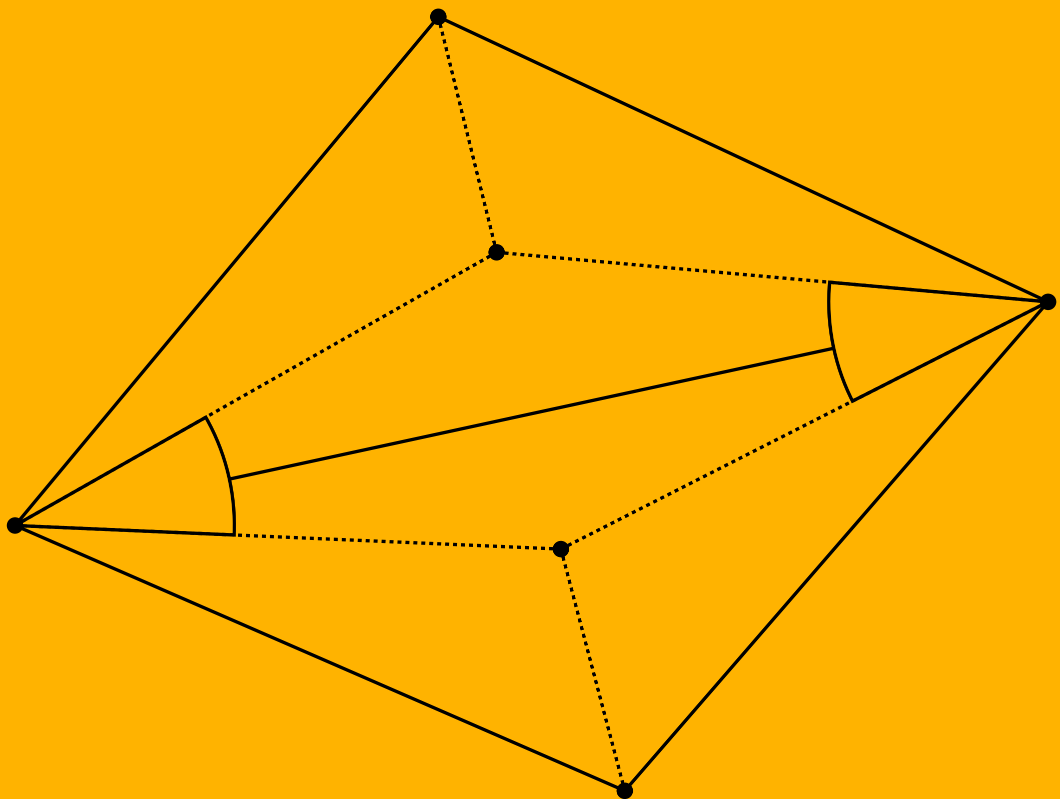
Jahrgang 45 Heft 162 Juni 2025

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **31. August 2025.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Mainzer Mathe-Akademie
10. September bis 14. September 2025

Bei der Mainzer Mathe-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern, unter der Anleitung von Professorinnen und Professoren der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathe-Akademie anzumelden, die vom 10. September bis 14. September 2025 an der Universität Mainz stattfindet.
Ein genauer Programmplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben oder kann auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Unterbringung

Jugendhaus Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

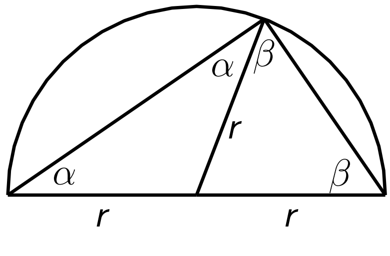
Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:
`https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/`

Eine mathematische Miniatur
Beweis des Satzes von Thales

$\alpha + \beta = ?$



$2\alpha + 2\beta = 180°$ $\Rightarrow$ Es gilt der Satz des Thales: $\alpha + \beta = 90°$. H. F.

Wo liegt der Fehler?
Hütte oder Schirm

Bei einer Wanderung im Gebirge werden Quaoar und Pnin von einem herannahenden Gewitter überrascht. Es entspinnt sich ein Dialog zwischen Q. und P.
P: (1) „Nichts schützt besser als eine Hütte."
Q: (2) „Ein Schirm schützt besser als nichts."
P: „Nach dem logischen Schema

(1') N schützt besser als H

(2') S schützt besser als N

kann man aus (1) und (2) die Aussage

(3) Ein Schirm schützt besser als eine Hütte

folgern. Ich kann aber diese Aussage nicht akzeptieren, obgleich sie doch gemäß ihrer Herleitung unbezweifelbar scheint."
Q: „Die Gültigkeit des logischen Schemas setzt voraus:

- Die Aussagen (1') und (2') sind wahr;
- Der in (1') und (2') vorkommende Term N hat in beiden Fällen die gleiche Bedeutung.

Wie steht es damit bei der Herleitung von (3)?"
Zunächst dürfen wir voraussetzen, dass (1) und (2) wahr sind. Dann sollte das in (1) und (2) vorkommende Wort „nichts" jeweils die gleiche Bedeutung besitzen.

Annahme

Es gilt: „nichts" hat in (1) und (2) die gleiche Bedeutung.
In (1) wird festgestellt, dass es kein schützendes Objekt gibt, das besser schützt als eine Hütte. Insbesondere gilt daher: Ein Schirm schützt nicht besser als eine Hütte – im Widerspruch zu (3).
Die Anwendung des Herleitungsschemas auf die Aussagen (1) und (2) ist also unzulässig und damit ist (3) unbewiesen – also durchaus bezweifelbar.
Es bleibt die Frage: Welche Bedeutung hat das Wort „nichts" in (1) und welche in (2)?
(1) besagt: In der Menge aller im Gebirge vor einem Unwetter schützende Objekte gibt es keines („nichts"), das besser schützt als eine Hütte.
In (2) bedeutet „nichts": Ein schützendes Objekt – etwa ein Schirm – ist besser als kein solches.
Völlig durchnässt erreichen Quaoar und Pnin einen Heuschober, in den sie sich vor weiteren Regengüssen retten. H. F.

Was uns über den Weg gelaufen ist
Eine bemerkenswerte Darstellung der Zahl 2

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, in deren Dezimaldarstellung die Ziffernfolge Z nach dem Komma nicht wie bei rationalen Zahlen endlich oder periodisch ist.

Beispiel

Die ersten 30 Ziffern nach dem Komma von $\sqrt{2}$ sind

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,\ldots\,.$$

Mit einem Computer kann man weitere Ziffern berechnen – aber immer nur endlich viele, denn bis heute kennt man keine Regel, mit der man jede Ziffer von Z bestimmen kann. Daher ist der exakte Wert von $\sqrt{2}$ unbekannt.

Wenn man nun den Turm $T_n^* = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}}}}}$ mit n übereinander gestapelten $\sqrt{2}$, $n \geq 1$ – kurz: T_n^* mit n Stockwerken $\sqrt{2}$ – bildet, dann erhält man einen unvorstellbar ungenauen Ausdruck, dessen Wert zudem nicht eindeutig ist.

Beispiel

Welchen Wert hat $z = 2^{3^2}$? Für z sind zwei verschiedene Werte möglich: $z = \left(2^3\right)^2 = 64$ und $z = 2^{\left(2^3\right)} = 256$.
Zur eindeutigen Festlegung des Wertes einer Zahl a^{b^c} hat man sich für die Regel entschieden $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$.
Diese Regel erlaubt nun die Zähmung des numerischen Monsters T_n^* für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Es sei T_n der Turm $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}^2}}}}$ mit n Etagen $\sqrt{2}$ und der $n+1$-ten Etage 2. Wegen $\sqrt{2}^2 = 2$ gilt mit der Regel oben:

$$(1)\quad T_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}}}}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}}}}} = T_{n-1} = \sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}}}} = T_{n-2} = \ldots = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = T_2 = \sqrt{2}^2 = T_1 = 2$$

(2) Für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt also $T_n = 2$.

Eine Erklärung dieser zunächst wohl überraschenden Ergebnisse ist leicht zu finden. Es sei $\uparrow_2$ der Operator, der jede positive reelle Zahl a quadriert.

$$a \xrightarrow{\uparrow_2} a \uparrow_2 = a^2$$

Mit dem Symbol $\sqrt{\ }$ wird dann der Operator bezeichnet, der für jede positiv-reelle Zahl a durch das folgende Schema festgelegt ist:

$$a \xrightarrow{\ \sqrt{\ }\ } \sqrt{a} \xrightarrow{\ \uparrow_2\ } a \text{ - kurz: } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Für den Turm T_n bedeutet das: Seine n-te und $(n+1)$-te Etage $\sqrt{2^2}$ kann durch die eine Etage 2 ersetzt werden, sodass T_n sich reduziert auf den Turm T_{n-1}. Diese Ersetzung kann man nun der Reihe nach auch bei den Türmen T_{n-1}, T_{n-2}, ... und schließlich bei T_1 durchführen. Daher gilt die Behauptung (2) – wie die Gleichungskette (1) zeigt und damit ist T_n^* durch T^n gezähmt.

H. F. nach einem Hinweis von F. R.

Konvergenz

von Stefan Deichmann

Einführung

Jeder, der sich mit Mathematik befasst, kennt das: Die Summe $z + z + z + ...$ aus n Zahlen z kann man kürzer als Produkt $n \cdot z$ schreiben. Ganz entsprechend kann man das Produkt $z \cdot z \cdot z \cdot ...$ aus n Zahlen z mit der Potenz z^n darstellen; insbesondere setzt man $z = z^1$.

Die Potenzschreibweise ist eine Schreibweise für Produkte aus den stets gleichen Faktoren. So ergibt sich beispielsweise $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$. Oder andersherum: $6^2 = 6 \cdot 6$. Diejenige Zahl, die bei der Potenz mit sich selbst mehrfach multipliziert wird (in den Beispielen die Zahl 4 und die Zahl 6), heißen Grundzahl oder Basis. Die Zahl, die die Anzahl angibt, wie oft die jeweilige Zahl mit sich selbst multipliziert wird (in den Beispielen die Zahl 3 und die Zahl 2), heißen Hochzahl oder Exponent.

Folgen mit veränderlichen Exponenten

Zunächst betrachten wir die Potenzen mit der Basis 2, also die Potenzen 2^1, 2^2, 2^3, ... Wir vergleichen die Werte der genannten Potenzen. Es ergibt sich $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, ... Die Folgenglieder der Folge der Zweierpotenzen verdoppeln sich, sie werden also immer größer. Man spricht von Divergenz der Zahlenfolge. Wenn wir die Folgenglieder der Potenz mit der Basis $\frac{1}{2}$ hinsichtlich ihrer Größe vergleichen, halbieren sich die Werte der Folgenglieder. Die Folgenglieder laufen auf die Zahl Null zu („Nullfolge“). Man sagt: die Folge konvergiert.

Die Potenzen mit den Basen 0 und 1 liefern stets die gleichen Folgenglieder. Man spricht von „konstanten Folgen“. Diese Folgen konvergieren offensichtlich. Tatsächlich gilt:

- Wenn die Basen zwischen 0 und 1 liegen, dann konvergiert die Folge.

- Wenn die Basen größer als 1 sind, dann divergiert die Folge.

Folgen mit veränderlichen Basen

In einem ersten Schritt betrachten wir die Folge der Quadratzahlen, also 1^2, 2^2, 3^2, ... Diese Folge divergiert. In einem zweiten Schritt betrachten wird die Folge der reziproken Quadratzahlen, also $\left(\frac{1}{1}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, ... Diese Folge konvergiert und ist eine Nullfolge.

Dann gilt: Sei z_m mit $m = 1, 2, 3, \ldots$ eine beliebige Folge nichtnegativer Zahlen und n eine natürliche Zahl. Die Folge $(z_m)^n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge z_m konvergiert.

Übung

(1) Entscheide, ob die Zahlenfolge, die sich ergibt, wenn man im Ausdruck $2 + 3^4$ die Basis von Schritt zu Schritt drittelt, konvergiert oder divergiert. Begründe deine Entscheidung.

(2) Stelle eine Zahlenfolge auf, die auf eine Potenz zurückzuführen ist und divergiert.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Um die Klasse während einer Vertretungsstunde zu beschäftigen, schreibt die Lehrkraft zunächst 162 von Null verschiedene reelle Zahlen an die Tafel. Dann erlaubt sie den Kindern, nacheinander jeweils zwei Zahlen a und b an der Tafel auszuwählen, sie wegzuwischen und stattdessen die Zahlen $a + \frac{b}{2}$ sowie $b - \frac{a}{2}$ auf die leeren Plätze zu schreiben.

Ist es möglich, dass nach einigen dieser Schritte wieder die ursprünglichen 162 Zahlen an der Tafel stehen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2025 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 160

In Heft 160 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Peter und Paul treffen sich nach der Schule. „Ich hätte mal wieder Lust, mit dir ins Kino zu gehen“, meint Peter. „Wollen wir mit einer Wette entscheiden, wer den Eintritt bezahlt?“ Paul entgegnet: „Wenn die Wette fair ist, bin ich einverstanden.“ „Gut“, sagt Peter. „Wir treffen uns heute Abend vor dem Kino, und wenn du mir die richtige Antwort mitbringst, zahle ich. Wenn nicht, zahlst du unseren Eintritt.“ „OK“, erwidert Paul, „um was geht es?“

„Du musst mir heute Abend sagen, ob du sieben verschiedene positive ganze

Zahlen gefunden hast, deren Summe 100 beträgt und die eindeutig durch die viertgrößte Zahl unter ihnen bestimmt sind. Oder du begründest, dass das nicht geht", erklärt Peter. „Na dann bis heute Abend", antwortet Paul.
Welche richtige Antwort kann Paul am Abend mitbringen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Wenn die viertgrößte Zahl 22 ist, dann beträgt die Summe der vier größten Zahlen wenigstens $22+23+24+25 = 94$. Für die drei kleinsten Zahlen verbleibt höchstens die Summe 6, aber weil bereits $1 + 2 + 3 = 6$ gilt, ist die Darstellung eindeutig. Wenn die viertgrößte Zahl größer als 22 ist, kann es daher gar keine Lösungen geben; ist sie kleiner als 22, so gibt es offensichtlich mehr als eine Darstellung.
Richtige Lösungen wurden von Lea Amed und Jasmin Borrmann eingesandt.
Den restlichen Tag über hat Peter darüber nachgedacht, ob es auch eine eindeutige Lösung geben kann, wenn die sieben Zahlen nicht verschieden sein müssen. Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

David Acheson: Das Wunder der Geometrie

Der britische Mathematiker David Acheson hat in seinem Buch spannende geometrische Fragestellungen von der Antike bis heute zusammengetragen.
Manche davon finden sich auch heute noch im Mathematikunterricht wieder. Da der Anteil der Geometrie in den Lehrplänen der letzten Jahrzehnte jedoch leider immer mehr zurückgegangen ist, finden sich auch jede Menge für viele inzwischen unbekannte Inhalte in Achesons Buch.
In der Einleitung zitiert der Autor den Mathematiker Thales (siehe MONOIDHeft 152) aus dem antiken Griechenland: „Laut Thales soll die entscheidende Frage nicht gelautet haben ‚Was wissen wir?', sondern vielmehr ‚Wie können wir das wissen?'" Diese Frage charakterisiert seit Thales bis heute die Mathematik als Wissenschaft.
Nach der Einleitung folgt ein kurzes Kapitel, in dem grundlegende Begriffe der Geometrie, die MONOID-Leserinnen und -Lesern geläufig sein dürften, danach ein Hinweis auf das Buch „Elemente" des Euklid von Alexandria, das in verschiedenen Ausgaben bis ins 19. Jahrhundert nach der Bibel das weltweit am zweithäufigsten gedruckte Buch darstellt und genauso lang als grundlegendes Mathematikbuch höherer Schulen verwendet wurde. Danach werden dann in

29 Kapiteln verschiedene spannende Lehrsätze der Geometrie mit Erläuterungen und Beweis(en) vorgestellt: die Sätze des Thales, Pythagoras, Varignon, die Bestimmung des Erdumfangs in der Antike, Kongruenz und Ähnlichkeit, der goldene Schnitt, Sätze am Kreis, Trigonometrie und viele weitere mehr. Aber auch räumliche Problemstellungen werden durchdacht, so z. B. Kugelpackungen und Kegelschnitte.
Danach folgt die Betrachtung von Koordinaten – die in der Geometrie der Antike keine Rolle spielten, und auch ein kurzer Exkurs zu Leibniz und Newton in die Analysis ist enthalten.
Für besonders Interessierte gibt es noch ein Kapitel zu nicht-euklidischen Geometrien (bei denen 2 Geraden immer einen Schnittpunkt haben, auch parallele Geraden), sowie projektiver und fraktaler Geometrie.
Alle Inhalte werden ausführlich erläutert und durch Zeichnungen veranschaulicht.

Fazit

Zusammengefasst kann man sagen, dass David Acheson eine schöne Zusammenstellung geometrischer Fragestellungen gelungen ist, mit der man sich gerne beschäftigen wird. Jüngere Schülerinnen und Schüler werden vielleicht (noch) nicht alles verstehen, aber durch die breit gefächerte Themenauswahl ist für jeden etwas dabei. Wem die Geometrie in der Schule viel zu kurz kommt, der wird große Freude am „Wunder der Geometrie“ haben.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺ ☺ ☺

Angaben zum Buch

David Acheson: Das Wunder der Geometrie
Anaconda 2022, ISBN 978-3-7306-1076-3, PB 279 Seiten
Art des Buches: Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau: gut verständlich
Altersempfehlung: ab 11 Jahren (je nach Kapitel)

Die Ritter des L. Carroll

Lewis Carroll (eigentlich: Charles Lutwidge Dodgson, 1832–1898), englischer Mathematiker und Logiker, der das zu Recht berühmte Buch „Alice's Adventures in Wonderland“ (1865) schrieb, stellte in seiner noch heute lesenswerten Problemsammlung „A Tangled Tale“ (1885) die folgende Aufgabe, die wir hier nicht als wörtliche Übersetzung, sondern mit unseren eigenen Formulierungen wiedergeben.

Die Aufgabe

Zwei Ritter wandern in sechs Stunden in der Ebene von A nach B mit der konstanten Geschwindigkeit von $4\frac{\text{mi}}{\text{h}}$ („vier Meilen pro Stunde“), sodann von B

einen Hügel hinauf nach C mit konstanten $3\frac{\text{mi}}{\text{h}}$, auf dem gleichen Weg zurück von C nach B mit konstanten $6\frac{\text{mi}}{\text{h}}$ und von B nach A wieder mit konstanten $4\frac{\text{mi}}{\text{h}}$. Welchen Weg haben die Ritter – gemessen in Meilen – zurückgelegt?*

Die Lösung

Die Länge der Strecke AB sei a, die von BC sei b. Die Ritter benötigen folgende Zeiten zum Durchwandern

der Strecke AB: $\frac{1}{4}a$ Stunden – denn: für vier Meilen brauchen sie 1h,
für eine Meile also $\frac{1}{4}$ Stunden,
für a Meilen daher $\frac{1}{4}a$ Stunden.

der Strecke BC: $\frac{1}{3}b$ Stunden,

der Strecke CB: $\frac{1}{6}b$ Stunden,

der Strecke BA: $\frac{1}{4}a$ Stunden.

Insgesamt wandern die Ritter $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}b + \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}(a+b)$ Stunden. Da nun die Gesamtstrecke $ABCBA$ die Länge $2(a+b)$ hat, ist $\frac{2(a+b)}{\frac{1}{2}(a+b)}\frac{\text{mi}}{\text{h}} = 4\frac{\text{mi}}{\text{h}}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit der Ritter – pro Stunde legen sie also durchschnittlich vier Meilen zurück. Ihr Weg bei ihrer sechs-stündigen Wanderung ist also 24 Meilen lang.

Carroll gibt einen anderen Lösungsweg an – vielleicht finden ihn unsere Leser. (H. F.)

Enttäuschte Erwartungen
Voraussage über farbige Kugeln

Bei einem Ratespiel soll ein Kandidat aus einem Behälter mit zwei roten (r) und einer weißen (w) Kugel mit verbundenen Augen zwei Kugeln ohne Zurücklegen entnehmen.

Er gewinnt, wenn er richtig voraussagt, ob das Ergebnis seiner Entnahme Kugeln von verschiedener (V) oder von gleicher (G) Farbe sein wird.

Der Kandidat wird so überlegen: „In dem Behälter sind die roten Kugeln in der Überzahl. Es ist also wahrscheinlicher, dass ich zwei gleichfarbige als dass ich zwei verschiedenfarbige Kugeln ziehe.

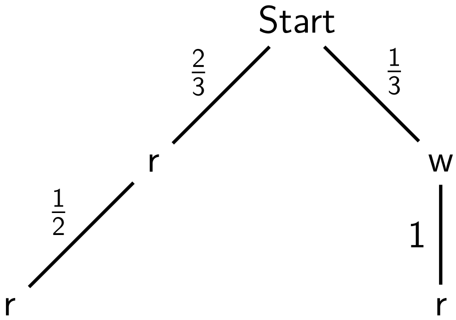
Also tippe ich auf das Eintreten des Ereignisses G: Die beiden Kugeln sind rot."

Ist diese Überlegung stichhaltig?

---

* Die englische sogenannte „statute mile" ist 1609,344m lang.

Mit $P(G)$, $P(V)$ seien die Wahrscheinlichkeiten der Realisation von G : zwei rote Kugeln bzw. V : zwei verschiedenfarbige Kugeln bezeichnet. Dann gilt (vgl. das Diagramm):



$$P(V) = P(r, w \text{ oder } w, r) = P(r, w) + P(w, r)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$
$$P(G) = 1 - P(V) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Die Überlegung des Kandidaten ist falsch. Denn aus $P(V) > P(G)$ folgt, dass der Kandidat häufiger gewinnt, wenn er V anstelle von G tippt. Ganz ohne Baumdiagramm kommt man übrigens aus, wenn man die dritte (nicht gezogene) Kugel betrachtet. Diese ist mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ weiß und dies ist genau der Fall G, in dem die beiden ersten Kugeln rot sind. H. F.

Es gibt einen geometrischen Satz, den selbst die Esel kennen

von H. Fuchs

Euklid (um 300 v. Chr.) schrieb das einflussreichste und langlebigste Lehrbuch der Geometrie – die „Elemente". Noch Anfang des 20. Jahrhunderts wurde es in einigen Ländern als Schulbuch benutzt. Arme Schüler! Die „Elemente" sind nämlich streng logisch und mit einer so ausschweifenden Ausführlichkeit aufgebaut, dass das Arbeiten mit dem Buch nicht nur ziemlich schwierig, sondern streckenweise auch recht trocken und langweilig ist.

Euklid beginnt mit einer Liste (A_1, ...,A_{10}) von zehn Axiomen – also mit zehn Sätzen, die er als unbewiesene, aber wahre Aussagen an den Anfang seiner Geometrie setzte. Aus diesen Axiomen leitet er seinen ersten Satz S_1 ab; aus dem System (A_1, ..., A_{10}, S_1) beweist er seinen zweiten Satz S_2, usw. Und so gelangt er zum

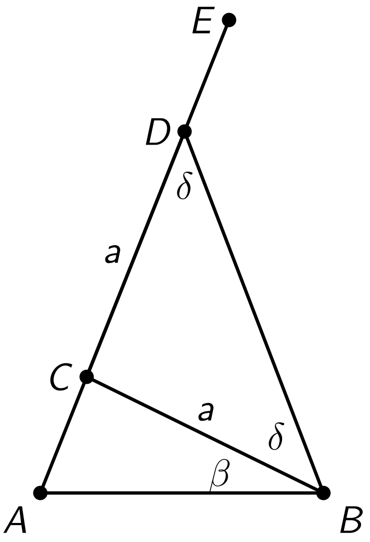
Satz S_{23}

In einem Dreieck liegt der größten Seite der größere Winkel gegenüber. Danach beweist er mit (A_1, ..., A_{10}, S_1, ... ,S_{23}) seinen Satz S_{24}, von dem behauptet wurde, dass ihn auch die Esel kennen!

Satz S_{24}

In einem Dreieck sind zwei Seitenlängen zusammen größer als die Länge der dritten Seite. Dieser wichtige geometrische Satz wird die Dreiecksgleichung genannt.

Beweis (nach Euklid)



Es genügt, von den drei möglichen Dreiecksungleichungen für ein Dreieck ABC nur eine zu beweisen. Wir zeigen, dass gilt:

(1) $|AC| + |CB| > |AB|$.

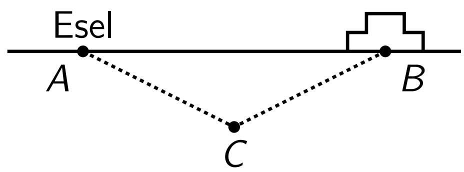
Verlängere AC bis zu einem Punkt E, so dass $|CE| > |CB|$ ist. Auf CE trage man von C aus eine Strecke der Länge $a = |CB|$ ab; man erhält so den Punkt D.
Zeichne die Strecke DB.
Wegen $|CD| = |CB|$ ist das Dreieck CBD gleichschenklig und daher sind die Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle DBC$ gleich groß (Euklids Satz S_5).

Für das Dreieck ABD gilt nun mit Satz S_{23}: Aus $\sphericalangle DBA = \beta + \delta > \delta = \sphericalangle BDA$ folgt: $|AC| + |CD| > |AB|$ und wegen $|CD| = |CB|$ gilt (1).

Zu Euklids Satz S_{24} gibt es eine hübsche Anekdote, die uns in einem Kommentar des byzantinischen Philosophen und Mathematiker Proklos Diachdochos (421 - 485) zum 1. Buch von Euklids „Elemente" überliefert ist und die von einer angeblichen „Beziehung" zwischen dem Satz S_{24} und den Eseln handelt.

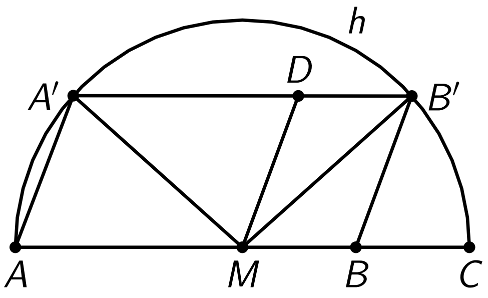
Die Epikureer, eine Gruppe athener Philosophen der Antike, die sich der Lehre von der Kunst des Lebens widmeten, vertraten die Auffassung, die Quelle der Erkenntnis sei die sinnliche Wahrnehmung und nicht etwa die Logik. Als Beispiel für die Richtigkeit ihrer Ansicht führten sie den Satz S_{24} Euklids Dreiecksungleichung ins Feld. Sie behaupteten: „Jeder Esel kennt die Dreiecksungleichung".

Die epikureische Begründung



Wenn man einen hungrigen Esel an den Eckpunkt A eines Dreiecks ABC stellt und eine Portion frisches Gras an dem Eckpunkt B hinlegt, dann sieht der Esel:
Will er möglichst schnell an sein Futter gelangen, so darf er keineswegs längs der Strecken AC und dann CB laufen, weil dieser Weg länger als die Strecke AB ist. Die Anschauung lehrt also den Esel: Es gilt die Dreiecksungleichung.

Proklos urteilt über diese Geschichte so:
Die Wahrheit eines Satzes sehen ist etwas ganz anderes als sie mit einem logischen Beweis zu begründen – womit er sicher Recht hat, denn die Anschauung kann leicht irreführen, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.



Im Halbkreis h mit dem Durchmesser AC sei $A'B'$ eine zu AC parallele Sehne mit $A'B' \in h$. Es gibt dann auf AC einen Punkt B und auf A', B' einen Punkt D, so dass gilt:
MD und BB' sind parallel zu AA'. Daher sind $p_1 = MDA'A$ und $p_2 = MBB'D$ Parallelogramme.
Welche der Diagonalen MA' von p_1 und MB' von p_2 ist die längere? Die Anschauung sagt: $|MA'| > |MB'|$.
Tatsächlich gilt: $|MA'| = |MB'|$, denn MA' und MB' sind Radien von h.

Fische zählen

von Hartwig Fuchs

Bei einem Spaziergang gelangt der Mathematiker Quaoar (Q) an einen Teich, wo er einen Bekannten trifft, von dem er weiß, dass er Karpfen und Forellen züchtet. Sie kommen ins Gespräch, in dessen Verlauf der Fischzüchter (Z) nachdenklich sagt:
Z: „Wie viele Fische gibt es wohl in meinem Teich und wie viele davon sind Karpfen, wie viele sind Forellen?“

Q: „Ich kenne eine Methode, mit der man das zumindest angenähert herausfinden kann. Mann verfährt dabei so.

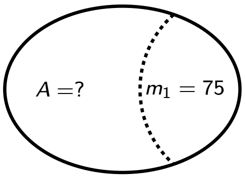
(1. Schritt) Man fängt eine beliebige, nicht zu kleine Anzahl m, von Fischen – etwa $m_1 > 50$, markiert sie mit Farbe und wirft sie in den Teich zurück.

(2. Schritt) Am Tag darauf fängt man wieder eine beliebige Anzahl a von Fischen – z. B. $a > 50$, und bestimmt die Anzahl m_2 der markierten Fische sowie die Anzahl k der Karpfen im Fang.

(3. Schritt) Aus den Zahlen m_1, m_2 und k berechnet man eine Antwort auf die obige Frage.“

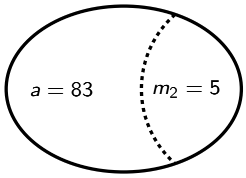
Q sprach’s und spazierte davon.
Am nächsten Tag treffen sich Q und Z erneut am Teich.
Z: „Gestern habe ich $m_1 = 75$ gefangen, markiert und zurück in den Teich befördert. Heute habe ich $a = 83$ Fische gefangen. Davon sind $m_2 = 5$ markiert und $k = 53$ sind Karpfen.“

Q: „Aus den Zahlen m_1, m_2 und a lässt sich die ungefähre Anzahl A aller Fische im Teich berechnen.



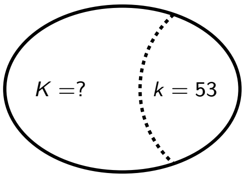
1. Fang

Aus dem 1. Fang ergibt sich: Der Anteil der $m_1 = 75$ markierten Fische an der Gesamtzahl A aller Fische im Teich beträgt $\frac{m_1}{A} = \frac{75}{A}$.



2. Fang

An den $a = 83$ Fischen des 2. Fangs haben die $m_2 = 5$ markierten Fische den Anteil $\frac{m_2}{a} = \frac{5}{83}$. Da die Fische des 1. Fangs sich über Nacht „gleichmäßig" unter die übrigen Fische im Teich gemischt haben dürften, ist wohl die Annahme gerechtfertigt:
Der Anteil $\frac{m_1}{A}$ der markierten m_1 Fische des 1. Fanges an den A Fischen im Teich ist annähernd gleich dem Anteil $\frac{m_2}{a}$ der m_2 markierten Fische an den a Fischen des 2. Fanges – also:
$\frac{m_1}{A} \approx \frac{m_2}{a}$ und daher $\frac{75}{A} \approx \frac{5}{83}$, woraus folgt: $A \approx 1245$.



Ganz entsprechend ergibt sich aus der Annahme, dass der Anteil der $k = 53$ Karpfen im 2. Fang ungefähr gleich groß ist wie der Anteil aller K Karpfen an den $A \approx 1245$ Fischen im Teich, also: $\frac{K}{1245} \approx \frac{k}{83}$. Daher sind $K \approx 795$ Karpfen und folglich $F \approx 450$ Forellen im Teich.
Z: „Ich habe zwar nicht alles verstanden – in der Schule war Bruchrechnen nicht meine Stärke –, aber gegen die angewandte Zähl-Methode ist wohl nichts einzuwenden."
Mit den abschließenden Worten „Davon sollte man ausgehen" schritt Quaoar von dannen.

Q's Zähl-Methode bildet einen Zugang zu den grundlegenden Fragen der Statistik:
Wie groß ist eine Population, deren Elemente man aus praktischen Gründen nicht abzählen kann?
Und wie viele Elemente eines vorgegebenen Typs befinden sich unter den Elementen einer Population?

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 161

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Anordnung nach Größen

Für die paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen x, y und z gelte:

(1) $3x - 4 < 3y + 8$

(2) $3z + y < x + 5$

(3) $5y + 4 < x + 3z$

Ordne x, y und z nach wachsender Größe. (H.F.)

Lösung:

Aus Ungleichung (1) folgt: $3x < 3y + 12$, womit (1') $x < y + 4$ gilt.
Aus Ungleichung (2) folgt: Zunächst gilt wegen (1') $x + 5 < y + 9$
$\Rightarrow 3z + y < y + 9$. So erhält man (2') $z < 3$, also $z \leq 2$.
Aus Ungleichung (3) folgt: Wegen $z \leq 2$ gilt $x + 3z < (y + 4) + 6 = y + 10$
$\Rightarrow 5y + 4 < y + 10 \Rightarrow 4y < 6$, womit (3') $y = 1$ gilt.
Aus (2') und (3') folgt $z = 2$ wegen $z \neq y$.
Mit $y = 1$ und $z = 2$ gilt: Aus (1) folgt $x < 5$. Aus (2) folgt $2 < x$ und aus (3) folgt $3 < x$.
Also ist $x = 4$. Somit gilt: $y < z < x$.

II. Ganzzahlige Lösungen

Gegeben sei die Gleichung $29x + 26y = 1000$, in der x und y positiv und ganzzahlig sind.

a) Bestimme durch mathematische Argumentation, wie viele Zahlenpaare (x, y) es höchstens geben kann, für die die Gleichung stimmt.

b) Welche Zahlenpaare lösen die Gleichung? (H.F.)

Lösung:

a) Wegen $29 \cdot 34 < 1000 < 29 \cdot 35$ gilt für jede Lösung: $x \leq 34$. Nun kann aber x nicht ungerade sein. Also ist x gerade und $2 \leq x \leq 34$. Die Gleichung besitzt daher höchstens 17 Lösungen.

b) Durch Raten kommt man zunächst auf die Lösung $(x, y) = (30, 5)$. Wir variieren nun x um ganzzahlige Vielfache von 26 und y um ganzzahlige Vielfache von 29. Damit erhält man: $1000 = 29 \cdot (30 + 26a) + 26(5 + 29b)$. Wegen $1000 = 29 \cdot 30 + 26 \cdot 5$ folgt $b = -a$, also $1000 = 29 \cdot \underbrace{(30 + 26a)}_{x} + 26 \cdot \underbrace{(5 - 29a)}_{y}$. Nur für $a = 0$ und $a = -1$ sind x und y positiv. Neben $(30, 5)$ erhalten wir also einzige weitere Lösung $(4, 34)$.

III. Eine merkwürdige Rechenregel

Es gilt – wie du nachrechnen kannst:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4}$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \cdot 5}.$$

a) Gib ein weiteres Beispiel nach diesem Muster an.

b) Formuliere eine allgemeine Regel, wie man dieses Muster fortsetzen kann.

(Martin Mettler)

Lösung:

Das Muster und ein weiteres Beispiel können durch die folgende Gleichung gebildet werden:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

IV. Bakterien

Eine Bakterienkultur verdoppelt sich in einer Minute. Beobachten wir sie in einem Behälter, so ist dieser nach 28min voll. Wann ist er zu 12,5% gefüllt?

(Susi Ulitzec)

Lösung:

Nach 27 Minuten war der Behälter zu $\frac{1}{2} = 50\%$ aufgefüllt.
Nach 26 Minuten war er zu $\frac{1}{4} = 25\%$ aufgefüllt.
Nach 25 Minuten war er zu $\frac{1}{8} = 12{,}5\%$ aufgefüllt.

V. Quadrat mit Quadratzahlen

In das nebenstehende Quadrat sind die Quadratzahlen der Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass sich die am Rand stehende Summe ergibt.

(Autor/-in unbekannt)

Lösung:

Die Lösung ist im nebenstehenden Quadrat eingetragen.

	70 ↓	84 ↓	131 ↓
122 →	25	16	81
89 →	36	4	49
74 →	9	64	1

VI. 100 Zahlen

M sei eine Menge aus 100 unterschiedlichen, nicht negativen Zahlen.

a) Für je zwei Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$.
Begründe: Höchstens eine Zahl aus M ist < 1; sie ist aber $\neq 0$.

b) Für je vier Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $< \frac{5}{4}$.
Zeige: Dann ist das Produkt aller Zahlen aus $M < 265$. (H.F.)

Lösung:

Es gelte $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{100}\}$.

a) Nehmen wir an $x_1 < 1$. Dann folgt aus $x_1 \cdot x_2 > \frac{5}{4}$, dass $x_2 > 1$ sein muss. Ebenso folgt aus $x_1 \cdot x_3 > \frac{5}{4}$, ..., $x_1 \cdot x_{100} > \frac{5}{4}$, dass $x_3 > 1, \dots, x_{100} > 1$ gilt. Somit ist höchstens eine Zahl aus M kleiner als 1.
Es sei $x_1 = 0$. Dann gilt $x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_3 = \dots = x_1 \cdot x_{100} = 0$, während aber nach Voraussetzung $x_1 \cdot x_2 > \frac{5}{4}$, ..., $x_1 \cdot x_{100} > \frac{5}{4}$ ist. Somit ist keine Zahl aus M gleich 0.

b) Es gilt: $x_1x_2x_3x_4 < \frac{5}{4}$, ..., $x_{97}x_{98}x_{99}x_{100} < \frac{5}{4}$
$\Rightarrow (x_1x_2x_3x_4) \cdot (x_5x_6x_7x_8) \cdot \dots \cdot (x_{97}x_{98}x_{99}x_{100}) < \left(\frac{5}{4}\right)^{25} < 265$.

VII. Der Würfelturm

Fünf normale Würfel sind willkürlich übereinander gestapelt. Die oben liegende Seite des obersten Würfels zeigt eine Zwei. Wie hoch ist die Summe der sichtbaren Würfelaugen? (Sarah Tröbs)

Lösung:

Es sind 72 Augen sichtbar: Die gegenüber liegenden Seiten eines normalen Würfels ergeben immer Sieben. Bei fünf Würfeln, die aufeinander gestapelt sind, ergeben die zehn gegenüber liegenden Seiten zusammen 70. Mit den zwei Augen des obersten Würfels ergibt sich 72.

Neue Mathespielereien

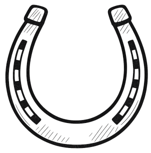
Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 31. August 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Eine Multiplikationsregel

Die zweistellige natürliche Zahl n sei in Ziffernschreibweise: $n = ab$. Wenn $a + b \leq 9$ ist und $a + b = c$ gesetzt wird, dann gilt für das Produkt $n \cdot 11$ in Ziffernschreibweise: $n \cdot 11 = acb$. Zeige dies. (H.F.)

II. Hufeisen

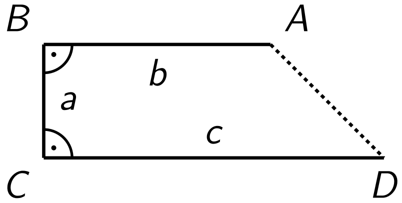


Teile das Hufeisen mit zwei geraden Schnitten in fünf Teile.

(Susi Ulitzsch)

III. Maximale Fläche

Aus drei Strecken der Längen a, b, c mit $a < b < c$ soll ein Rahmen mit den Seiten AB, BC, CD und rechten Winkeln bei B und C konstruiert werden – die



Figur zeigt ein Beispiel. Der Rahmen ist durch eine vierte Strecke AD zu schließen. Wie sollten die Strecken angeordnet werden, damit die Fläche der geschlossenen Figur möglichst groß ist? (H.F.)

IV. Mengen-Aufgabe

Alle 32 Schülerinnen und Schüler einer Klasse nehmen am Fremdsprachenunterricht teil (es wird Englisch und Französisch angeboten). Neun Schülerinnen und Schüler lernen beide Sprachen. Beweise, dass die Anzahl der Englisch lernenden Schülerinnen und Schüler nicht gleich der Französisch lernenden sein kann.

(Martin Mettler)

V. Zwölftausendzwölfhundertzwölf

Schreibe „zwölftausendzwölfhundertzwölf" als eine Zahl. (Bernhard Cuntz)

VI. Ohrringe

In einer Schmuckschatulle liegen 17 gleichartige silberne und 17 gleichartige goldene Ohrringe. Wie viele muss die Besitzerin höchstens herausnehmen, ohne hinzuschauen, bis sie mindestens ein passendes Paar und bis sie neun zusammenpassende Paare in den Händen hält? (Martin Mettler)

VII. Staubsaugervertreter

Balduin und Adel, zwei Staubsaugervertreter, gehen mit verschiedenen Mengen an Staubsaugern in verschiedene Ortschaften. Balduin geht in einer Ortschaft mit 1600 Einwohnern herum. Er stellt am Schluss fest, dass jeder fünfte Einwohner einen Staubsauger gekauft hat und er nur noch zwei Geräte hat. Adel geht in einem Ort herum, der 300 Einwohner weniger hat und stellt zum Schluss fest, dass jeder vierte Einwohner ein Gerät gekauft hat und er alle Geräte verkauft hat. Wer hatte mehr Geräte dabei? Wie viel hat jeder der beiden eingenommen, wenn ein Gerät 318€ kostet? (Silke Lang)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 31. August 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

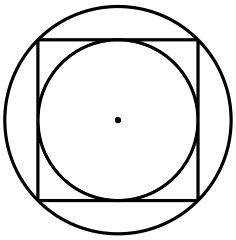
Aufgabe 1372: Gleiche Lösung

Zeige, dass folgende Gleichungen die gleiche Lösungsmenge haben:

$$x^2 + x - 30 = 0$$
$$x^3 - 4x^2 - 35x + 150 = 0$$

(Jens Leilich)

Aufgabe 1373: Kugel - Würfel - Kugel

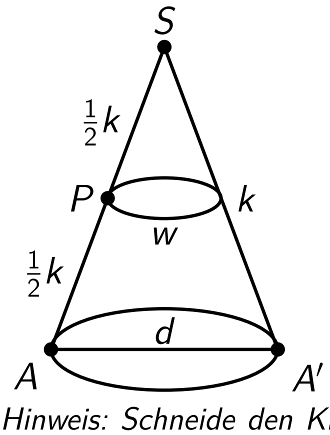


In einem Würfel befindet sich eine Kugel, die sämtliche sechs Würfelseiten von innen berührt. Der Würfel selbst liegt im Inneren einer Kugel, wobei jede Würfelecke in der Kugeloberfläche liegt. Bestimme das Verhältnis, in dem die Volumina der beiden Kugeln und auch ihrer Oberflächen zueinander stehen.

(H. F.)

Aufgabe 1374: Eine Spinne unterwegs

Auf der Oberfläche eines senkrechten Kegels mit einer kreisförmigen Grundfläche vom Durchmesser $d = 50$ und einer Länge von $k = 100$ seiner Kanten von der Kegelspitze S zum Grundkreis, sitzt in halber Höhe des Kegels eine Spinne im Punkt P. Sie krabbelt einmal von P aus um den Kegel herum zurück zum Punkt P.



a) Begründe geometrisch, dass der Weg w der Spinne, der in gleicher Höhe über der Grundfläche des Kegels verläuft, nicht der kürzest mögliche Weg v ist.

b) Zeige rechnerisch, dass $|v| < |w|$ ist (v ist kürzer als w).

(H.F.)

Hinweis: Schneide den Kreismantel längs der Kante SA auf und breite ihn flach in der Ebene auf. Was beobachtest du?

Aufgabe 1375: Mehrfach gesicherter Tresor

a) Der Tresorraum einer Bank sei durch drei Schlösser gesichert. Wie viele Schlüssel braucht man und wie verteilt man sie an die drei leitenden Angestellten, damit keiner alleine, aber jeweils zwei den Tresorraum öffnen können?

b) Wie viele Schlösser und wie viele Schlüssel zu jedem Schloss benötigt man, wenn von vier Personen jeweils zwei nicht öffnen können sollen, aber jeweils drei dazu in der Lage sein sollen?

c) Wie viele Schlösser und Schlüssel braucht man, wenn von n leitenden Angestellten jeweils $k+1$ benötigt werden, um den Tresor zu öffnen?

d) Wenn es im Fall $n = 5$, $k = 2$ Herrn A. und Frau B. gelingt, dem Kollegen C einen seiner Schlüssel zu entwenden, mit welcher Wahrscheinlichkeit können sie dann den Tresorraum öffnen? (Wolfgang J. Bühler)

Aufgabe 1376: Keine Quadratzahl

Zeige: Ist n eine natürliche Zahl, so ist keine der Zahlen $6n+5$ eine Quadratzahl. (Wolfgang J. Bühler)

Aufgabe 1377: Ungleichungen für Ziffernsummen

Es sei $Q(n)$ die Ziffernsumme (= Quersumme) einer positiven ganzen Zahl n. Begründe, dass für jedes $n \geq 10$ gilt:

$$Q(n) < n.$$

(H.F.)

Aufgabe 1378: Teilbarkeit durch 7

a) $x^3 + y^3 + z^3$ sei durch 7 teilbar. Zeige, dass dann auch $x^3 + y^3$ oder $x^3 + z^3$ oder $y^3 + z^3$ durch 7 teilbar ist.

b) Zeige, dass die Aussage für die Teilbarkeit durch 11 nicht gilt. (Wolfgang J. Bühler)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 161

Klassen 9–13

Aufgabe 1365: Ein arithmetisches Problem

Man begründe, dass die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 7642$ genau eine ganzzahlige Lösung besitzt. Wie heißt diese Lösung? (H.F.)

Lösung:

Aus der Gleichung folgt: $x^3 + 2x^2 + 3x = x(x^2 + 2x + 3) = 7638 \Rightarrow$ (1) x ist ein Teiler von 7638.

Nun ist $x > 10$, weil sonst $x^3 + 2x^2 + 3x \leq 1230$ wäre; wäre $x \geq 20$, so wäre $x^3 + 2x^2 + 3x \geq 8860$. Also ist $10 < x < 20$.

Der einzige Teiler von 7638, der die Bedingung (1) erfüllt, ist $x = 19$. Die Probe zeigt, dass $x = 19$ die Lösung der Gleichung ist.

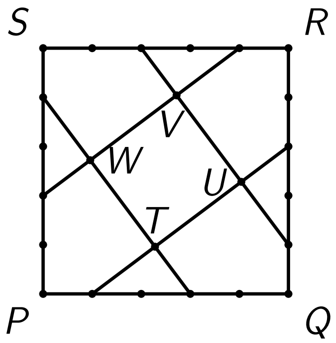
Aufgabe 1366: Verteilung von Punkten in einem Kreis

Im Innengebiet eines Kreises mit Mittelpunkt M liegen 6075 von M verschiedene, rot gefärbte Punkte. Sie seien so im Innengebiet des Kreises verteilt, dass keine zwei rote Punkte auf dem gleichen Radius liegen.
Zeige: Wie auch immer die roten Punkte im Innengebiet verteilt sind, gilt stets: Man kann das Innere des Kreises in drei Sektoren mit der jeweils gleichen Anzahl roter Punkte zerlegen. (H.F.)

Lösung:

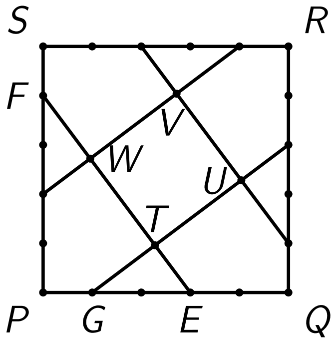
Es sei r ein Radius des Kreises, auf dem kein roter Punkt liegt. Man drehe r mit Drehpunkt M so weit, dass r über genau einen roten Punkt hinweg gedreht ist. Eine solche Drehung wiederhole man dann – in gleicher Drehrichtung – noch 2024 Mal. Damit hat man r über genau 2025 rote Punkte hinweg in einen Radius r' gedreht, auf dem kein roter Punkt liegt.
Auf die gleiche Weise drehe man r' über 2025 rote Punkte hinweg in einen Radius r'' ohne roten Punkt.
Jeder der von den drei Radius-Paaren (r, r'), (r', r'') und (r'', r) bestimmten Kreissektoren enthält dann genau 2025 rote Punkte.

Aufgabe 1367: Flächeninhalt eines Quadrates



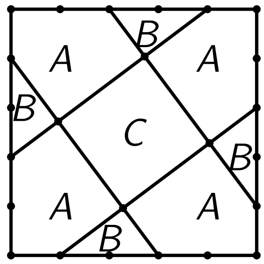
In einem Quadrat $PQRS$ mit der Seitenlänge 25 wird jede Seite in fünf gleich lange Abschnitte geteilt. Dann werden wie in der Abbildung entsprechende Teilpunkte durch Strecken verbunden. Dadurch entsteht in der Mitte ein Quadrat $TUVW$.
Bestimme den Flächeninhalt des Quadrates $TUVW$. (Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$|EF| = \sqrt{|PE|^2 + |PF|^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$.
Aufgrund der drehsymmetrischen Konstruktion (Drehwinkel $90°$) sind die Dreiecke EFP und GET ähnlich (gleiche Winkel) mit dem Ähnlichkeitsfaktor
$k = \frac{|GE|}{|EF|} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Also ist die Fläche des Dreiecks GET $k^2 = \frac{4}{25}$ mal so groß wie die des Dreiecks EFP.

Die ganze Figur enthält je viermal die Flächen A und B sowie die Quadratfläche C. Es gilt: $A+2B = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20 = 150$ und $B = k^2\cdot(A+2B) = \frac{4}{25}\cdot 150 = 24$.
Also ist $A = 150 - 2B = 150 - 48 = 102$. Außerdem ist $4A + 4B + C = 25^2 = 625$.
Daher ist $C = 625 - 4A - 4B = 625 - 408 - 96 = 121$.
Die Fläche des Quadrats $TUVW$ beträgt daher 121.



Aufgabe 1368: 100 Zahlen

M sei eine Menge aus 100 unterschiedlichen nicht negativen Zahlen. Für je sechs Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Zeige: Dann ist das Produkt aller Zahlen aus $M > 35$.

Zum Einstieg kannst du dir Aufgabe VI. auf Seite 16 anschauen. (H.F.)

Lösung:

Es gelte $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{100}\}$. Die Elemente von M seien nach wachsender Größe geordnet, also $x_1 < x_2 < \dots < x_{100}$. Weil das Produkt $x_1x_2\dots x_6 > \frac{5}{4}$ ist, muss mindestens $x_6 > 1$ sein. Dann aber sind auch $x_7, \dots, x_{100}$ alle > 1. Damit folgt $(x_1x_2\dots x_6)\cdot(x_7x_8\dots x_{12})\cdot\dots\cdot(x_{90}x_{91}\dots x_{96})\cdot x_{97}x_{98}x_{99}x_{100} > \left(\frac{5}{4}\right)^{16}\cdot 1^4 > 35$.

Aufgabe 1369: Im Wettbüro

Acht Fußballmannschaften – dargestellt durch die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und 8 – spielen ein Turnier. Zu diesem Zweck werden vier Paarungen ausgelost. In einem Wettbüro können Prognosen für diese Auslosung eingereicht werden.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand genau zwei richtige Paarungen vorhersagt? (Christoph Sievert)

Lösung:

Alle möglichen Paarungen aus acht Mannschaften

12	23	34	45	56	67	78
13	24	35	46	57	68	
14	25	36	47	58		
15	26	37	48			
16	27	38				
17	28					
18						

Insgesamt $\binom{8}{2} = 28$ mögliche Paarungen. Somit sind $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot\frac{1}{4!} = 105$ verschiedene Auslosungen möglich.
Die richtige Auslosung sei nun: $12, 34, 56, 78$.
Es gibt sechs Möglichkeiten zwei Richtige vorherzusagen, wobei f eine falsche Paarung bezeichnet:

12	34	f	f
12	f	56	f
12	f	f	78
f	34	56	f
f	34	f	78
f	f	56	78

Zu jeder dieser sechs möglichen Auslosungen gibt es zwei Möglichkeiten, falsche Paarungen zu tippen, also existieren $6 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten, zwei Richtige vorherzusagen. Es gibt also 12 Möglichkeiten, genau zwei Paarungen richtig vorherzusagen. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit genau zwei Paarungen richtig vorherzusagen $\frac{12}{105} \approx 11{,}43\%$.

Aufgabe 1370: Vierstellige Quadratzahl

Welches ist die kleinste vierstellige Quadratzahl, die auf 1 endet?

(Martin Mettler)

Lösung:

Wird eine natürliche Zahl n quadriert, so gilt für deren Einerziffer

Einerziffer von n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einerziffer von n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Damit eine Quadratzahl auf 1 endet, muss die quadrierte Zahl also auf 1 oder 9 enden.

Wegen $\sqrt{1000} \approx 31{,}6$ muss die quadrierte Zahl größer als 31 sein und auf 1 oder 9 enden. Die kleinste Zahl, die diese Bedingung erfüllt, ist 39. Somit ist die gesuchte Quadratzahl $39^2 = 1521$. (MG)

Aufgabe 1371: Das Alter zweier Mathematiker

Der Logiker L und der Mathematiker M haben am gleichen Tag Geburtstag. Bei ihrer gemeinsamen Geburtstagsfeier unterhalten sich die beiden Freunde L und M.

L zu M: „Ich habe mir drei natürliche Zahlen gedacht, deren Produkt 2450 ist und deren Summe dein Alter (in ganzen Jahren) angibt."

M zu L nach längerem Nachdenken und Rechnen: „Ich sehe keine Möglichkeit, die drei Zahlen anzugeben."

L zu M: „Jede der drei Zahlen ist kleiner als mein Alter (in ganzen Jahren)."

M zu L: „Jetzt kenne ich die drei Zahlen"

a) Wie heißen die drei Zahlen?

b) Wie alt sind L und M? (H.F.)

Lösung:

Es gibt 20 verschiedene Zahlentripel x, y, z, $x \leq y \leq z$, deren Produkt $xyz = 2450$ ist, nämlich

x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
y	1	2	5	7	10	14	25	35	49	5	7
z	2450	1225	490	350	245	175	98	70	50	245	175
$x+y+z$	2452	1228	496	358	256	190	124	106	100	252	184

x	2	2	5	5	5	5	7	7	7
y	25	35	5	7	10	14	7	10	14
z	49	35	98	70	49	35	50	35	25
$x+y+z$	76	72	108	82	64	54	64	52	46

Die 20 Summen $x+y+z$ sind alle verschieden außer $5+10+49=64$ und $7+7+50=64$.
Da M sein Alter kennt, hätte er bei jeder Summe $x+y+z \neq 64$ nach einigem Rechnen x, y und z angeben können.
Aus seiner 1. Antwort folgt daher, dass $x+y+z=64$ sein muss, so dass er 64 Jahre alt ist. Ferner ist

(1) $x=5, y=10, z=49$ oder $x=7, y=7, z=50$.

Aus der 2. Aussage von L zusammen mit (1) folgt, dass L mindestens 50 Jahre alt ist.
Wäre sein Alter ≥ 51 Jahre, dann erfüllen beide Tripel (1) L's 2. Aussage und wiederum hätte M nicht entscheiden können, welches der Tripel (1) das Lösungstripel ist. Aus M's 2. Antwort folgt also: L ist 50 Jahre alt und $(x, y, z) = (5, 10, 49)$.

Euler, Erdös, Clarkson
und die Reihe der reziproken Primzahlen
von Hartwig Fuchs

Die harmonische Reihe $H: \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ hat keinen endlichen Wert.* Das hat bereits im Mittelalter Nicole Oresme (vor 1330 - 1382) mit einer ganz elementaren Überlegung gezeigt, und zwar so:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}\right)+\dots \\
&>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{8}\right)+\dots \\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots
\end{aligned}$$

* Man sagt dann: Die Reihe ist divergent.

Dagegen hat die Reihe $G : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ einen endlichen Wert – dieser sogenannte Grenzwert ist 1.** Denn es ist
$G_n : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ (Beweis durch vollständige Induktion).
Mit wachsendem n strebt $\frac{1}{2^n}$ gegen 0, sodass G_n gegen 1 strebt.
Die Divergenz der Reihe H und die Konvergenz der Reihe G führten Leonhard Euler (1707 - 1783) auf eine interessante Frage:
Bei welcher „Ausdünnung" der Reihe H zu einer neuen Reihe H' bleibt die Reihe H' noch divergent bzw. ist sie bereits konvergent?
Auf Eulers Frage hat man bis heute keine allgemeingültige Antwort gefunden – man kann daher nur von Fall zu Fall unterscheiden, ob eine vorgegebene Reihe H' divergent oder konvergent ist.
Euler selbst hat einmal eine solche Entscheidung herbeigeführt, indem er für die Reihe R_p der reziproken Primzahlen zeigte:

(1) Die Reihe $R_p : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + ...$ ist divergent.

Für seine im Prinzip richtige Herleitung des Satzes (1) standen ihm natürlich nur die mathematischen Mittel seiner Zeit zur Verfügung und einige von ihnen genügen den heutigen Anforderungen an mathematischer Präzision nicht – weshalb sein Beweis später repariert werden musste. Aber auch danach war er für einige Mathematiker immer noch nicht recht befriedigend, benutzte er doch Hilfsmittel, die nicht zur Zahlentheorie gehören – etwa die *ln*-Funktion aus der Analysis.
Daher suchten Mathematiker lange nach einem Beweis, der rein zahlentheoretischer Natur ist. Erst Pál Erdös (1913 - 1996), der produktivste Mathematiker des 20. Jahrhunderts, hat einen solchen Beweis für die Divergenz der von ihm mit $\sum \frac{1}{p}$ bezeichneten Reihe R_p gefunden.***
Eine Vereinfachung des Erdös-Beweises hat James Clarkson (1906 - 1970) im Jahre 1966 gefunden – und den wollen wir hier nun beschreiben.
Es sei p_1, p_2, p_3, ... die unendliche Folge der nach wachsender Größe geordneten Primzahlen. Damit schreiben wir die Reihe R_p in (1) so:

$$R_p : \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + ... \quad , p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...$$

Für ein beliebiges $k \geq 1$ seien dann $A(k)$ ein Anfangsstück und $E(k+1)$ das zugehörige Endstück der Reihe R_p, wobei

$$A(k) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \quad \text{und} \quad E(k+1) = \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + + \frac{1}{p_{k+3}} ...$$

Clarkson setzt nun an den Anfang seines Beweises von (1) eine Annahme, die (1) widerspricht – man beachte hierbei: da die Teilsummen von $A(k)$ von R_p

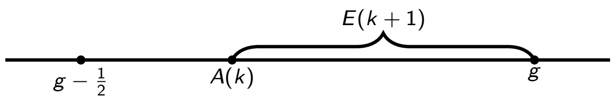
** Man spricht dann von einer konvergenten Reihe.

*** P. Erdös: Über die Reihe $\sum \frac{1}{p}$-Mathematica B7 (1938), Zutphen mit wachsendem k anwachsen, ist R_p entweder divergent oder konvergent; eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

(2) Annahme: Die Reihe R_p ist konvergent.

Wegen (2) besitzt R_p einen Grenzwert g und das bedeutet anschaulich: wenn k hinreichend groß gewählt wird, dann liegt die Teilsumme $A(k)$ von R_p nahe bei g. Insbesondere gilt:

(3) Es gibt eine Zahl k, so dass $g - A(k) < \frac{1}{2}$ und daher auch $E(k+1) < \frac{1}{2}$ ist.



Das Produkt $p_1 p_2 \dots p_k$ der Nenner der Summanden desjenigen $A(k)$, für das $g - A(k) < \frac{1}{2}$ gilt, sei mit P bezeichnet.
Clarkson beweist dann (1) mithilfe der Ausdrücke $\frac{1}{nP+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

(4) Die Reihe $Q : \frac{1}{P+1} + \frac{1}{2P+1} + \frac{1}{3P+1} + \dots$ divergiert.

Wegen $\frac{1}{nP+1} > \frac{1}{nP+P} = \frac{1}{(n+1)P}$ ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P+1} + \left(\frac{1}{2P+1} + \frac{1}{3P+1}\right) + \left(\frac{1}{4P+1} + \dots + \frac{1}{7P+1}\right) + \dots \\
&> \frac{1}{2P} + \left(\frac{1}{3P} + \frac{1}{4P}\right) + \left(\frac{1}{5P} + \dots + \frac{1}{8P}\right) + \dots \\
&> \frac{1}{2P} + \left(\frac{1}{4P} + \frac{1}{4P}\right) + \left(\frac{1}{8P} + \dots + \frac{1}{8P}\right) + \dots \\
&= \frac{1}{2P} + \frac{1}{2P} + \frac{1}{2P} + \dots .
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Divergenz der Reihe Q.Nun gilt aber auch:

(5) Die Reihe $Q : \frac{1}{P+1} + \frac{1}{2P+1} + \frac{1}{3P+1} + \dots$ ist konvergent.

Beweis

Jeder der k Primfaktoren von $P = p_1 p_2 \dots p_k$ ist auch ein Primfaktor von nP, $n \geq 1$, und daher kein Primfaktor von $nP+1$. Daher sind die Primfaktoren von $nP+1$ sämtlich $> p_k$ und $nP + 1 = p_{k+a} \cdot p_{k+b} \dots p_{k+r}$ mit r Primzahlen $> p_k$, $r \geq 1$, also

(6) $\frac{1}{nP+1} = \frac{1}{p_{k+a} \cdot p_{k+b} \cdot \ldots \cdot p_{k+r}}$.

Es seien nun $n_1, n_2, \dots$ die n-Werte, für die $nP + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ jeweils genau einen Primfaktor – etwa p_s bzw. p_t bzw. ... besitzt. Dann gilt mit (3):

(7) $\frac{1}{n_1 P+1} + \frac{1}{n_2 P+1} + \dots = \frac{1}{p_s} + \frac{1}{p_t} + \dots < \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + \dots + E(k+1) < \frac{1}{2}$.

Sind n_1', n_2', ... die n-Werte, für die $nP+1$ jeweils genau zwei Primfaktoren besitzt – ist also $n_1'P+1 = p_u p_v$, $n_2'P+1 = p_w p_x$, ... – so folgt zunächst

$$\frac{1}{n_1'P+1} + \frac{1}{n_2'P+1} + \ldots = \frac{1}{p_u p_v} + \frac{1}{p_w p_x} + \ldots .$$

Weil nun die Zahlen $\frac{1}{p_u p_v}$, $\frac{1}{p_w p_x}$, ... in der ausgerechneten Klammer $\left(\frac{1}{p_u} + \frac{1}{p_v} + \frac{1}{p_w} + \frac{1}{p_x} + \ldots\right)^r$ vorkommen, gilt mit (3):****

(7') $\frac{1}{n_1'P+1} + \frac{1}{n_2'P+1} + \ldots = \left(\frac{1}{p_u} + \frac{1}{p_v} + \frac{1}{p_w} + \frac{1}{p_x} + \ldots\right)^2 < \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + \ldots\right)^2 =$
$= (E(k+1))^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2.$

Ganz entsprechend zeigt man, dass für die Zahlen $nP+1$ mit genau drei Primteiler gilt:

(7'') $\frac{1}{n_1''P+1} + \frac{1}{n_2''P+1} + \ldots = \frac{1}{p_y p_z p_t} + \ldots < \left(\frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z} + \frac{1}{p_t} + \ldots\right)^3 < \left(\frac{1}{p_{k+1}}\right)^3$
$= (E(k+1))^3 < \left(\frac{1}{P_{k+1}} + \frac{1}{P_{k+2}} + \ldots\right)^3 = (E(k+1))^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3.$

und so weiter.

Wenn wir nun die Zeilen (7), (7'), (7''), ... addieren, so erhält man:

(8) $\frac{1}{n_1P+1} + \frac{1}{n_2P+1} + \ldots + \frac{1}{n_1'P+1} + \frac{1}{n_2'P+1} + \ldots + \frac{1}{n_1''P+1} + \frac{1}{n_2''P+1} + \ldots + = \frac{1}{P+1} +$
$\frac{1}{2P+1} + \frac{1}{3P+1} + \ldots < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots .$

Da die Reihe rechts in (8) konvergiert, muss auch die Reihe Q in (4) konvergieren. Aus der Annahme (2) folgt somit (4) und (5) – ein Widerspruch. Die Annahme ist falsch; es gilt (1) – die Reihe R_p divergiert.

Übrigens: Einen weiteren rein zahlentheoretischen sehr komprimierten Beweis für Eulers Behauptung (1) hat Ivan Noven (1915 - 1999) in AMM, Vol. 78 (1971) veröffentlicht – er ist nur elf Zeilen lang.

Mathematische Entdeckungen

Nach einigem Probieren ist es gelungen, die Zahl 2008 nur mithilfe der Zahlen Zwei (bzw. mit Drei, mit Vier), den arithmetischen Operationszeichen $+, -, \cdot, \div$ und Potenzen sowie Klammern so

$2008 = 2 \cdot \left(\left(2^2 \cdot 2 + 2\right)^{2+2\div 2} + 2^2\right)$ und auch so

$2008 = (3 \cdot 3 + 3 \div 3)^3 \cdot (3 - 3 \div 3) + 3 \cdot 3 - 3 \div 3$ sowie in der Form

$2008 = 4 \cdot \left(4^4 - 4 - 4 \div 4\right) \cdot (4 - 4 \div 4 - 4 \div 4)$ zu schreiben.

**** Für positive reelle Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_3$, $r = 2, 3, 4, \ldots$ gilt: Das Produkt $m_1 m_2 \ldots m_r$ kommt als Summand in dem ausgerechneten Klammerterm $(m_1 + m_2 + \ldots + m_r - \ldots)^r$ vor. Beweis (vollständige Induktion). Für $r = 2$ ist $(m_1 + m_2 + \ldots)^2 = (m_1 + m_2)^2 + \ldots = m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + \ldots$. Für $r - 1$ sei die Behauptung bewiesen. Dann ist für $r : (m_1 + m_2 + \ldots m_r + \ldots)^r = (m_1 + m_2 + \ldots m_{r-1} + \ldots)^r + r((m_1 + m_2 + \ldots m_{r-1} + \ldots)^{r-1} \cdot (m_r + \ldots) + \ldots) = \ldots + r \cdot m_1 m_2 \ldots m_{r-1} \cdot (m_r + \ldots) + \ldots = \ldots + r \cdot m_1 m_2 \ldots m_{r-1} m_r + \ldots$.

a) Wie du siehst, wurde die Zahl Zwei zehnmal, die Zahl Drei zwölfmal und die Zahl Vier elfmal verwendet. Kannst du eine Darstellung von 2008 angeben, die mit weniger als zehn Zahlen Zwei (mit weniger als zwölf Zahlen Drei, als elf Zahlen Vier) auskommt?

b) Wie viele Zahlen Fünf, Sechs, Sieben brauchst du für eine Darstellung von 2008? (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 31. August 2025 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Zur Aufgabe aus Heft 160

In Heft 160 stellten wir euch folgende Aufgabe:
Das älteste bekannte magische 3×3-Quadrat heißt Lo-Shu und wurde ca. 2800 v. Chr. entdeckt. Die Ziffern von 1 bis 9 werden so in den Feldern angeordnet, dass die Summen waagerecht, senkrecht und in den Diagonalen jeweils denselben Wert – bei Lo-Shu ist dies offensichtlich der Wert 15 – ergeben:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

a) Gibt es ein magisches 3×3-Quadrat, das einen anderen Summenwert als 15 hat?

b) Gibt es ein magisches 3×3-Quadrat, bei dem die 1 in der linken oberen Ecke steht?

c) Gibt es überhaupt weitere magische 3×3-Quadrate, die nicht durch Drehungen und Spiegelungen aus Lo-Shu hervorgehen?

Begründe Deine Antworten jeweils. (F.R.)

Lösung

a) Werden die Zahlen Eins bis Neun hinterlegt, beträgt deren Gesamtsumme 45. Da jede Zeile die gleiche Summe enthält und die drei Zeilen ebenfalls die Gesamtsumme ergeben, muss die magische Summe $\frac{45}{3} = 15$ betragen, eine andere Summe ist nicht möglich.

b) Die Eins kann nicht in der linken oberen Ecke stehen. Begründung: durch die drei Zeilen, drei Spalten und drei Diagonalen kommt jede Eckzahl dreimal, jede Kantenzahl zweimal und die Zahl in der Mitte viermal vor. Es gibt aber nur folgende acht Zerlegungen von 15 in drei verschiedene Summanden:

$$15 = 1 + 5 + 9 \quad 15 = 1 + 6 + 8 \quad 15 = 2 + 4 + 9 \quad 15 = 2 + 5 + 8$$
$$15 = 2 + 6 + 7 \quad 15 = 3 + 4 + 8 \quad 15 = 2 + 5 + 7 \quad 15 = 4 + 5 + 6$$

Die Fünf kommt als einzige Zahl viermal vor, muss also in der Mitte stehen.

Die ungeraden Zahlen kommen je zweimal vor, müssen also in den Kantenmitten stehen und die geraden Zahlen kommen je dreimal vor, stehen also in den Ecken des Quadrats.

c) Wir betrachten eine beliebige Lösung für das magische Quadrat 3×3. Da die geraden Zahlen in den Ecken stehen müssen, drehen wir ggf. ein beliebiges Lösungsquadrat, bis die sechs links oben und in der Mitte die fünf steht. Somit muss rechts unten wegen der Summe in der Diagonalen $15-6-5=4$ die Vier ihren Platz finden. Die Sechs kommt außer in der Diagonalen in den Summen $2+6+7$ und $1+6+8$ vor, also können wir annehmen, dass rechts oben die Acht stehen muss. Gegebenenfalls spiegeln wir das Lösungsquadrat an der Diagonalen, in der die Sechs steht.
Damit können wir die restlichen fünf Felder zwingend befüllen, um jeweils die Summe 15 zu erhalten: oben in der Kantenmitte $15-6-8=1$, unten in der Kantenmitte $15-1-5=9$, in der rechten Kantenmitte $15-8-4=3$, links in der Kantenmitte $15-5-3=7$ und im letzten Eckfeld $15-6-7=15-9-4=2$.
Das bedeutet: bis auf Drehungen und Spiegelungen gibt es nur eine Lösung für das magische Quadrat 3×3. (F.R.)

Wahr - aber nicht beweisbar

(1) Eine Grundregel der Logik lautet: Aus Wahrem folgt Wahres.

Ausführlicher: Wenn man von wahren Aussagen ausgehend durch eine Kette logischer Regeln eine Aussage A herleiten (beweisen) kann, dann ist die Aussage (A) wahr – und A heißt beweisbar.
Für jede beweisbare Aussage A gilt kurz

(2) A ist beweisbar $\Rightarrow$ A ist wahr (das Symbol $\Rightarrow$ besagt: daraus folgt).

Die Mathematiker waren bis ins 20. Jahrhundert davon überzeugt, dass auch die Umkehrung (3) von (2) zutrifft.

(3) A ist wahr $\Rightarrow$ A ist beweisbar.

Als jedoch der Logiker Kurt Gödel (1906 - 1978) die Frage untersuchte, ob die Aussage (3) tatsächlich in der Mathematik gilt, da entdeckte er etwas, dass bis dahin niemand für möglich gehalten hatte.
Er bewies 1931 mit seinem berühmten Unvollständigkeitssatz:

(4) Es gibt mathematische Aussagen, die wahr aber nicht beweisbar sind – solche Aussagen nannte man später Gödelaussagen.

Man hat einige Gödelaussagen gefunden. Sie sind oft von exotischer, nicht elementarer Natur. Die in (5) gegebene Aussage A bildet da eine Ausnahme: Es ist ein Leichtes nachzuweisen, dass sie die Gödeleigenschaft besitzt.

Es sei A die Aussage, die von sich selbst behauptet:

(5) A: Ich bin nicht beweisbar.

Annahme 1: A ist wahr. Dann ist A unbeweisbar wegen (5).
Annahme 2: A ist nicht wahr. Dann folgt aus (5), dass A beweisbar ist. Wegen (2) ist dann A wahr – im Widerspruch zur Annahme. Also: Die Annahme ist falsch. Also ist A wahr.
In beiden Fällen ergibt sich, dass A wahr, aber wegen (5) unbeweisbar ist.
Schema des Nachweises, dass A wahr ist:

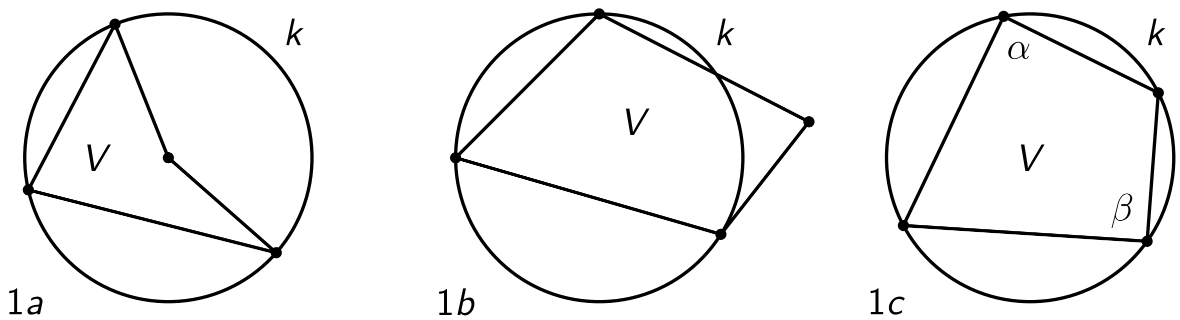
$$\begin{tikzcd}
 & A \text{ wahr} \arrow[r, "(5)"] & A \text{ unbeweisbar} & \\
\text{A} \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "2"'] & A \text{ falsch} \arrow[r, "(5)"'] & A \text{ beweisbar} \arrow[r, "(2)"'] & \text{Annahme falsch} \arrow[d] \\
 & & A \text{ unbeweisbar} & A \text{ wahr} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

H.F.

Sehnenvierecke
und der Satz von Brahmagupta
von Hartwig Fuchs

Welche Vierecke sind Sehnenvierecke?

Es sei V ein Viereck. Wenn es dann einen Kreis k gibt, auf dem die Eckpunkte von V liegen, dann heißt V ein Sehnenviereck und k ist sein Umkreis.
Nicht jedes Viereck hat einen Umkreis, wie die Figuren 1a und 1b zeigen.



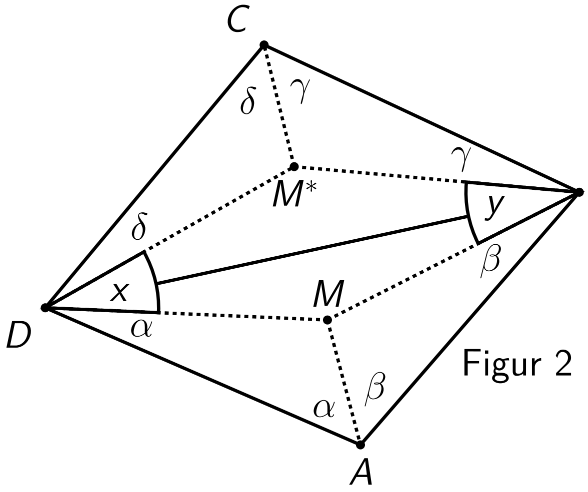
Figur 1

Welche Bedingung muss ein Viereck V erfüllen, damit es einen Umkreis besitzt?

(1) Ein Viereck V besitzt einen Umkreis, wenn für zwei seiner einander gegenüberliegenden Winkeln – etwa α und β wie in Figur 1c gilt: $\alpha + \beta = 180°$.

Nachweis von (1)

Ein Viereck $V = ABCD$ sei durch eine Diagonale – etwas durch BD wie in Figur 2 – in die Dreiecke ABD und BCD zerlegt. Die Mittelpunkte der Umkreise dieser Dreiecke seien M und M^*. Annahme: Es gilt $M \neq M^*$.



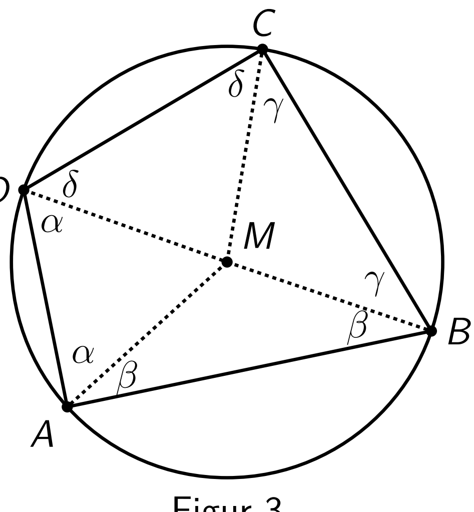
Figur 2

Da die Dreiecke ABM, BCM^*, CDM^* und DAM gleichschenklig sind, sind bei jedem dieser Dreiecke die Winkel an der Basis AB, BC, CD und DA gleich groß. Mit den Bezeichnungen der Figur 2 gilt nach Voraussetzung $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ$ für die gegenüberliegenden Winkel bei A und C. Da die Winkelsumme in V 360° beträgt, gilt:
$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + x + y = 2 \cdot 180^\circ + x + y$ und daher $x + y = 0$. Also liegen M und M^* auf der Diagonalen BD und wegen $|MB| = \frac{1}{2}|BD| = |M^*B|$ folgt $M = M^*$. Die Annahme ist also falsch.

Daher muss der Umkreis des Dreiecks ABD zugleich Umkreis des Dreiecks BCD sein. Damit trifft (1) zu. Von Satz (1) gilt auch die Umkehrung.

(2) In einem Sehnenviereck beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180°.

Nachweis von (2)



Figur 3

Es sei $V = ABCD$ ein Sehnenviereck und M sei der Mittelpunkt seines Umkreises. In den gleichschenkligen Dreiecken ABM, BCM, CDM und DAM gilt dann: Für ihre in Figur 3 angegebenen Winkel (α, β, γ) folgt: $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^\circ$ und daher $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta) = (\alpha+\delta)+(\beta+\gamma) = 180^\circ$. Daher gilt (2).

Während die Aussage (1) eine Eigenschaft beschreibt, die alle Sehenvierecke besitzen, hat Brahmagupta bereits vor fast 1400 Jahren eine besondere Eigenschaft bei Sehnenvierecken eines speziellen Typs durch einen später nach ihm benannten Satz nachgewiesen.*

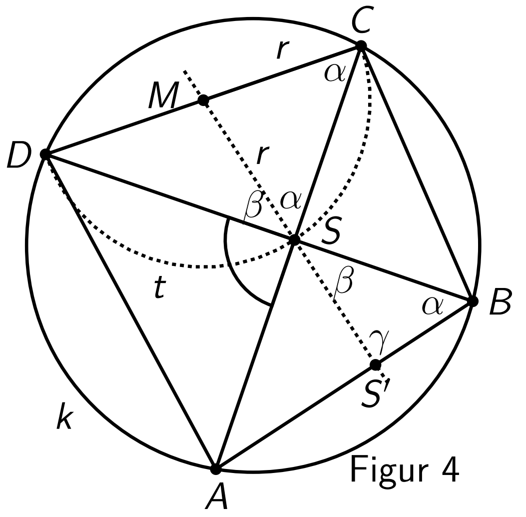
* Vergleiche die historische Bemerkung unten.

Der Satz von Brahmagupta – mit den Bezeichnungen in der Figur 4

(3) In einem Sehnenviereck $ABCD$ seien die Diagonalen orthogonal und S sei ihr Schnittpunkt. Ist dann M der Mittelpunkt der Strecke CD, dann gilt: Die Verlängerung der Strecke MS schneidet die Seite AB des Sehnenvierecks in einem Punkt S' unter einem rechten Winkel.

Nachweis von (3)

Bei allen Dreiecken ABC mit dem gleichen Umkreis k und der Kreissehne AD als gemeinsamer Seite sind die Winkel $\sphericalangle ACB$ an der Ecke C nach dem Peripheriewinkel-Satz gleich groß. Für Figur 4 bedeutet das: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \alpha$. Weil das Dreieck CDS rechtwinklig ist, liegen seine Ecken C, D und S , nach dem Satz des Thales, auf dem Halbkreis t mit Mittelpunkt M und dem Durchmesser CD der Länge $|CD| = 2r$. Daraus folgt $|MC| = |MS| = r$ und Dreieck CMS ist



Figur 4

gleichschenklig mit $\sphericalangle MSC = \sphericalangle SCM = \alpha$. Dann gilt: $\sphericalangle DSM = \beta = 90^\circ - \alpha$. Im Dreieck BSS' ist somit $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (90^\circ - \alpha) + \gamma = 180^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ – wie Brahmagupta behauptet hat.

Historische Notiz

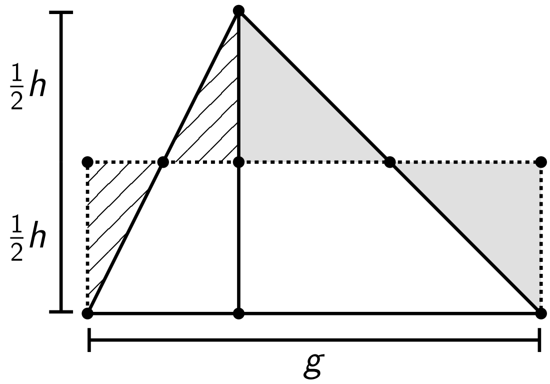
Brahmagupta (598 - nach 665) gilt als einer der wichtigsten Vertreter der frühen indischen Mathematik. Seine Bedeutung gründet sich auf sein astronomisches Lehrbuch Brāhmasphutasiddhānta aus dem Jahr 628, in dem er in zwei Kapiteln die Mathematik seiner Zeit, insbesondere die Algebra, beschreibt.

- Dort findet sich die erste systematische Darstellung des Rechnens mit der Null und mit negativen Zahlen, ein Jahrtausend bevor diese Zahlen in der europäischen Mathematik auftreten;
- Es werden Lösungsformeln für lineare Gleichungen angegeben sowie eine Formel zur Berechnung der Wurzeln von Gleichungen zweiten Grades, die heute noch jede Schülerin und jeder Schüler benutzt.

Sein Buch erhält ferner einen Abschnitt zur Geometrie ebener Figuren, worin sich sein Beweis der Aussage (3) befindet, welcher zeigt, dass er nicht nur die Algebra, sondern auch die Geometrie seiner Zeit beherrschte.

Beweis ohne Worte
Flächeninhalt eines Dreiecks

Die Fläche F eines Dreiecks mit einer Grundseite der Länge g und der Höhe h beträgt $F = \frac{1}{2} g \cdot h$. H. F.



Rubrik der Löserinnen und Löser
Stand nach Heft 160

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 7: Quirin Fritsch 3, Christina Karst 32, Felix Pick 2,
Sina Marie Uherek Reyes 12;
Kl. 8: Robert Schmitt 7;
Kl. 9: Lisa Schäfer 33,5.

Bingen, Stefan-George Gymnasium
Kl. 6: Jonas Döring 12;
Kl. 7: Mais Alkhateeb 12, Tim Jockers 38.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 7: Philip Mühlbeyer 21;
Kl. 8: Nico Mathy 9.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 8: Stephanos Dimitriou 31.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium
Kl. 7: Stefan Wolfert 5;
Kl. 9: Till Radünz 42,5;
Kl. 9: Niklas Gelhausen 42,5.

Idar-Oberstein, Göttenbach-Gymnasium
Kl. 11: Joschua Jung 42.

Ingelheim, Sebastian-Münster Gymnasium:
Kl. 12: Elanor Kondla 41.

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:
Kl. 7: Baris Eski 2;
Kl. 10: Lean Idrizaj 3;
Kl. 12: Matej Berger 20, Kadir Koçyiğit 17.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 7: Jonas Dürkes 45;
Kl. 8: Mara Schollmeyer 2.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 10: Lea Amend 43, Victor Mayer 11.

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 8: Ioan Salaru 43.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 7: Philipp Mühl 11, Sophia Kiehn 11, Nina Pucklitsch 14,5, Martin Schroff 38;
Kl. 9: Daniel Laibach Muñiz 37;
Kl. 10: Johannes Kiehn 31.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 10: Jasmin Borrmann 16;
Kl. 11: Emilie Borrmann 22.

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 12: Nils Angel 40.

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 10: Mai Linh Dang 40.

Erratum

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal Fehler ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken. So auch in Heft 161:

- **Das Wurzelmonster (Monoid 161, Seite 9)**

  Der Zähler des Bruches in der ersten Zeile $\sqrt{27\sqrt[4]{9^3\sqrt{81}}}$ enthält einen Druckfehler. Der eigentliche Bruch lautet:

  $$A = \frac{\sqrt{27\sqrt[4]{9\sqrt[3]{81}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[10]{3^{-5}}}}} = \frac{z}{n}.$$

  Wir bedanken uns bei Herrn Ernst Mischler, der uns auf diesen Fehler hingewiesen hat.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2025/26 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
  `www.facebook.com/monoid.matheblatt`
  `www.facebook.com/monoid.redaktion`
  `www.instagram.com/monoid.matheblatt`
  Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
  Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Claudia Jockers, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf, mit freundlicher Unterstützung von Lina Baumann
Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Jahrgang 45	Heft 162	Juni 2025

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid