenn die erste Ziffer der 4-ziffrigen Zahl 1 ist. Daraus folgt: die erste Ziffer in Z_1, Z_3 und Z_5 ist jeweils 1.

(3) Dann ist $T < 125$, denn aus Z_4 folgt $8 \cdot xxx < 1000$ wegen $N = 8$.

(4) Für Z_6 gilt: $Z_6 = I \cdot T \geq 1000$. Mit (3) folgt: $I = 9$.

Nebenergebnis: Aus $I \cdot T \geq 1000$ ergibt sich $T \geq 112$ so, dass $112 \leq T \leq 124$gilt.

(5) Aus $Z_2 = M \cdot T < 1000$ folgt $M < 9$, denn bereits für $T = 112$ ist $9 \cdot 112 > 1000$. Es sei $M \leq 7$. Zunächst ist $xxxx - Z_2 < 100$; mit (2) und dem Nebenergebnis ist jedoch $1xxx - M \cdot T \geq 1000 - 7 \cdot 124 > 100$. Damit gilt: $M = 8$.

Aus (5), (2), (4) und N erhält man: $MONOID = 808090$.

Aus Z_1, Z_2, Z_3 folgt: $1000 - M \cdot T \leq 1xxx - 8T \leq 1x \leq 19$. Damit folgt $981 \leq 8T$ wodurch $T = 123$ oder $T = 124$ sein muss. Für $T = 123$ ist jedoch $Z_1 = 123 \cdot 808090 = 99395070$ im Widerspruch zu (2). Daher ist $T = 124$.

Lösung mit $Z_1 = 808090 \cdot 124$:

```
100203160:124=808090
 992
  1003
   992
    1116
    1116
       00
```

Was steckt dahinter?

von Hartwig Fuchs

William Shakespeare lässt in seinem Theaterstück „Die lustigen Weiber von Windsor“ (5. Akt, 1. Szene) die Hauptfigur Falstaff einen rätselhaften Ausspruch tun: „There is divinity in odd numbers“, was man etwa mit „In den ungeraden Zahlen ist etwas Göttliches“ übersetzen kann.

Um die Bedeutung dieses merkwürdigen Satzes zu verstehen, muss man weit in der abendländischen Geistesgeschichte zurückgehen.

Pythagoras von Samos (etwa 570 - 510 v. Chr.) war einer der ersten Wissenschaftler der Antike: Er war Philosoph, Mathematiker und Astronom – zugleich aber war er auch Begründer einer damals einflussreichen mystisch-philosophischen Lehre. Deren wichtigster Grundsatz kann so umschrieben werden: Die Welt ist Zahl und man gelangt zum Verständnis der Welt nur über die Einsicht in das Wesen der (natürlichen) Zahlen. Eine Vorstellung, die über die Jahrtausende hinweg die abendländische Weltsicht ganz nachhaltig geprägt hat: Was wollen wir nicht alles messen und in Zahlen genießen, um hinter die Geheimnisse der Natur zu gelangen?

Pythagoras lehrte insbesondere, dass die geraden Zahlen mit der Dunkelheit, dass aber die ungeraden Zahlen mit dem Licht und der Wahrheit in Verbindung stünden.

Platon, der bedeutendste Philosoph Griechenlands, hat vieles von Pythagoras' Vorstellungen über den Zusammenhang von Welt und Zahl in sein Werk aufgenommen. Und auf diese Weise sind sie nach Rom gelangt – Letzteres belegt ein Zitat des römischen Dichters Vergil: „Numero deus impare gaudet“ (Der Gott erfreut sich an der ungeraden Zahl).

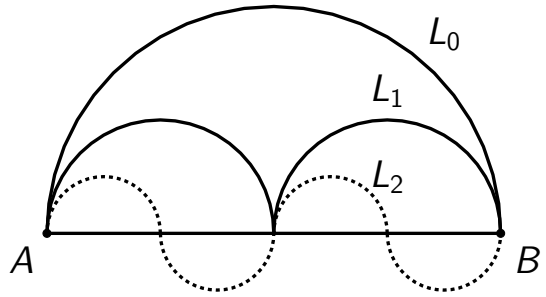
Durch die Vermittlung der Araber, welche die griechischen und römischen Denker und Schriftsteller studierten, gelangte die Kenntnis von Pythagoras' Zahlenmystik schließlich ins mittelalterliche Abendland.

Da Shakespeare ein sehr belesener Mann gewesen sein muss, hat er wohl aus den mittelalterlichen Quellen Kenntnis von der damals vermutlich bereits arg verstümmelten Zahlenlehre Pythagoras erhalten. Und so stellt sich Falstaffs Ausspruch heraus als eine späte Erinnerung an ein Gedankengebäude aus einer Zeit, in der unser wissenschaftliches Denken seinen Anfang nahm.
Dieser Nachklang von Pythagoras' Zahlentheorie ist heute schon so schwach geworden, dass es obiger Zeilen bedurfte, um Falstaffs dunklen Satz zu erhellen.

Wo liegt der Fehler?

von Hartwig Fuchs nach Walter Lietzmann

Für jedes $n = 0, 1, 2, ...$, seien H_n Halbkreise mit den Radien $r_n = \frac{1}{2^n}$, $r_0 = 1$; die Länge der H_n ist dann $u_n = \pi \cdot r_n = \pi \cdot \frac{1}{2^n}$.



Nun konstruiert man für jedes $n \geq 0$ eine Linie L_n aus jeweils 2^n Halbkreisen H_n in einer Anordnung wie in der Abbildung.
Für die Länge $|L_n|$ der Linie L_n gilt dann:
$|L_0| = \pi$, $|L_1| = 2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = \pi$,
$|L_2| = 4 \cdot \left(\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = \pi, ...$ also
$|L_n| = 2^n \cdot \left(\pi \cdot \frac{1}{2^n}\right) = \pi$, wie auch immer $n \geq 0$ gewählt ist.

In der Abbildung sieht man:

(1) Je größer n ist, desto mehr schmiegt sich L_n an die Strecke AB.

Daraus folgt:

(2) Je größer n ist, umso weniger unterscheiden sich $|L_n|$ und $|AB|$; mit beliebiger Genauigkeit gilt also $\pi = 2$

(3) in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} |L_n| = 2$.

Wir wissen aber, dass $\pi = 2$ eine Falschaussage ist. Wir können es sogar beweisen. Angenommen, es gilt $\pi = 2$. Dann ist $\pi = 2$ die Fläche eines Kreises vom Radius 1, zugleich ist 2 die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge $\sqrt{2}$.
Damit wäre das nachgewiesenermaßen unlösbare Problem der Kreisquadratur gelöst!
Welcher Fehler hat nun zu der Falschaussage $\pi = 2$ geführt?
Die nur aus der Anschauung gewonnene „Einsicht“ (1) beruht auf dem undefinierten Begriff „anschmiegen“ – und daher ist (1) keine logisch begründete Aussage. Aber (1) bildet die Grundlage für den „Schluss“ (1) $\Rightarrow$ (2).
Dieser „Schluss“ ist jedoch nicht zulässig – aus gutem Grund, wie $\pi = 2$ zeigt.
Schon Platon (ca. 428/427 - 348/347 v. Chr.), griechischer Philosoph und Mathematiker, hat in seiner Schrift „Der Staat“ gewarnt: „Wer sich bei mathema-

tischen Überlegungen auf einen anschaulichen Sachverhalt beruft, der sollte sich bewusst sein, dass er sich dabei eines unzuverlässigen, wenn nicht gar unzulässigen Arguments bedient.“

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

Albrecht Beutelspacher: Geheimsprachen und Kryptographie

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich um eine kurze Einführung in die Welt der Kryptographie, d. h. in Fragen der Ver- und Entschlüsselung. In sieben Kapiteln werden grundsätzliche Fragen, klassische Methoden der Verschlüsselung, die Frage nach unknackbaren Codes, Public-Key-Verfahren, aber auch der Wert von Geheimnissen, die Frage nach elektronischem Geld und Überlegungen zum Sinn und Zwecke – sowie den ethischen Grundlagen – für den alltäglichen Einsatz von Kryptographie in unserer modernen Gesellschaft thematisiert.

Das vorliegende Buch wurde erstmals 1997 unter dem Titel „Geheimsprachen: Geschichte und Techniken“ veröffentlicht und erschien 2022 in der sechsten, vollständig überarbeiteten Auflage.

Nach grundlegenden Fragestellungen zur Bedeutung von Geheimnissen – wie z. B. der PIN-Nummer einer Bankkarte – folgt im zweiten Kapitel die Beschreibung von in der Geschichte der Menschheit verwendeten Verschlüsselungstechniken: von der spartanischen Skytala über die Verschlüsselungsmethode von Julius Cäsar, polyalphabetische Verschlüsselung werden grundlegend und leicht nachvollziehbar erläutert.

Im dritten Kapitel werden dann heute noch verwendete Verschlüsselungsverfahren wie DES – womit wieder bei der PIN der Bankkarte wären – grundsätzlich beschrieben. Um die gängigen Publik-Key-Verfahren einordnen zu können, folgt im nächsten Kapitel zunächst eine kurze Einführung in die modulo-Rechnung, bei der es um das aus der Grundschule bekannte Dividieren mit Rest geht. Mit diesen Kenntnissen ausgestattet geht es dann an Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch und das RSA-Verfahren, aus der sich auch eine Methode der elektronischen Signatur ableiten lässt.

Weitere Kapitel beleuchten die grundsätzliche Wirkungsweise von Kryptowährungen wie z. B. Bitcoin und die grundsätzliche – und mathematisch nicht zu klärende – Abwägung zwischen dem Recht jedes Einzelnen auf Schutz der Privatsphäre und dem berechtigten Interesse des Staates seine Bürger durch die Verhinderung von Kriminalität und Terrorakten zu schützen.

Fazit

Manche Themen werden nur kurz angerissen, aber auf nur 123 Seiten ist es kaum möglich eine umfassende Darstellung der komplizierten mathematischen Disziplin der Ver- und Entschlüsselung zu geben. Nichtsdestotrotz ist Albrecht Beutelspacher eine Darstellung gelungen, bei der auch jüngere Schülerinnen und Schüler einen sehr guten ersten Eindruck in die vorgestellten Ideen erhalten. Will man die schwierigeren Verfahren wie z. B. das RSA Verfahren inhaltlich voll durchdringen, so sollte dies ab der 9. oder 10. Klasse möglich sein, wenn man die vorgestellten Verfahren parallel zum Lesen mit einem Block und Bleistift selbst durchführt. Als Einstieg in die Komplexität des Gebietes der Kryptographie ist das Buch auf jeden Fall geeignet.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺ ☺ ☺

Angaben zum Buch

Beutelspacher, Albrecht: Geheimsprachen und Kryptographie. Geschichte, Techniken und Anwendungen, C.H. Beck Wissen 2022, ISBN 978-3-406-78577-1,
Taschenbuch 123 Art des Buches: Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau: verständlich
Altersempfehlung: ab 14 Jahren

Reguläre Parkettierungen der Ebene

von Hartwig Fuchs

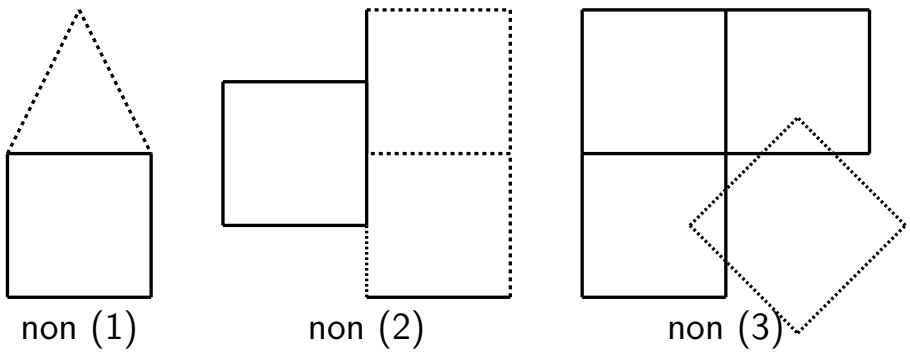
Eine Überdeckung der Ebene mit n-eckigen Polygonen (Vielecken) heißt eine reguläre Parkettierung, wenn für sie gilt:

(1) Die Polygone sind regelmäßige, kongruente n-Ecke;

(2) Jede Seite, samt ihren Endpunkten, eines n-Ecks ist auch Seite, samt ihren Endpunkten, eines anderen n-Ecks;

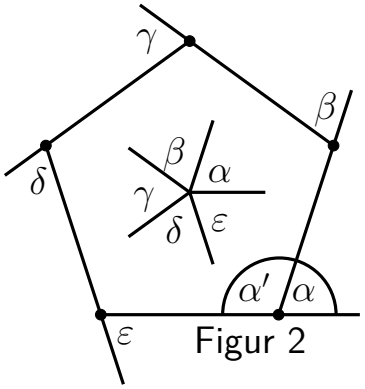
(3) Die n-Ecke überdecken die Ebene lückenlos und ohne Überlappungen.

Beispiele für Polygone, die keine reguläre Parkettierung möglich machen



Figur 1

Welche regulären Parkettierungen der Ebene gibt es?



Figur 2

Ein Ausgangspunkt zur Lösung dieser Frage ist die Bestimmung der Innenwinkelsumme eines regulären n-Ecks E_n, $n \geq 3$.
Als Außenwinkel von E_n bezeichnen wir die Winkel, die man durch einseitige Verlängerung der Seiten von E_n – wie in Figur 2 – erhält.

(4) Die Summe der Außenwinkel von E_n beträgt 360°.

Verschiebt man die Außenwinkel parallel so, dass ihre Scheitel in einem Punkt zusammenfallen – vgl. Figur 2 –,dann erhält man unmittelbar (4).
Aus (4) folgt: Jeder Außenwinkel von E_n beträgt $\frac{1}{n} \cdot 360^\circ$. Weil nun die Summe aus einem Außenwinkel und dem anliegenden Innenwinkel 180° groß ist – vgl. $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ in Figur 2 – gilt:

(5) Jeder Innenwinkel von E_n ist $180^\circ - \frac{1}{n} \cdot 360^\circ = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ groß.

Beispiel

Beim regelmäßigen Dreieck sind die Innenwinkel 60°, beim Quadrat sind sie 90° und beim regelmäßigen Fünfeck sind sie 108° groß.

Bei einer regulären Parkettierung der Ebene mit n-Ecken E_n stoßen wegen (3) sowie der Symmetrie von E_n in jeder seiner Ecke die gleiche Anzahl m von n-Ecken E_n und damit m Innenwinkel lückenlos und frei von Überlappungen zusammen. Die Summe dieser Innenwinkel ist dann wegen (5):
$m \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Folglich gilt

(6) $m \cdot \frac{n-2}{n} = 2$ für jedes $n \geq 3$.

Die Gleichung (6) hat keine Lösung für $m \geq 7$, denn es ist $m \cdot \frac{n-2}{n} \geq 7 \cdot \frac{1}{3} > 2$ und für $m = 1, 2$ und 5 wegen $m \cdot \frac{n-2}{n} \neq 2$. Sie hat jedoch Lösungen für $m = 3, 4$ und 6.

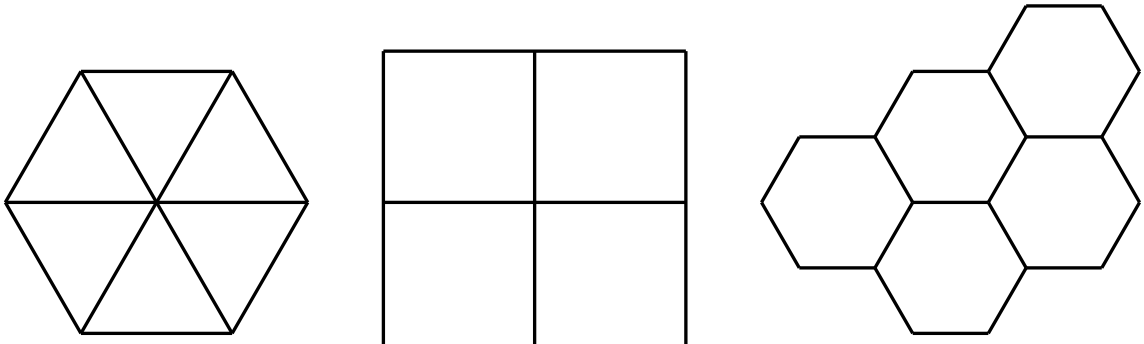
Lösung des Parkettierungsproblems

Aus der Gleichung (6) folgt: Für ein gegebenes m ist $n = \frac{2m}{m-2}$. Damit erhält man

m	n	Innenwinkel von E_n	Anzahl und Typ der Vielecke E_n mit einer gemeinsamen Ecke
3	6	120°	3 regelmäßige Sechsecke
4	4	90°	4 Quadrate
6	3	60°	6 gleichseitige Dreiecke

Eine Parkettierung der Ebene gelingt also nur mit regelmäßigen, kongruenten

Vielecken, wenn diese regelmäßige Sechsecke, Quadrate oder gleichseitige Dreiecke sind.



Figur 3

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Peter und Paul treffen sich nach der Schule. „Ich hätte mal wieder Lust, mit dir ins Kino zu gehen“, meint Peter. „Wollen wir mit einer Wette entscheiden, wer den Eintritt bezahlt?“ Paul entgegnet: „Wenn die Wette fair ist, bin ich einverstanden.“ „Gut“, sagt Peter. „Wir treffen uns heute Abend vor dem Kino, und wenn du mir die richtige Antwort mitbringst, zahle ich. Wenn nicht, zahlst du unseren Eintritt.“ „OK“, erwidert Paul, „um was geht es?“

„Du musst mir heute Abend sagen, ob du sieben verschiedene positive ganze Zahlen gefunden hast, deren Summe 100 beträgt und die eindeutig durch die viertgrößte Zahl unter ihnen bestimmt sind. Oder du begründest, dass das nicht geht“, erklärt Peter. „Na dann bis heute Abend“, antwortet Paul.

Welche richtige Antwort kann Paul am Abend mitbringen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2025 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 158

In Heft 158 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Peter, Paul und Marie verbringen die Ferien am Strand. Mittlerweile haben sie genau 2024 Muscheln gesammelt und neben ihnen liegt ein Schlauchboot für zwei Personen. Da schlägt Peter ein Spiel vor:

„Wir nehmen jeder der Reihe nach eine, zwei oder drei Muscheln von dem Haufen weg, wobei Marie beginnen darf, dann komme ich dran und dann Paul. In dieser

Reihenfolge geht es immer weiter. Wer die letzte Muschel nehmen muss, bleibt an Land, und die beiden anderen drehen mit dem Schlauchboot eine Runde im Meer.“
Alle sind einverstanden, aber Paul traut Peter nicht über den Weg und beschließt, jedes Mal eine andere Anzahl Muscheln zu nehmen als Peter gerade vor ihm. Wer kann unter diesen Bedingungen durch geschicktes Ziehen für sich einen Platz auf dem Schlauchboot sicher erreichen, und mit welcher Strategie klappt das? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Marie kann sich einen Platz auf dem Schlauchboot sichern. Dazu nimmt sie am Anfang eine Muschel. Es verbleiben 2023 Muscheln, und es gilt $2023 = 337 \cdot 6 + 1$. Die verbleibende Anzahl ist also um 1 größer als eine durch 6 teilbare Zahl.
Peter und Paul können unter den verabredeten Bedingungen jedes Mal zusammen nur 3, 4 oder 5 Muscheln entnehmen. Damit hat Marie in ihrem nächsten Zug immer die Möglichkeit diese Anzahl auf 6 zu ergänzen, so dass sie stets eine Anzahl hinterlässt, die um 1 größer ist als eine Sechserzahl.
Weil die Anzahl der Muscheln nach jeder Runde um 6 abnimmt, ist schließlich nach dem letzten Zug von Marie nur noch eine Muschel vorhanden, die Peter ziehen muss, der somit nicht auf das Schlauchboot kommt, das daher von Marie und Paul besetzt wird.
Eine richtige Lösung wurde von Lea Amend eingesandt.
Eigentlich wollte Marie lieber mit Peter Schlauchboot fahren. Gibt es bei diesen Spielregeln eine Möglichkeit, dass die beiden eine Strategie verabreden, bei der Paul die letzte Muschel nehmen muss? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Eine Gratwanderung entlang des logischen Prinzips

„tertium non datur“

von Hartwig Fuchs

Kürzlich fand Mathis in einem Buch einen Zettel mit einer Liste von Aussagen: Es sei p eine Primzahl.
A_1: Es gibt unendlich viele Primzahl-Paare $p, p+2$.
A_2: Es gibt nur endlich viele Primzahl-Paare $p, p+2$.
A_3: Es gibt nur endlich viele Primzahl-Tripel $p, p+2, p+4$.
A_4: Es gibt kein Primzahl-Quadrupel $p, p+2, p+4, p+6$.
A_5: Man hat es hier mit Aussagen zu tun, von denen genau zwei falsch sind.
Mathis will herausfinden, was es mit dem Zettel auf sich hat.

Dazu schreibt er zunächst $w(A)$ bzw. $f(A)$, wenn die Aussage A wahr bzw. falsch ist, und er benutzt, dass jede Zahl $p \geq 3$ genau eine der Darstellungen $p = 3n$ oder $p = 3n+1$ oder $p = 3n+2$ mit $n \geq 1$ besitzt und betrachtet dann A_3, A_4, A_1, A_2, A_5 (in dieser Reihenfolge).
Zu A_3 stellt er in Form einer Tabelle fest:

p prim	2	3	$3n, n > 1$
Tripel	$2, 4$	$3, 5, 7$	$3n, \ldots$
Primzahl-Tripel?	nein	ja	nein

p prim	$3n+1$	$3n+2$
Tripel	$3n+1, 3n+3, \ldots$	$3n+2, 3n+4, 3n+6$
Primzahl-Tripel?	nein	nein

Es gibt also nur das eine Primzahl-Tripel $3, 5, 7$ und damit gilt:

(1) $w(A_3)$

Zu A_4: Da es für $p = 2, p = 3n, p = 3n+1, p = 3n+2$ keine Primzahl-Tripel und somit auch keine Primzahl-Quadrupel gibt und weil für $p = 3$ auch $3, 5, 7, 9$ kein Primzahl-Quadrupel ist, gilt die Aussage A_4:

(2) $w(A_4)$

Zu A_1 und A_2: Die Aussage A_1 ist eine bis heute weder bewiesene noch widerlegte Behauptung. Das Prinzip „tertium non datur“ verlangt jedoch von A_1: Entweder gilt $w(A_1)$ oder aber $f(A_1)$ – eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.* Daraus folgt entweder $w(A_1)$ oder $f(A_1)$ und im Hinblick auf A_2 gilt:

(3) Aus $w(A_1)$ folgt $f(A_2)$; aus $f(A_1)$ folgt $w(A_2)$ – hier ist der Fall, dass es kein Primzahl-Paar gibt, bereits durch ein Beispiel wie $11, 13$ ausschließbar.

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich:

(4) Von den Aussagen A_1, A_2, A_3, A_4 ist genau eine falsch.

Ist A_5 aber nun wahr oder falsch?
Nach dem Prinzip „tertium non datur“ ist A_5 entweder wahr oder falsch.
Annahme: A_5 ist wahr.
Dann gibt es zwei Falschaussagen, von denen sich wegen (4) eine unter den Aussagen $A_1 - A_4$ befindet. Also muss A_5 selbst die zweite Falschaussage sein. Somit gilt A_5 ist sowohl wahr als auch falsch.
Annahme: A_5 ist falsch.
Nach Annahme und wegen (4) sind also genau zwei der Aussagen $A_1 - A_5$ falsch. Daher ist (A_5) wahr. Somit gilt: A_5 ist sowohl wahr als auch falsch.

* tertium non datur – die lateinische Bezeichnung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten, welches besagt: Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, ein Drittes gibt es nicht.

Mathis Überlegungen führen jeweils zu der widersprüchlichen Aussage:

(5) Die Aussage A_5 ist sowohl wahr als auch falsch – im Widerspruch zum tertium non datur.

Lässt sich dieser Widerspruch (5) erklären und eventuell aus der Welt schaffen? In der Logik sind Aussagen unzulässig, die nicht dem Prinzip „tertium non datur“ gehorchen. Nun ist aber A_5 gerade eine solche Aussage, der man nicht genau einen der Wahrheitswerte w, f zuordnen kann. Es ist daher nicht erlaubt, A_5 in logischen Schlüssen zu verwenden. Der Widerspruch (5) ist also nicht möglich, wenn Mathis die Aussage A_5 als logisch unzulässig ablehnt. Damit sind dann aber nur noch die Aussagen $A_1 - A_4$ zu betrachten. Da A_3 und A_4 wahr sind, ist also nur eine Aussage falsch: Entweder A_1 oder A_2.

Was uns über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

Es gilt: $S = 2^{2025} - 2^{2024} - ... - 2^1 = 2$.

Nachweis

Allgemein gilt:
$x^{n+1} - 1 = (x-1)\left(x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x^1 + x^0\right)$ (Beweis durch Ausmultiplizieren). Setzt man $x = 2$ und $n = 2024$ so folgt daraus:
$2^{2024} + 2^{2023} + ... + 2^2 + 2^1 = \frac{2^{2024+1}-1}{2-1} - 2^0 = 2^{2025} - 2$. Somit ist
$S = 2^{2025} - \left(2^{2025} - 2\right) = 2$.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 159

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Gekürzte rationale Zahlen

Eine rationale Zahl $\frac{x}{y}$, wobei x und y natürliche Zahlen sind, nennen wir *gekürzt*, wenn 1 der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.
Wie viele gekürzte rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ gibt es, für die gilt: $x > 0, y > 0$ und $x + y = 90$? (H.F.)

Lösung:
Bei der Suche nach gekürzten Zahlen $\frac{x}{y}$ sind nicht alle Kombinationen von x und y zu betrachten.
Denn aus $x + y = 90$ folgt: ist x ein Vielfaches von 2, von 3 oder von 5 so ist auch y ein Vielfaches von 2, von 3 oder von 5.

Die Liste der rationalen Zahlen x, die kein Vielfaches von 2, von 3 oder von 5 sind lautet:

x	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	...
y	89	83	79	77	73	71	67	61	59	53	49	47	...

...	47	49	53	59	61	67	71	73	77	79	83	89
...	43	41	37	31	29	23	19	17	13	11	7	1

Es gibt daher $2 \cdot 12 = 24$ positive rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ mit $x + y = 90$

II. Ziffernsumme

Wie groß ist die Summe der **Ziffern** aller Zahlen

a) von 0 bis 100?

b) von 0 bis 1000? (H.F. & Frank Rehm)

Lösung:

a) Wir ordnen allen Zahlen n von 0 bis 99 eine weitere Zahl m zu, die ebenfalls zwischen 0 und 99 liegt, und zwar nach folgender Regel: $n = ab$ wird $m = cd$ zugeordnet, wobei $c = 9-a$ und $d = 9-b$ gilt. Dabei werden auch Vornullen bei n angegeben. Da alle Zahlen n von 0 bis 99 verschieden sind, gilt das auch für die Partner m, die ebenfalls im gleichen Intervall liegen, d.h. beide Zahlenlisten sind identisch, nur anders sortiert. Anhand der Bildungsregel ist die Summe der Quersummen in einem Paar $a + b + (9 - a) + (9 - b) = 18$, d.h. die gesuchte Ziffernsumme ist $100 \cdot 18$. Da jede Zahl doppelt gezählt wurde und noch die Quersumme von 100 fehlt, ergibt sich $\frac{(100 \cdot 18)}{2} + 1 = 901$.
Hinweis: dieses Verfahren erspart den Nachweis, dass jede Zahl n von 0 *bis* 49*, die mit* $99-n$ *gepaart wird, zusammen als Ziffernsumme* 18 *hat. Das ist für die ersten und letzten Paare offensichtlich, aber damit nicht automatisch für alle* 50 *Paare bewiesen.*

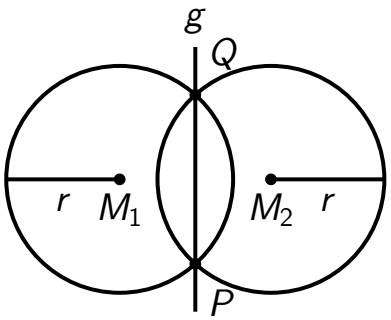
b) Die Summe wird ganz analog zum Aufgabenteil a) ermittelt, nur dieses Mal mit bis zu dreistelligen Zahlen, d.h. $n = abc$ wird gepaart mit $m = def$, wobei gilt $d = 9 - a$, $e = 9 - b$ und $f = 9 - c$ mit der gesamten Ziffernsumme 27. Das ergibt in Summe $\frac{1000 \cdot 27}{2} + 1 = 13501$. Wiederum werden in allen Zahlen n ggf. Vornullen vorangestellt, um den Wert für m festzulegen.

III. Eine Aufgabe von Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci (1452 - 1519), der große Künstler und erfindungsreiche Konstrukteur mechanischer Maschinen, interessierte sich sehr für die Mathematik. Die folgende Aufgabe stammt von ihm.
Gegeben seien zwei kongruente Kreise, die sich in den Punkten P und Q schneiden, $P \neq Q$.

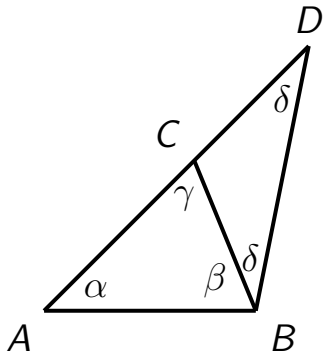
Dann ist jeder Punkt der Geraden durch P und Q gleich weit von den Mittelpunkten M_1 und M_2 der beiden Kreise entfernt.
Begründe, dass Leonardo Recht hat. (H.F.)

Lösung:



Mit den Bezeichnungen der Figur gilt:
$|M_1P| = |M_2P| = |M_1Q| = |M_2Q| = r$
Daraus folgt:
Die Dreiecke PM_1Q und PM_2Q stimmen in allen drei Seitenlängen überein; sie sind also kongruent und spiegelbildlich zur Geraden g durch P und Q. Somit ist g eine Spiegelachse für die nebenstehende Figur. Daher gilt $|XM_1| = |XM_2|$ für jeden Punkt X auf der Geraden g.

IV. Stumpfwinkliges Dreieck



Es sei ABC ein beliebiges, jedoch nicht gleichschenkliges, Dreieck mit $|AC| > |BC|$. Man verlängere AC über C hinaus bis zu einem Punkt D, wobei $|CD| = |BC|$ sei.

a) Zeige: $\delta = \frac{1}{2}\gamma$.

b) Zeige nun: Der Winkel $\sphericalangle ABD$ ist größer als 90°.

Hinweis: Im Dreieck gilt: Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

(H.F.)

Lösung:
Mit den Bezeichnungen der Figur ist in b) zu zeigen:

(1) $\beta + \delta > 90°$.

a) Wegen $\sphericalangle BCD = 180° - \gamma$ und $|BC| = |CD|$ gilt im Dreieck $\triangle BDC$: $180° - \gamma + 2\delta = 180°$. Also ist $\delta = \frac{1}{2}\gamma$.

b) Damit lautet (1)

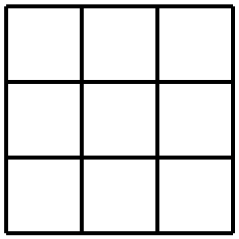
(2) $\beta + \frac{1}{2}\gamma > 90°$.

Aus $|AC| > |BC|$ folgt $\beta > \alpha$ (der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber). Nun gilt:

$$\beta > \alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\alpha \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha$$
$$\Rightarrow \beta + \frac{1}{2}\gamma > \left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha\right) + \frac{1}{2}\gamma = 90°$$

wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Also ist $\beta + \frac{1}{2}\gamma = \beta + \delta > 90°$.

V. Bunte Quadrate

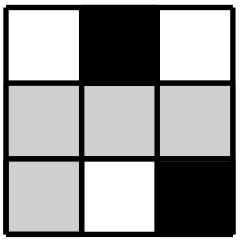


Neun gleich große Quadrate seien wie in der Figur angeordnet. Färbe jedes Quadrat so mit einer der Farben Schwarz (S), Weiß (W) oder Grau (G), dass gilt:

- jedes schwarze Quadrat hat mit genau einem grauen Quadrat,
- jedes graue Quadrat hat mit genau einem weißen Quadrat,
- jedes weiße Quadrat hat mit genau einem schwarzen Quadrat,

jeweils genau eine Seite gemeinsam. (H.F.)

Lösung:
Eine von mehreren Lösungen:



VI. Besondere Quadratzahlen

Bestimme rechnerisch alle vierstelligen Quadratzahlen, deren erste beiden und letzte beiden Ziffern übereinstimmen. Gesucht sind also alle Quadratzahlen mit der Form $xxyy$. (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:
Die gesuchten Zahlen sind offenbar durch 11 teilbar, als Quadratzahlen also sogar Vielfache von 121, d.h. von der Form $121 \cdot a^2$. Für $a \geq 10$ ist diese Zahl mehr als vierstellig. Wir prüfen die Werte $a < 10$. Dann ist $121a^2$ dreistellig für $a = 1$, $a = 2$. $121 \cdot 9 = 1089$, $121 \cdot 16 = 1936$, $121 \cdot 25 = 3025$, $121 \cdot 36 = 4356$, $121 \cdot 64 = 7744$, $121 \cdot 81 = 9801$. Also ist $7744 = 88^2$ die einzige Lösung.

VII. Anzahl von Teilern

Es sei p eine Primzahl. Bestimme die Anzahl der Teiler von $20p$.
Hinweis: Unterscheide die Fälle $p = 2, 3, 5$ und $p \geq 7$. (H.F.)

Lösung:
Mit $A(n)$ bezeichnen wir die Anzahl der Teiler von n.
Es sei $p = 2$. Dann hat $20p = 40$ die Teiler $1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 \Rightarrow A(40) = 8$;
Es sei $p = 3$. Dann hat $20p = 60$ die Teiler
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 \Rightarrow A(60) = 12$;
Es sei $p = 5$. Dann hat $20p = 100$ die Teiler

$1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 \Rightarrow A(100) = 9$;
Es sei $p \geq 7$. Weil 20 die sechs Teiler $1, 2, 4, 5, 10, 20$ und p die zwei Teiler 1 und p hat, folgt, dass $20p$ die Teiler $1, 2, 4, 5, 10, 20, p, 2p, 4p, 5p, 10p, 20p$ hat $\Rightarrow A(20p) = 12$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Zufall oder Regel ?

Trifft es zu, dass $\left(2024 + \frac{1}{2024}\right)^2 - \left(2024 - \frac{1}{2024}\right)^2 = 4$ ist?
Gilt Entsprechendes auch für andere Zahlen an der Stelle von 2024? (H.F.)

II. Eine Eigenschaft magischer 3×3-Quadrate

Das nebenstehende 3×3-Zahlenquadrat heißt magisch, weil die drei Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen die gleiche Summe $M = 15$ besitzen.

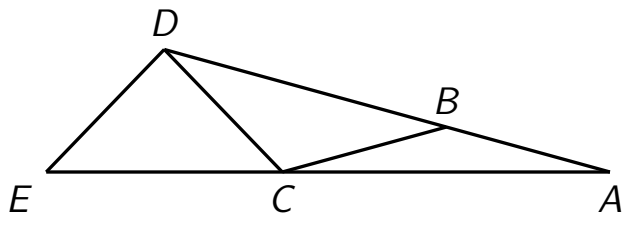
Für die zentrale Zahl $z = 5$ gilt außerdem:

(1) $3 \cdot z = M$.

Überprüfe, ob die Gleichung (1) für jedes magische $3x3$-Zahlenquadrat zutrifft. (H.F.)

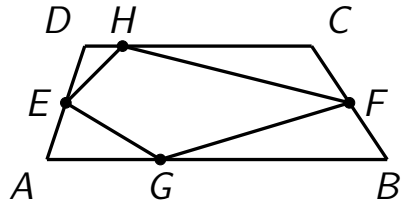
4	3	8
9	5	1
2	7	6

III. Winkelbestimmung



In dem nebenstehenden Dreieck $\triangle EAD$ gelte:
$|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$ sowie $\sphericalangle EDA = 100^\circ$.
Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle DAE$? (H.F.)

IV. Viereck im Trapez

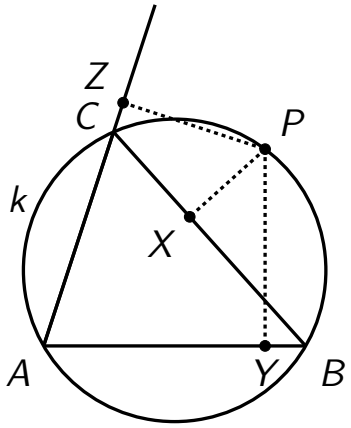


Im Trapez $ABCD$ mit $AB||CD$ seien E und F die Mittelpunkte der Strecken AD und BC. Wähle einen Punkt G beliebig auf AB und ebenso einen Punkt H auf DC. Welchen Bruchteil der Trapezfläche $|ABCD|$ besitzt die Viereckfläche $|EGFH|$?

(H.F.)

V. Punkte auf einem Kreis

Zeichne einen Kreis k und ein Dreieck ABC, dessen Ecken A, B, C auf dem Kreis liegen. P sei ein beliebiger Punkt auf dem Kreis. Die Lote von P auf die (verlängerten) Dreieckseiten schneiden diese in den Punkten X, Y und Z. Untersuche, ob die Punkte B, P, X, Y auf einem Kreis k' liegen. Bestimme gegebenenfalls Mittelpunkt und Radius des Kreises. (H.F.)



VI. Spiegelzahlen

Es seinen m und n vierstellige natürliche Zahlen mit der Dezimaldarstellung $m = abcd$ und $n = dcba$, das heißt $m = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$ und $n = d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$.

Bestimme alle Zahlen m, für die gilt: $4 \cdot m = n$. (H.F.)

VII. Finde eine Vermutung

Vervollständige die Tabelle, indem du in ihre Spalten einträgst:

(1)	(2)	(3)
1	1	1
2	2	2
3	2	8
4	3	27
⋮	⋮	⋮

(1) 1. Spalte: die Teiler von 24;

(2) 2. Spalte: die Anzahl der Teiler der Zahlen in der 1. Spalte;

(3) 3. Spalte: die 3. Potenz der Zahlen in der 2. Spalte.

Bestimme dann die Summe A der Zahlen in der 2. Spalte sowie die Summe B der Zahlen in der 3. Spalte.

(a) Vergleiche A und B – erkennst du eine mögliche Vermutung?

(b) Überprüfe deine Vermutung für die Zahlen 20 und 100. (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1358: Jahreszahlen

Berechne $\frac{\left(10^{2024}+25\right)^2-\left(10^{2024}-25\right)^2}{\left(10^{2023}+25\right)^2-\left(10^{2023}-25\right)^2}$. (H.F.)

Aufgabe 1359: Ganzzahlige Lösungen gesucht

Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

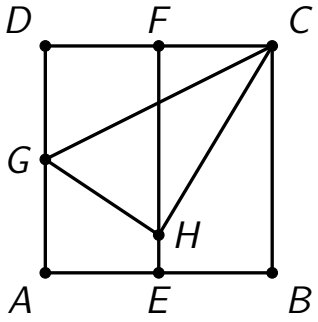
$$w + x + y + z = w \cdot x \cdot y \cdot z,$$

sofern es sie gibt. (H.F.)

Aufgabe 1360: Aufgaben zur Uhrzeit

Auf einer Uhr ist es 4 Uhr 44 Minuten und $44{,}\overline{4}$ Sekunden. Welchen Winkel bilden die beiden Zeiger? (Christoph Sievert)

Aufgabe 1361: Quadratisches Papier



Ein quadratisches Stück Papier $ABCD$ mit der Seitenlänge 10 wird so gefaltet, dass der Punkt C fest bleibt und der Punkt D auf einen Punkt H auf der Mittelachse EF fällt. Der Punkt G auf AD ist ein weiterer Punkt der Faltgeraden.
Wie lang ist die Strecke GD? (Klaus Ronellenfitsch)
Hinweis: Ziehe eine Parallele zu AB durch den Punkt H.

Aufgabe 1362: Ein Schuss ins Schwarze

Die Besucher Paulus und Quintus eines Jahrmarkts kommen auch an einer Schießbude vorbei. Spontan entschließen sie sich, eben mal einen Schuss auf eine Zielscheibe abzugeben. Dabei sind Paulus Chancen ins Schwarze zu treffen doppelt so groß wie die von Quintus, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass Paulus *und* Quintus beide vorbeischießen, 50 % ist. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass Paulus ins Schwarze trifft? (H.F.)

Aufgabe 1363: Niemals Primzahl-Zwillinge

Es sei p eine Primzahl mit $p > 3$.
Dann sind die Zahlen $2p-1$ und $2p+1$ niemals Primzahl-Zwillinge, d. h., $2p-1$ und $2p+1$ sind niemals beide zugleich Primzahlen. Zeige dies. (H.F.)

Aufgabe 1364: Scher das Schaf

Ein Schäfer möchte möglichst viel Gewinn beim Verkauf der Wolle seiner Schafe machen. Dafür nimmt er an, dass das Gewicht der Wolle eines Schafes (in kg) mit $W(t) = \sqrt{t}$ (t in Monaten) gegeben ist. Für das Futter, die Unterkunft eines Schafes und den Schäferhund rechnet der Schäfer mit Kosten (in Euro) von $K(t) = 1 + 0{,}2t$. Ein Kilogramm Wolle kann er dabei für 1,60€ verkaufen. Zu welchem Zeitpunkt t sollte der Schäfer seine Schafe scheren, um den größt möglichen Gewinn beim Verkauf der Wolle zu erzielen?
Bewerte die errechnete Lösung im Sachzusammenhang. (Wolfgang J. Bühler)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 159

Klassen 9–13

Aufgabe 1352: Gleichung mit 3er-Potenzen

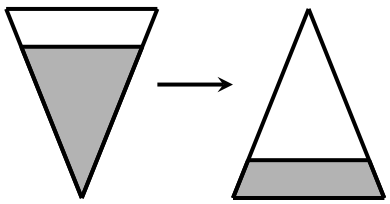
Finde alle reellen Lösungen der Gleichung $3^{3x} + 3^{2x} + 3^x = 39$.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Vereinfacht man die Gleichung, so erhält man $27^x + 9^x + 3^x = 39$. Durch Einsetzen findet man die Lösung $x = 1$, da $27 + 9 + 3 = 39$ ist. Führt man eine Substitution (Ersetzung) von $3^x = a$ durch, so lautet die Gleichung $a^3 + a^2 + a - 39 = 0$ mit der gefundenen Lösung $a = 3$ (für $x = 1$). Eine Polynomdivision ergibt: $(a^3 + a^2 + a - 39) : (a - 3) = a^2 + 4a + 13$. Gäbe es noch weitere Lösungen, so müsste $a^2 + 4a + 13 = 0$ sein. Diese quadratische Gleichung hat aber keine reelle Lösung, da die Diskriminante $D = 16 - 4 \cdot 13 = -36$ negativ ist. Also ist $x = 1$ die einzige reelle Lösung der Ausgangsgleichung.

Aufgabe 1353: Wasser im Kegel

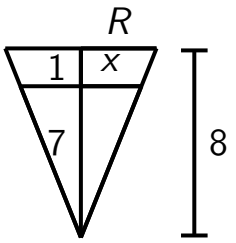


Ein 8cm hohes kegelförmiges Gefäß (Spitze unten, siehe Bild) ist bis 1 cm unter dem oberen Rand mit Wasser gefüllt. Nun deckt man die obere Gefäßfläche dicht ab und dreht das Gefäß um.
Wie hoch ist jetzt das Gefäß mit Wasser gefüllt?

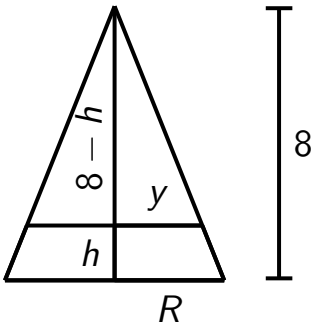
(Klaus Ronellenfitsch)

Bemerkung: Es fällt vielleicht auf, dass der Radius des kegelförmigen Gefäßes nicht angegeben ist. Er spielt aber beim Ergebnis keine Rolle, da er sich bei der Bestimmungsgleichung der Höhe h herauskürzt. Hinweis: Verwende die Strahlensätze.

Lösung:

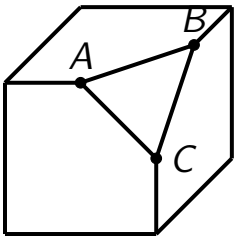


Das Wasservolumen beim ersten Bild ist $V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot 7$ und nach den Strahlensätzen ist $\frac{R}{8} = \frac{x}{7}$, also ist $x = \frac{7}{8}R$ und damit $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{49}{64}R^2 \cdot 7$. Das Wasservolmen beim zweiten Bild ist $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 8 - \frac{1}{3}\pi y^2 \cdot (8-h)$. Wieder nach den Strahlensätzen ist $\frac{y}{8-h} = \frac{R}{8}$ und damit $y = \frac{(8-h)\cdot R}{8}$.



Also ist $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 8 - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{(8-h)^2 \cdot R^2}{64} \cdot (8-h)$. Setzt man $V_1 = V_2$ und kürzt die ganze Gleichung mit $\frac{1}{3}\pi R^2$, so erhält man die Gleichung $\frac{49}{64} \cdot 7 = 8 - \frac{(8-h)^3}{64}$ und nach Multiplikation mit 64: $343 = 512 - (8-h)^3$, also $(8-h)^3 = 169$ mit der Lösung $8 - h = \sqrt[3]{169}$.
Ergebnis: Nach Umdrehen des Gefäßes steht das Wasser $h = 8 - \sqrt[3]{169} \approx 2{,}47$ cm hoch.

Aufgabe 1354: Abgeschnittener Würfel



Welcher Bruchteil des Würfels ist abgeschnitten, wenn die Punkte A, B und C jeweils die Mittelpunkte der Kanten sind?
Hinweis: Kopfrechnen reicht, Taschenrechner wird nicht gebraucht.

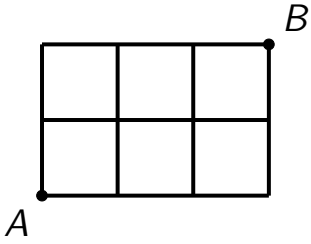
(Christoph Sievert)

Lösung:
Stellt man die Pyramide nicht auf die „übliche“ Grundfläche, sondern auf eine der drei Seitenflächen, so gilt immer noch die Volumenformel (die gilt nämlich auch für schiefe Pyramiden) $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Dann gilt:
$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $h = \frac{1}{2}$. Also $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$.
$\frac{1}{48}$ des Würfels wird abgeschnitten.

Aufgabe 1355: Rundwanderwege

Das Wegenetz zeigt verschiedene Wege von A nach B.

a) Wie viele kürzeste „Rundwanderwege“ gibt es von A nach B und wieder zurück nach A?



b) Wie viele „Rundwanderwege ohne Wegwiederholung“ gibt es, wenn beim Rückweg kein auf dem Hinweg bereits gegangener Teilweg nochmals gegangen werden darf?

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

a) Jeder Weg von A nach B enthält zwei Wegstrecken nach oben (O) und drei Wegstrecken nach rechts (R), kann also durch ein Wort mit zwei O

und drei R (z.B. $RORRO$) beschrieben werden. Von den fünf Positionen der Buchstaben eines solchen Wortes kann man zwei (für O) auf $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$ Arten auswählen, d.h. für einen Hinweg von A nach B gibt es zehn Möglichkeiten. Ebenso gibt es für einen Rückweg von B nach A zehn Möglichkeiten. Also gibt es $10 \cdot 10 = 100$ „Rundwanderwege“ für den Weg ABA.

b) Zeichnet man alle zehn Hinwege auf und überlegt wie viele Rückwege ohne Wegwiederholung möglich sind, so findet man (Links L, Unten U):
Hinweg $OORRR$: drei Rückwege $ULLUL$, $ULULL$, $UULLL$
Hinweg $ORORR$: drei Rückwege $ULLUL$, $ULULL$, $UULLL$
Hinweg $ORROR$: zwei Rückwege $ULULL$, $UULLL$
Hinweg $ORRRO$: zwei Rückwege $LLUUL$, $LUULL$
Hinweg $ROORR$: ein Rückweg $ULLLU$
Hinweg $RORRO$: kein Rückweg
Hinweg $RORRO$: zwei Rückwege $LLLUU$, $LLULU$
Hinweg $RROOR$: ein Rückweg $ULLLU$
Hinweg $RRORO$: drei Rückwege $LLLUU$, $LLULU$, $LULLU$
Hinweg $RRROO$: drei Rückwege $LLLUU$, $LLULU$, $LULLU$
Das sind insgesamt 20 Möglichkeiten für „Rundwanderwege ohne Wegwiederholung“.

Aufgabe 1356: Durch 33 teilbar

Die sechsstellige Zahl 132312 enthält je zweimal die Ziffern 1, 2 und 3.

a) Wie viele solcher Zahlen gibt es?

b) Wie viele davon sind durch 33 teilbar? (Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

a) Von den sechs Positionen der Ziffern kann man die Ziffer 1 auf $\binom{6}{2} = 15$ Arten auf zwei Positionen setzen, dann die Ziffer 2 auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten auf die zwei weiteren Positionen und schließlich die Ziffer 3 einmal auf die restlichen Plätze. Also gibt es $15 \cdot 6 = 90$ solcher Zahlen.

b) All diese Zahlen sind durch 3 teilbar, da ihre Quersumme 12 ist. Da $33 = 3\cdot11$ ist, bleibt die Frage: Wie viele der Zahlen sind durch 11 teilbar? Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die „alternierende Quersumme“ durch 11 teilbar ist. Das bedeutet: Hat eine sechsstellige Zahl die Form $abcdef$, so muss $(a + c + e) - (b + d + f)$ durch 11 teilbar sein. Dies ist hier der Fall, wenn $a + c + e = b + d + f = 1 + 2 + 3 = 6$ ist, denn $6 - 6 = 0$ und 0 ist durch 11 teilbar. Da man die Ziffern $1, 2$ und 3 auf 6 verschiedene Arten auf die Plätze $1, 3$ und 5 und ebenso auf 6 Arten auf die Plätze $2, 4$ und 6 verteilen kann, gibt es $6 \cdot 6 = 36$ solcher Zahlen, die durch 11 und damit auch durch 33 teilbar sind.

Aufgabe 1357: Schubladen-Beweis
Unter sechs verschiedenen positiven ganzen Zahlen größer gleich Null gibt es ein Zahlenpaar, dessen Summe oder Differenz durch 9 teilbar ist. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:
Die sechs Zahlen können in der Form

(1) $9n + r$ mit $n \geq 0$ und $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ geschrieben werden.

1. Fall: Wenn zwei der gegebenen 6 Zahlen den gleichen „Rest“ r in der Formel (1) besitzen, dann ist ihre Differenz durch 9 teilbar.
2. Fall: Keine zwei Zahlen besitzen den gleichen „Rest“ r.
Wir bilden nun fünf Schubladen, auf die wir uns alle natürlichen Zahlen gemäß ihres „Restes“ verteilt denken.
Diese „Reste-Schubladen“ seien:
$\{0\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}$ und $\{4, 5\}$.
Auch die gegebenen sechs Zahlen sind auf diese fünf Schubladen verteilt. Deshalb befinden sich zwei der sechs Zahlen in derselben Schublade.
Diese Schublade ist $\neq \{0\}$, denn sonst besäßen beide Zahlen den gleichen „Rest“ 0. Für zwei Zahlen mit verschiedenen „Resten“, in einer der vier Schubladen $\neq \{0\}$ gilt dann:
Addiert man die beiden Zahlen, so addieren sich ihre „Reste“ zu 9 – ihre Summe ist daher durch 9 teilbar.

Für Freunde des inspirierten Programmierens

von Jens Gallenbacher

In dieser Rubrik werden in Zukunft Aufgaben aufgegriffen, die bereits im Rahmen des Bundeswettbewerbs Informatik gestellt wurden. Meistens können einfache Instanzen von sehr langweiligen Programmen gelöst werden, die aber für komplexe Instanzen deutlich zu viel Rechenzeit benötigen. Hier sind dann elegante Programme gefragt, die mit informatisch-mathematischer Kreativität erstellt werden. Daher haben wir sie für MONOID noch einmal entdeckt und präsentieren sie Euch hier in einer leicht angepassten, erweiterten Form.
Die Aufgaben der Rubrik wurden im Rahmen des BWINF (www.bwinf.de) gestellt. Die Verwendung erfolgt mit freundlicher Genehmigung der Geschäftsstelle der Bundesweiten Informatikwettbewerbe.
Im Heft wird es für diese Rubrik keine Lösungshinweise geben, da auf den Seiten des BWINF bereits sehr ausführliche Lösungen mit mathematischen Erläuterungen zum Download bereitstehen.

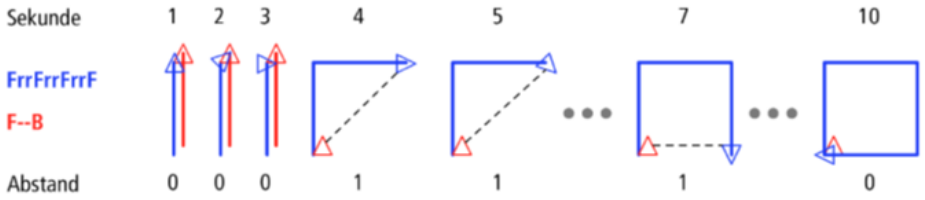
Der Vortänzer: Aufgabe aus der 1. und 2. Runde des 32. Bundeswettbewerbs Informatik

In einem Roboter-Wettbewerb gibt es eine neue Disziplin: Dance-Challenge. Dabei soll ein Roboter des Typs Dancemaster 2000 so programmiert werden, dass er einen vorgegebenen Tanz imitiert.
Der Dancemaster 2000 orientiert sich an einem Raster: Bei einem Schritt bewegt er sich von einem Rasterpunkt zu einem der benachbarten Punkte (auch diagonal). Der Roboter startet immer am gleichen Punkt im Raster und mit gleicher Ausrichtung.
Den Dancemaster 2000 kann man mit den folgenden Bewegungsbefehlen programmieren:

F	1 Schritt vorwärts
B	1 Schritt rückwärts
l	Drehung um 45° nach links
r	Drehung um 45° nach rechts
-	Pause: mache nichts

Die Ausführung eines Bewegungsbefehls dauert 1 Sekunde.
Zur Abkürzung von Dancemaster-Programmen gibt es einen Wiederholungsbefehl:
n Befehlsfolge.
bedeutet: Führe die Befehlsfolge n-mal aus ($1 \leq n \leq 9$).
Zum Beispiel lassen die Programme **FrrFrrFrrF** und **4Frr.** den Dancemaster je ein Quadrat tanzen. **54Frr.F.** tanzt fünf Quadrate nebeneinander (s. Bild, aus Platzgründen um 90° im Uhrzeigersinn gedreht)

Ziel des Wettbewerbs ist es, ein Tanzprogramm *T* mit einem anderen, möglichst kurzen Programm *I* möglichst genau zu imitieren und so für dieses „Imitat“ *I* möglichst wenig Strafpunkte zu erhalten. Weil der Befehlsspeicher knapp ist, kostet jedes Zeichen von *I* genau 3 Strafpunkte. Außerdem wird der Abstand zwischen den durch *T* bzw. *I* erreichten Positionen nach jeder Sekunde bestimmt und zu den Strafpunkten addiert. Der Abstand zwischen zwei Rasterpunkten ist die kleinste Anzahl von Schritten (ohne Drehung), um vom einen zum anderen Punkt zu gelangen.
Beispiel: Im Vergleich mit dem Tanzprogramm **FrrFrrFrrF** kostet das Imitat **4Frr.** 15 Strafpunkte; **F–B** kostet 18 Strafpunkte (s. Bild).



Vorüberlegungen

(a) Bestimme für die Tanzprogramme in der Tabelle unten jeweils ein Imitat *I*, das höchstens so viele Strafpunkte kostet wie in der Tabelle angegeben. Kandidaten für *I* kannst du manuell finden.

Tanzprogramm	Strafpunktobergrenze
4FFFFrr.	21
FrrFllFrrFrrrFF	20
lFrrFFllFFFrrFllFrrFF	50

(b) Schreibe zu deiner Hilfe ein Programm, das für ein Tanzprogramm *T* und ein Imitat *I* die Strafpunkte für *I* berechnet.

Programmieraufgabe

Die ursprüngliche Wettbewerbs-Aufgabe wurde als Turnieraufgabe gestellt. Die Programme der Teilnehmerinnen und Teilnehmer sind daher gegeneinander angetreten. Die Fassung hier ist so umformuliert, dass man sie ohne Gegner lösen kann.

In einem Match der Dance-Challenge tanzt einer der teilnehmenden Roboter ein Tanzprogramm vor, und die anderen müssen diesen Tanz imitieren. Der „Vortänzer“ kann für sein Tanzprogramm 10 Zeichen gratis verwenden. Jedes weitere Zeichen kostet 9 Strafpunkte. Die Imitate (also die Tanzprogramme) der beiden „Nachtänzer“ werden nach den Regeln oben mit Strafpunkten belegt.

Schreibe ein Programm, das zu einem gegebenen Tanzprogramm ein möglichst gutes Imitat erstellt, also eines, das wenige Strafpunkte erzeugt. Falls es kein gutes Imitat gibt (also das Original-Tanzprogramm die wenigsten Strafpunkte erzeugt) soll dies ausgegeben werden.

Schreibe nun außerdem ein Programm, das möglichst „knifflige“ Tanzprogramme erzeugt, also solche, für die es wahrscheinlich teuer wird, sie nachzutanzen.

Die Tanzprogramme sind dabei jeweils auf 255 Zeichen begrenzt.

Hinweis

Bei der Betrachtung der Komplexität bezieht man sich meistens auf die asymptotische Laufzeit eines Algorithmus oder die Speichernutzung.

Wichtig ist aber auch noch, wie einfach man eine Lösung ausdrücken kann: Ein Programm mit 10 Zeilen Code zieht man in der Regel einem mit 1000 Zeilen vor, wenn beide die gleiche Aufgabe lösen. Unter dem Begriff „Beschreibungskomplexität“ wird dies etwas formeller betrachtet. Eine Recherche nach dem Begriff „Kolmogorow-Komplexität“ lohnt sich, wenn das Thema interessant erscheint.

Bilder aus dem Original-Aufgabenblatt des 32. Bundeswettbewerbs, erste Runde, mit freundlicher Genehmigung der BWINF-Geschäftsstelle.

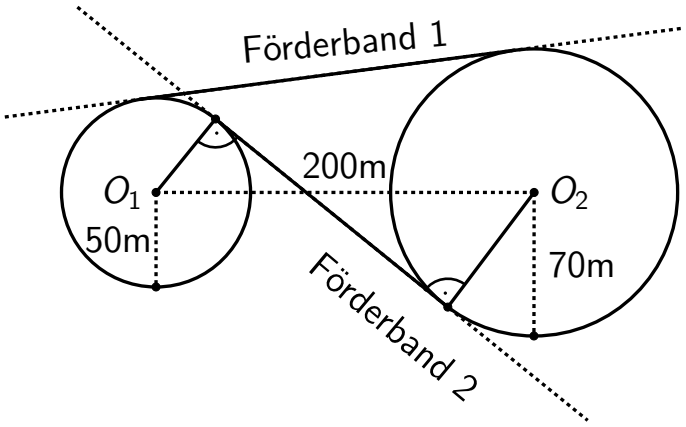
Aus dem mathematischen Adventskalender

von Daris Mohammadzadeh

Viele von euch kennen sicherlich „Mathe im Advent“. Ähnlich dazu stellt MATH+ jedes Jahr einen Adventskalender für Schülerinnen und Schüler ab der 10. Klasse, Studierende, Lehrkräfte und alle anderen Interessierten zusammen. Vom 1. bis zum 24. Dezember gibt es jeden Tag eine spannende Aufgabe zu lösen. Diese orientieren sich dabei nicht so sehr am Schulstoff, sondern fordern - wie MONOID- kreatives Denken und Zielstrebigkeit. Weil wir die Aufgaben sehr schön finden, möchten wir euch beispielhaft das dritte Türchen vorstellen.

Aufgabe 3: Die kreisförmigen Lager der Elfen

Aufgrund der Zunahme von Stürmen möchten die Elfen zwei Lagerhäuser mit Förderbändern verbinden. So könnten sie Waren zwischen den Lagern transportieren, ohne nach draußen gehen zu müssen. Von oben betrachtet haben die beiden Lagerhäuser die Form eines Kreises, das erste mit einem Radius von 50 Metern und das zweite mit einem Radius von 70 Metern. Die Mittelpunkte der beiden Gebäude sind genau 200 Meter voneinander entfernt. Die Elfen möchten zwei Förderbänder bauen, die jeweils, wie in Abbildung 1 [die Abbildung unten] dargestellt, tangential an den Gebäuden anliegen und genau von einem Gebäude zum anderen verlaufen, aber nicht weiter.



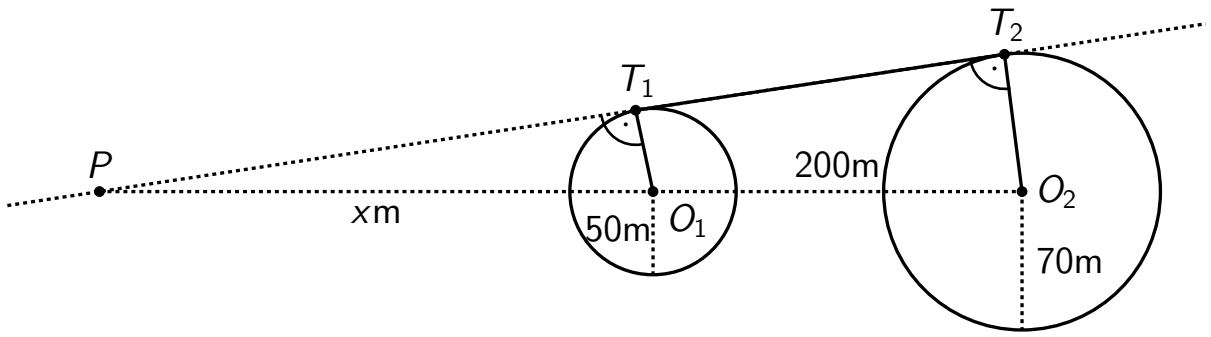
Skizze von oben auf die Gebäude mit den eingezeichneten Förderbändern.

Leider herrscht derzeit ein Sturm, sodass die Elfen die Länge der Förderbänder nicht vor Ort messen können. Sie benötigen aber die richtigen Längen der beiden Förderbänder, um genug Material für den Bau zu bestellen. Können die Elfen die korrekten Längen ohne Messung bestimmen, und wenn ja, wie lang sind die Förderbänder 1 und 2 (gerundet auf ganze Meter)?

In der Original-Aufgabe wurden zehn Lösungsmöglichkeiten angegeben, von denen man eine wählen musste. In diesem Artikel werden wir die Lösung jedoch ohne dies finden.

Lösung

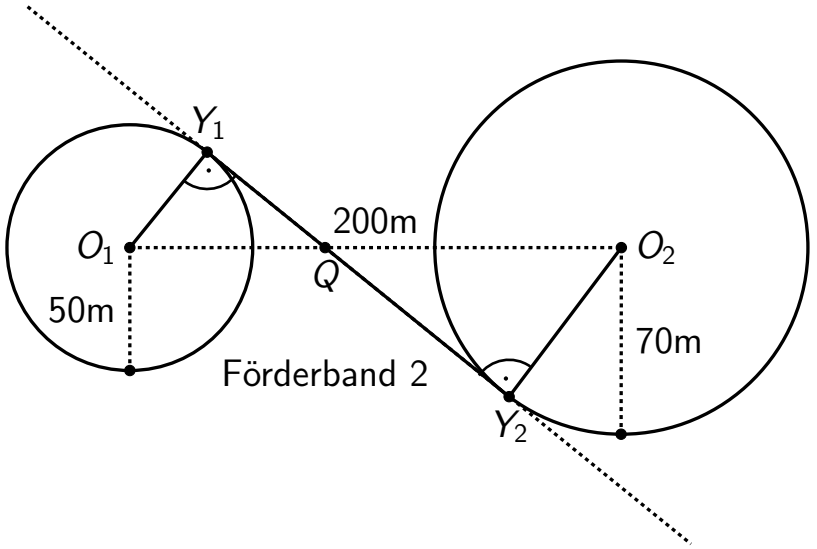
Wir ermitteln zuerst die Länge von Förderband 1. Dazu betrachten wir den Schnittpunkt der Verlängerung von Förderband 1 mit der Geraden durch beide Mittelpunkte, P.



Uns fällt sofort auf, dass das Förderband beide Kreise tangiert. Die Berührungspunkte sollen T_1 und T_2 heißen. Da Tangenten senkrecht auf den entsprechenden Radien stehen, gilt $\measuredangle PT_1O_1 = \measuredangle PT_2O_2 = 90°$. Weil P definitionsgemäß auf O_1O_2 und T_1T_2 liegt, gilt auch $\measuredangle O_1PT_1 = \measuredangle O_2PT_2$. Somit sind zwei und wegen des Innenwinkelsatzes sogar alle drei Winkel in $\triangle PO_1T_1$ und PO_2T_2 gleich, die Dreiecke sind also ähnlich.

Somit sind die Streckenverhältnisse gleich, insbesondere gilt $\frac{|PO_1|}{|PO_2|} = \frac{|O_1T|}{|O_2T|}$ bzw. $\frac{x}{x+200} = \frac{50}{70}$. Es ergibt sich die eindeutige Lösung $x = 500$. Dies zu überprüfen, bleibt dem Leser überlassen. Nun nutzen wir, dass die beiden Dreiecke rechtwinklig sind: Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|O_1T_1|^2 + |PT_1|^2 = |PO_1|^2$ bzw. $50^2 + |PT_1|^2 = x^2 = 500^2$ und damit $|PT_1| = \sqrt{247500} \approx 497,49$. Wegen gleicher Verhältnisse gilt auch $\frac{50}{70} = \frac{|O_1T_1|}{|O_2T_2|} = \frac{|PT_1|}{|PT_2|}$ bzw. $|PT_2| \approx \frac{7}{5} \cdot 497,49$ und daher $|T_1T_2| \approx (\frac{70}{50} - 1) \cdot 497,49 \approx 199$. Die Länge des ersten Förderbands beträgt also etwa $199m$.

Nun betrachten wir Förderband 2. Der Schnittpunkt des zweiten Förderbands mit O_1O_2 sei Q. Wieder ist das zweite Förderband eine Tangente beider Kreise, diesmal sollen die Berührpunkte Y_1 und Y_2 heißen.



Uns fällt auf, dass $\measuredangle Y_2QO_2$ und $\measuredangle Y_1QO_1$ Scheitelwinkel und damit gleich groß sind. Und weil sowohl in $\triangle O_1QY_1$ als auch $\triangle QY_2O_2$ ein rechter Winkel (wegen der Tangenten) vorkommt, sind die beiden Dreiecke ähnlich.
Ab hier sollte uns die Aufgabe sehr vertraut erscheinen. Wir nutzen wieder die Gleichheit der Verhältnisse von (korrespondierenden) Strecken und erhalten $\frac{|O_1Q|}{|O_2Q|} = \frac{|O_1Y_1|}{|O_2Y_2|} = \frac{50}{70}$. Zusätzlich wissen wir, dass $|O_1Q| + |QO_2| = |O_1O_2| = 200$, dies können wir in den rechten Term einsetzen. Dies aufzulösen, verbleibt als Übung für den Leser. Das Ergebnis ist jedenfalls $|O_1Q| = \frac{250}{3}$ bzw. $|O_2Q| = \frac{350}{3}$. Durch den Satz des Pythagoras wissen wir, dass $|O_1Q|^2 = |O_1Y_1|^2 + |Y_1Q|^2$ bzw. $|Y_1Q| = \sqrt{|O_1Q|^2 - |O_1Y_1|^2} \approx \sqrt{4444,44} \approx 66,67$. Analog gilt $|O_2Q|^2 = |O_2Y_2|^2 + |Y_2Q|^2$ und damit $|Y_2Q| = \sqrt{|O_2Q|^2 - |O_2Y_2|^2} \approx 93,33$. Somit ist Förderband 2 $|Y_1Y_2| = |Y_1Q| + |Y_2Q| \approx 66,67 + 93,33 = 160$ Meter lang. Um die Frage zu beantworten: Das erste Förderband ist etwa 199 Meter und das zweite 160 Meter lang.

Wir danken vielmals MATH+ für das freundliche Bereitstellen der Aufgaben.

Mathematische Entdeckungen

Das älteste bekannte magische 3×3-Quadrat heißt Lo-Shu und wurde ca. 2800 v. Chr. entdeckt. Die Ziffern von 1 bis 9 werden so in den Feldern angeordnet, dass die Summen waagerecht, senkrecht und in den Diagonalen jeweils denselben Wert – bei Lo-Shu ist dies offensichtlich der Wert 15 – ergeben:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

a) Gibt es ein Magisches 3×3-Quadrat, das einen anderen Summenwert als 15 hat?

b) Gibt es ein Magisches 3×3-Quadrat, bei dem die 1 in der linken oberen Ecke steht?

c) Gibt es überhaupt weitere Magische 3×3-Quadrate, die nicht durch Drehungen und Spiegelungen aus Lo-Shu hervorgehen?

Begründe Deine Antworten jeweils. (F.R.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2025 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Zur Aufgabe aus Heft 158

In Heft 158 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Welche n-ten Potenzen natürlicher Zahlen sind n-ziffrig?

Gesucht sind also natürliche Zahlen a und n, so dass für a^n in Zifferdarstellung gilt:

$$a^n = z_1 z_2 \ldots z_n.$$

1. Finde je ein Beispiel für eine n-ziffrige n-te Potenz für $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = 9$.
2. Wie groß kann a höchstens sein, damit n-ziffrige n-te Potenzen existieren können?
3. Wie groß kann n höchstens sein, damit n-ziffrige n-te Potenzen existieren können?
4. Wie viele n-ziffrige n-te Potenzen gibt es? (H.F)

Lösung

(1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^n	3^1	4^2	5^3	6^4	7^5	8^6	9^7	8^8	9^9
$z_1 \ldots z_n$	3	16	125	1296	16807	262144	4782969	...	...

(2) Behauptung: a muss kleiner oder gleich 9 sein.
Beweis: Ist $a \geq 10$, schreibe $a = 10 + b$ mit $b \geq 0$. Dann ist $a^n = (10 + b)^n \geq 10^n = 10 \ldots 0$, eine Zahl mit $n + 1$ Ziffern und diese kann daher nicht n-ziffrig sein.

(3) Behauptung: n muss kleiner oder gleich 21 sein.
Beweis: Für eine n-ziffrige Potenz a^n gilt $10^{n-1} \leq a^n$ und mit (2) folgt $10^{n-1} \leq a^n \leq 9^n$. Wegen $9^{22} < 10^{21}$ gilt $a^n < 10^{n-1}$ für $n \geq 22$. Also ist $n \leq 21$.

(4) Nun wissen wir, dass $2 \leq a \leq 9$ und $n \leq 21$ sein muss. Die verbliebenen $8 \cdot 21 = 168$ Einzelfälle kann man mit einem Computer durchprobieren und findet, dass es genau 48 Lösungen gibt, die größte davon ist 9^{21}.

Impressionen von der Monoid-Feier

Gewinner eines 1. Preises

Gewinner eines 2. Preises

Gewinner eines 3. Preises

Gewinner eines 4. Preises

Vater von Philippos Dimitriou nimmt stellvertretend für seinen Sohn das Goldene M entgegen

Wiebke Goez ist nicht nur Preisträgerin sondern begeistert auch durch ihr Klavierspiel

Prof. Dr. Kaenders hält den Festvortrag

Auch Noemi Schulteis begeisterte am Flügel

MONOID-Jahresfeier 2024

10 Uhr, 16.11.24, Alte Mensa der Universität Mainz

Festvortrag

„Geometrie mit Stangen“

Prof. Dr. Rainer Kaenders (Universität Bonn)

Ebene Stangenkonstruktionen finden sich überall; man muss nur lernen sie zu sehen. Zum Beispiel Antiparallelogramme, Panto- und Plagiographen und Koppelkurven finden sich in Bustüren, Kränen und vielen, vielen anderen Alltagsphänomenen. Sie bieten wunderbare Gelegenheiten für elementare Geometrie, wie sie in der Schule behandelt werden kann.

Anschließend werden die erfolgreiche Löserinnen und Löser des Schuljahres 2023/24 mit Urkunden und Preisen geehrt.
Alle Interessierten sind herzlich eingeladen, an der MONOID-Feier 2024 teilzunehmen.

https://bildung.rlp.de/mint/aktuelles/aktuelles/nachrichten-einzelansicht/monoid-jahresfeier-2024

1

Die Monoid-Redaktion bedankt sich herzlich bei Prof. Dr. Kaenders für den Festvortrag, bei Wiebke Goez und Noemi Schulters für die musikalische Begleitung, bei dem Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz e.V. sowie bei allen Helferinnen und Helfern, die die Feier ermöglicht haben.

Monoid–Preisträger 2024

Das Goldene M: Philippos Dimitriou (Freising, Josef-Hofmiller-Gymnasium).
Monoid-Fuchs: Mai Linh Dang (Tangermünde, Diesterweg-Gymnasium).
Forscherpreis: Lea Amend (Mainz, Otto-Schott-Gymnasium).
1. Preise: Lea Amend, Tu Sam Dang, Jonas Dürkes, Christina Karst, Johannes Kiehn, Eleanor Kondla, Georgi Koynov, Daniel Laibach Muñiz, Ioan Salaru.
2. Preise: Nils Angel, Felicitas Bauer, Erik Eberlein, Joschua Jung, Peter Knobloch, Kadir Koçyiğit, Philippa Lamke, Nico Mathy, Victor Mayer, Dóra Emilia Mézáros, Lisa Schäfer.
3. Preise: Jabir Aouzi, Jasmin Borrmann, Malcom Carandany, Quirin Fritsch, Niklas Gelhausen, Wiebke Goez, Tim Jockers, Nikolas Kaminski, Boris Petkot, Till Radünz, Sina Marie Uherek Reyes, Robert Schmitt, Martin Schroff, Aleksandr Silantev, Sascha Sprengler, Rachel Tao, Mai Chi Tran, Stefan Wolfert.
4. Preise: (Monoid-Jahresabonnements 2023): Imran Aouzi, Marie Baumgartner, Emilie Borrmann, Noah Fitting, Maria Kröner, Philipp Mühl, Philip Mühlbeyer, Felix Pick, Melina Rumpf, Silas Salloch.

Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgerinnen und Preisträgern des Schuljahres 2023/2024 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die Preise für die Träger des Goldenen M und des Monoid-Fuchses hat Herr Dr. Ralf Genannt gespendet.
Der Forscherpreis und die 1. Preise wurde von dem Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. gesponsert.
Die 2., 3. und 4. Preise wurden durch das Sondervermögen „Wissen schafft Zukunft“ zur Verbesserung der Studienbedingungen an der Johannes Gutenberg-Universität finanziert.
Die Monoid-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 157

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Levi Brunn 4, Noah Fitting 10, Quirin Fritsch 17, Christina Karst 75,5, Felix Pick 8.5, Sina Marie Uherek Reyes 23;
Kl. 7: Robert Schmitt 25;
Kl. 8: Nikolas Kaminski 26, Peter Knobloch 48, Lisa Schäfer 49.5;
Kl. 9: Rachel Tao 21,5, Mai Chi Tran 22

Bingen, Stefan-George Gymnasium
Kl. 6: Tim Jockers 25;
Kl. 7: Clemens Pie 4;
Kl. 9: Smilla Kleffman 6, Semen Ludlik 2;
Kl. 10: Lena Rohr 4

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 6: Cornelia Meyer 6, Silas Salloch 10, Joana Schwettlick 6;
Kl. 9: Aleksandr Silantev 19

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 7: Nico Mathy 36, Philip Mühlbeyer 8;
Kl. 8: Wiebke Goez 14,5

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 10: Malcom Carandany 20, Philippos Dimitriou 95

Grünstadt, Leininger-Gymnasium
Kl. 6: Stefan Wolfert 16;
Kl. 8: Erik Eberlein 33,5, Niklas Gelhausen 18,5, Till Radünz 16

Idar-Oberstein, Göttenbach-Gymnasium
Kl. 10: Joschua Jung 24

Ingelheim, Sebastian-Münster Gymnasium:
Kl. 11: Eleanor Kondla 59

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 6: Imran Aouzi 10;
Kl. 10: Jabir Aouzi 27

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:
Kl. 7: Maria Kröner 9;
Kl. 8: Nikita Mallasch 5
Kl. 9: Mia Milijana Tišma 5;
Kl. 11: Kadir Koçyiğit 50, Boris Petkot 22

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 6: Jonas Dürkes 73;
Kl. 8: Philippa Lamke 41

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 9: Victor Mayer 30; Lea Amend 62,5

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 7: Ioan Salaru 60

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 6: Philipp Mühl 10, Martin Schroff 15;
Kl. 8: Jona Goldmann 3, Daniel Laibach Muñiz 98,5;

Kl. 9: Johannes Kiehn 70;
Kl. 10: Georgi Koynov 77,5;
Kl. 12: Sascha Sprengler 20

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Otto-Schule
Kl. 6: Eric Reichardt 6;

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 9: Jasmin Borrmann 19;
Kl. 10: Dóra Emilia Mézáros 35, Emilie Borrmann 11

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 11: Nils Angel 52;

Schifferstadt, Paul-von-Denis-Gymnasiums
Kl. 11: Melina Rumpf 11

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 9: Mai Linh Dang 108,5;
Kl. 12: Tu Sam Dang 86

Trier, Angela-Merici-Gymnasium:
Kl. 11: Felicitas Bauer 46

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:
Kl. 10: Marie Baumgartner 12

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 6: Sultan Amer 6, Helena Röhrenbeck 1, Jana Röhrenbeck 1

Schülerinnen und Schüler, bei denen keine Schule angegeben wurde:
Kl. keine Angabe: Manuel Heuss 6

Erratum

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal Fehler ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken. So auch in Heft 159:

- **Augensumme zweier Spielwürfel (Monoid 159, Seite 25)**
  In der Lösung von Aufgabenteil b) wurde fälschlicherweise die Gegenwahrscheinlichkeit berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, mit der man mindestens drei Würfe benötigt bis die Augensumme erstmals größer als sieben ist, beträgt $\frac{7}{12}$.
  Vielen Dank an Herr Kadir Koçyiğit, der uns auf diesen Fehler hingewiesen hat.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2024/25 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
  `www.facebook.com/monoid.matheblatt`
  `www.facebook.com/monoid.redaktion`
  `www.instagram.com/monoid.matheblatt`
  Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
  Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Claudia Jockers, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf mit freundlicher Unterstützung von Leonard Bollhöfer und Daris Mohammadzadeh
Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.
Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Jahrgang 44 Heft 160 Dez. 2024

Inhalt

E. Kondla: Vier Tage universitäre Mathematik . . . 3
H. Fuchs: Eine mathematische Miniatur . . . 4
H. Fuchs: Die besondere Aufgabe . . . 4
F. Rehm: Mathematische Miniatur . . . 5
H. Fuchs: Beweis ohne Worte . . . 5
H. Fuchs: Monodiale Knobelei . . . 6
H. Fuchs: Was steckt dahinter? . . . 7
H. Fuchs: Wo liegt der Fehler? . . . 8
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke . . . 9
H. Fuchs: Reguläre Parkettierungen der Ebene . . . 10
H. Sewerin: Das Denkerchen . . . 12
H. Fuchs: Eine Gratwanderung . . . 13
H. Fuchs: Was uns über den Weg gelaufen ist . . . 15
Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 159 . . . 15
Neue Mathespielereien . . . 19
Neue Aufgaben . . . 21
Gelöste Aufgaben aus Monoid 159 . . . 22
J. Gallenbacher: Für Freunde des inspirierten Programmierens . . . 25
D. Mohammadzadeh: Aus dem mathematischen Adventskalender . . . 28
Mathematische Entdeckungen . . . 30
Impressionen von der Monoid-Feier . . . 32
Monoid–Preisträger 2024 . . . 36
Rubrik der Löserinnen und Löser . . . 36
Erratum . . . 38
Mitteilungen . . . 39
Redaktion . . . 39

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid